133 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

$n \in \mathbf{N}^*$, E espace euclidien de dimension n.

1 Définitions et généralités

1.1 Adjoint

Proposition 1. *Riesz, dualité.*

Définition 1. Adjoint.

Proposition 2. $u^{**} = uf$, $(uv)^* = v^*u^*$, $Id^* = Id$.

Proposition 3. $Ker\, u^* = (Im\, u)^\perp$, $Im\, u^* = (Ker\, u)^\perp$, *$F$ stable par u* $\implies$ $F^\perp$ *stable par* u^*.

Définition 2. Symétrique (autoadjoint), antisymétrique, isométrie, normal.

Remarque. Symétrique, antisymétrique, isométrie impliquent normal.

Proposition 4. *Traduction matricielle.*

Proposition 5. *Si u est normal, alors* $\forall x \in E$, $\|u^*(x)\| = \|u(x)\|$.

1.2 Cas particulier des endomorphismes symétriques

Exemple. Symétrie orthogonale, projection orthogonale.

Définition 3. Positive, définie positive.

Remarque. Notions stables par restriction !

Remarque. $\forall A \in M_n(\mathbf{R})$, $A^*A \in S_n(\mathbf{R})$.

Remarque. S_n^+ est des cônes convexes fermés.
S_n^{++} est dense dans S_n^+.
S_n est un fermé de M_n.

Proposition 6. *Critère de Sylvester.*

Définition 4. Forme bil sym/sesquilinéaire hermitienne associée, forme quadratique/hermitienne.

Exemple (Matrice de Gram). – de Gram ssi dans S_n^+
– déterminant de Gram nul ssi famille liée
– distance

Application (Müntz).

Exemple (matrice hessienne). Lemme de Schwarz. Condition du second ordre.

1.3 Cas particulier des endomorphismes orthogonaux

Exemple. Symétrie orthogonale, projection orthogonale, rotations planes...

Proposition 7. *u orthogonal ssi conserve le prod scal ssi conserve la norme ssi img bon est une bon.*

Remarque. $\det u \in \{-1, 1\}$.

Définition 5. Isométrie directe, SO_n.

Définition 6. Similitude.

Proposition 8. *Caractérisation des similitudes Perrin.*

2 Réduction des endomorphismes normaux

Lemme 1. *Soit u normal et F stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*

Lemme 2. *Forme matricielle des endomorphismes normaux en dimension 2.*

Théorème 1. *Réduction des endomorphismes normaux.*

2.1 Cas particulier des endomorphismes symétriques

Théorème 2. *Soit $M \in S_n(\mathbf{R})$ (resp. $H_n(\mathbf{C})$). Alors il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ (resp $U_n(\mathbf{C})$) et D diagonale réelle tq $M = PDP^*$.*

Corollaire 1 (Réduction simultanée)**.** *!! Mat sym def pos !!*

Proposition 9. *Méthode de Gauss.*

Théorème 3 (Loi d'inertide de Sylvester)**.**

Lemme 3. *La fonction $\mu : S_n^{++}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $M \mapsto (\det M)^{-1/2}$ est strictement convexe.*

Proposition 10. *Pour tout $A \in M_n(\mathbf{R})$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.*

Proposition 11. *Homéo et exponentielle.*

Proposition 12 (Racines carrées matricielles)**.**

Corollaire 2 (Décomposition polaire)**.**

2.2 Cas particulier des endomorphismes orthogonaux

Théorème 4. *Forme canonique/réduction.*

Corollaire 3. *Composantes connexes.*

Corollaire 4. *L'image de A_n par l'exponentielle est SO_n, image réciproque [FGN3 p. 65].*

2.3 Cas particulier des endomorphismes antisymétriques

Théorème 5 (Réduction)**.**

Application. Tout endomorphisme antisymétrique est de rang pair.

3 Étude du groupe orthogonal

Proposition 13. *Décomposition en produit semi-direct.*

Théorème 6. *Soit G un sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbf{R})$. Alors il existe une forme quadratique q^G découlant d'un proquit scalaire telle que G soit un sous-groupe de $O(q^G)$.*

3.1 Centre et générateurs de $O(E)$ et de $SO(E)$

Théorème 7. *Le centre de $O(q)$ est $Z = \{\pm Id\}$.*

Théorème 8. *Tout élément $u \in O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.*

Application ([Per p. 198]). Si $u \in O(q)$ vérifie $\det u = -1$, alors u admet une valeur propre égale à ± 1.

Proposition 14. *Pour $n \geq 2$, on a $D(O(q) = SO(q)$.*

3.2 La dimension 2 et les angles

Définition de l'angle, de leur mesure.
Sous-groupes finis : groupes diédraux.

Références

Gourdon
Perrin
Goblot
FGN 3