137 - Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie ; convexité. Applications.

On note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de dimensions finies n et m sur le corps K, ainsi que E et F leurs directions.

1 Barycentres

1.1 Définitions, généralités

Définition 1. Soit $A_1, \dots, A_k \in E$ et $\lambda_1, \dots \lambda_k \in K$ tq $\sum \lambda_1 \neq 0$. Lpsse :

(i) $\sum \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

(ii) $\forall M \in \mathcal{E},\ \sum \lambda_i \overrightarrow{MG} = \sum \lambda \overrightarrow{MA_i}$

De plus, un tel point G satisfaisant ces propriétés existe et est unique. Il est appelé le *barycentre* des points pondérés (A_i, λ_i) et noté $Bar((A_i, \lambda_i), 1 \leq i \leq k)$.

Exemple. $Bar((e^{2ik\pi/n}, 1), 0 \leq k < n) = 0$.

Proposition 1. $\forall \mu \neq 0,\ Bar((A_i, \lambda_i)) = Bar((A_i, \mu\lambda_i))$.

Proposition 2 (Associativité)**.** *Soit $(A_{i,j})_{1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq k}$ une famille de points et $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq k}$ une famille de scalaires tq $\forall i, \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{i,j} \neq 0$. Posons poour tout i $G_i = Bar((A_{i,j}, \lambda_{i,j}), 1 \leq j \leq k_j)$ et $G = Bar((A_{i,j}, \lambda_{i,j}), 1 \leq j \leq k_j, 1 \leq i \leq k)$. Alors $G = Bar((G_i, \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{i,j}), 1 \leq i \leq k)$.*

Application. L'isobarycentre des sommets d'un triangle non aplati est situé aux 2/3 de chaque médiane.

Théorème 1. *Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Alors f est affine ssi elle conserve les barycentres.*

Remarque. C'est équivalent de demander à préserver les barycentres de 3 points, et si $car(K) =\neq 2$, de demender à préserver les barycentres de 2 points.

1.2 Barycentres, sous-espaces affines et repères

Définition 2. Soit $X \subset \mathcal{E}$, $X \neq \emptyset$. Le sous-espace affine engengré par X, noté $\langle X \rangle$, est l'intersection des sous-espaces affines contenant X.

Proposition 3. *$\langle X \rangle$ est l'ensemble des barycentres de points de X.*

Définition 3. Soit $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{E}^k$. On dit que la famille $(A_1, \dots, A_k)$ est *affinement libre* si pour tout poit M dans l'espace affine engendré par les A_i, $\exists!(\lambda_1, \dots \lambda_k) \in K^k : M = Bar((A_i, \lambda_i))$ et $\sum \lambda_i = 1$. Dans le cas contraire, on dit que la famille est *affinement liée*. On dit que c'est un *repère affine* si elle est libre et engendre l'espace. Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in K^k$ tels que $M = Bar((A_i, \lambda_i))$ sont appelés les coordonnées barycentriques de $M \in \mathcal{E}$ dans le repère $\{A_i\}$.

Exemple. Dans un triangle non aplati, le centre de gravité a pour coordonnées barycentriques $1/3, 1/3, 1/3$ dans le repère formé des 3 sommets.

Proposition 4. *Problème d'extrémum dans un triangle.*

Théorème 2. *$(A_0, \dots, A_k) \in \mathcal{E}^k$ est libre (resp. engendre $\mathcal{E}$) ssi $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ est libre (resp. engendre E). En particulier le cardinal d'un repère affine est toujours égal à $n+1$.*

Corollaire 1. *Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$ et $B_0, \dots, B_m$ des points de $\mathcal{F}$. Il existe une unique application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tq $f(A_i) = B_i \forall i$. De plus f est un isom ssi $(B_0, \dots, B_m)$ est un repère de $\mathcal{F}$.*

Application (Combes p.119). Soit $A_1A_2A_3$ un triangle non aplati du plan euclidien réel et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ un triplet de réels de somme non nulle. pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, on pose $G_\sigma = Bar((A_i, \lambda_{\sigma_i}))$. Les 6 points G_σ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ sont alors situés sur une ellipse dont le centre est le centre de gravité de $A_1A_2A_3$.

Proposition 5. *Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère de $\mathcal{E}$ et H l'hyperplan affine de K^{n+1} d'équation $\sum x_i = 1$. Alors l'application $\mathcal{E} \to H,\ A = Bar((A_i, \lambda_i)) \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ est un isomorphisme. On peut donc, via le choix d'un repère, plonger tout espace affine de dimension finie dans K^{n+1}, et même l'identifier à K^n.*

Proposition 6. *Soit $(P_0, \dots, P_n) \in \mathcal{E}^n$. Ils sont affinement liés ssi le det de leurs coordonnées barycentriques est nul.*

Application. On munit le plan euclidien réel d'un repère affine $(A_0A_1A_2)$. Si $A = Bar((A_i, \lambda_i))$ et $B = Bar((A_i, \beta_i))$, avec $B \neq A$, alors $M = Bar((A_i, x_i))$ est sur la droite (AB) ssi $\begin{vmatrix} x_0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ x_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ x_2 & \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$.

revoir toussa / th de Menelaüs ?

2 Barycentres et convexité

On suppose désormais $K = \mathbf{R}$.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4. Un ensemble $C \subset \mathcal{E}$ est dit *convexe* s'il est stable par barycentres à coefficients positifs.

Seulement 2 points : *car* $\neq 2$ **?**

Proposition 7. *Une intersection de convexes est convexe.*

Application. Sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbf{R})$.

Définition 5. Soit $X \subset \mathcal{E},\ X \neq \emptyset$. On appelle *enveloppe convexe* de X, et note $co(X)$, le plus petit (pour l'inclusion) convexe contenant X. C'est aussi l'intersection de tous les convexes contenant X.

Proposition 8. *$co(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de X.*

Proposition 9. *Soit $f : E \to \mathbf{R}$. f est convexe ssi $epi(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbf{R} \mid f(x) \leq t\}$ est convexe.*

Corollaire 2. *L'enveloppe supérieure de fonctions convexes est convexe.*

Théorème 3 (Carathéodory)**.** *Soit $X \subset \mathcal{E}$ et $C = co(X)$. Alors C est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points de X.*

Corollaire 3. *L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

Remarque. C'est faux en dimension infinie.

Proposition 10. *Soit $X \subset \mathcal{E},\ X \neq \emptyset$ et $A \notin X$. Soit $D = d(A, X)$.*
- *Si X est fermé, alors d est atteinte*
- *Si X est convexe, alors d est atteinte en au plus un point.*

Théorème 4 (Motzkin)**.** *Si $X \subset \mathcal{E},\ X \neq \emptyset$ est tq $\forall A \in \mathcal{E},\ \exists! p(A) \in X : d(A, p(A)) = d(A, X)$, alors X est fermé et convexe.*

Proposition 11. *Sous-espace affine engendré, dimension [Tauvel].*

2.2 Points extrémaux

Définition 6. Soit $C \subset E$ un connexe, et $A \in C$. On dit que A est un *point extrémal* de C lorsque $A = Bar((B_1, \lambda_1), (B_2 \lambda_2))$, avec $B_1, B_2 \in C$ implique que $B_1 = B - 2$.

Proposition 12. *A est extrémal ssi $C \setminus \{A\}$ est convexe.*

Théorème 5 (Krein-Millman)**.** *Soit C un convexe compact non vide. Alors K est enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Proposition 13. *Soit C un convexe et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine tq $f(C) = C$. Alors f préserve les points extrémaux de C.*

2.3 Optimisation et points fixes

Théorème 6. *Fonction convexe sur un convexe et optimisation.*

Application. Sous-groupes compacts de Gl_n.

Théorème 7 (Kakutani, [FGN])**.**

Théorème 8 (Brouwer)**.** *Soit K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : K \to K$ admet au moins un point fixe.*

Application. Soit ABC un triangle plein du plan. Supposons que $ABC = F_a \cup F_b \cup F_c$, avec F_a, F_b, F_c trois ouverts contenant resp. les côtés $[A,B], [B,C]$ et $[C,A]$. Alors ils ont au moins un point en commun.

2.4 Hahn-Banach et applications

Définition 7. Jauge d'un convexe ouvert.

Proposition 14. *Jauge, Cf Brézis.*

Remarque. Si le convexe est symétrique, alors la jauge est une norme.

Théorème 9 (Hahn-Banach géométrique, ouvert-convexe)**.**

Théorème 10 (Hahn-Banach géométrique, fermé-compact [Vinx])**.** *Soit H un Hilbert réel. Si A et B sont deux convexes non vides disjoints de H, avec A fermé et B compact, alors il existe une forme linéaire $f \in H^*$ telle que $\sup_{a \in A} f(a) < \inf_{b \in B} f(b)$.*

Application. Tout convexe fermé d'un Hilbert est égal à l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.