

# 131 - Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

$k$  corps de caract  $\neq 2$ .

## 1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Forme quadratique.

**Proposition 1.** *Formules de polarisation, forme polaire.*

**Proposition 2.** *Polynôme associé, homogène de degré 2, en dimension  $n$ .*

**Définition 2.** Matrice associée.

**Définition 3.** Application dualité !

**Définition 4.** F.q. non dégénérée (donc dualité isomorphisme), noyau, rang, discriminant (dans  $k/k^{*2}$ ). Équivalence.

*Remarque.* Ça se lit sur les matrices (congruence!).

En prenant un supplémentaire du noyau on se ramène au cas non dégénéré.

*Remarque.* Discriminant de  $ax^2 + bxy + cy^2$  et déterminant de  $ax^2 + bx + c$ .

*Exemple.* Étude de  $3x^2 + y^2 + 2xy - 4xz \dots$

## 2 Orthogonalité, isotropie

**Définition 5.** Orthogonalité, sous-espaces orthogonaux, orthogonal.

**Proposition 3.**  $\dim F^\perp + \dim F = \dim E + \dim(F \cap \ker q)$ . Cas particulier  $q$  non dégénérée.

**Proposition 4.** Dans le cas non dégénéré,  $F^{\perp\perp} = F$ ,  $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ ,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

**Définition 6.** Cône isotrope,  $q$  définie,  $\ker q \subset C(q)$ .  
Sous-espace isotrope, totalement isotrope.

*Remarque.* Le cône isotrope est une conique/quadrique!

*Exemple.* Perrin!

**Définition 7.** Indice, SETIM.

*Remarque.*  $\nu \leq n/2$ .

**Théorème 1** ([Gou]). *Tous les SETIM ont même dimension.*

**Définition 8.** Plan hyperbolique, espace hyperbolique.

**Proposition 5.** *Équivalences plan hyperbolique.*

**Proposition 6.** *Classifications des plans suivant leurs isotropes.*

**Théorème 2.** *Plongement dans une extension hyperbolique.*

**Corollaire 1.** *Lagrangien.*

### 3 Classification

**Proposition 7.** *Méthode de Gauss.*

#### 3.1 Sur un corps algébriquement clos

#### 3.2 Sur $\mathbb{R}$

Sylvester!

#### 3.3 Sur $\mathbb{F}_q$

With the lemma. Application à l'étude d'une équation diophantienne [Hindry p. 10].

### 4 Cas réel

Indice selon signature. F.q. définie, définie positive, Schwarz, Minkowski, ex de  $A \mapsto \text{tr}(A^2)$ , orthogonalisation simultanée et app au lemme pour John-Loewner

### 5 Groupe orthogonal

Théorème de Cartan Dieudonné et app du Perrin. Centre. Cas réel. Éllipsoïde de John

## 6 Applications éventuelles

### Références

Perrin  
Gourdon  
Audin