139 - Applications des nombres complexes à la géométrie.

1 L'exponentielle complexe et les angles

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. La fonction exponentielle est définie pour tout nombre complexe z par $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 1. *L'exponentielle est un morphisme de* $(\mathbf{C}, +)$ *vers* $(\mathbf{C}^*, \times)$.

Définition 2. Pour $t \in \mathbf{R}$, on définit le cosinus et le sinus, notés cos et sin comme étant resp. la partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle e^{it}.

Définition 3. On définit π comme étant le double du plus petit réel positif t tel que $\cos t = 0$. On a alors $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Théorème 1. *L'exponentielle est une surjection de* $(\mathbf{C}, +)$ *vers* $(\mathbf{C}^*, \times)$. *Notant* $\mathbf{U}$ *l'ensemble des nombres complexes de module 1, elle réalise un morphisme de groupes de* $(\mathbf{R}, +)$ *vers* $(\mathbf{U}, \times)$*, surjectif et de noyau* $2\pi\mathbf{Z}$.

Ainsi, tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. r est le *module* de z et θ son *argument*.

1.2 Trigonométrie

Proposition 2. *Formule de De Moivre :* $\forall t \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N},\ (\cos t + i \sin t)^n = \cos(nt) + i \sin(nt)$.
Formules d'Euler : $\forall t \in \mathbf{R},\ \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\ \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

Application. – Linéarisation de $\sin^n t$ et de $\cos^n t$ (en vue par exemple d'une intégration).
– **Calcul des sommes ?**

1.3 Angles

Soit E le plan euclidien orienté.

Proposition 3. *Étant donnés deux vecteurs unitaires de E, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre. Cela définit la relation d'équivalence $(u,v)R(u',v')$ ssi il existe une rotation r tq $r(u)=u'$ et $r(v)=v'$.*

Définition 4. La classe d'équivalence de (u,v) est appelée *angle orienté* de u et de v. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés.

Proposition 4. *Soit $\varphi : \mathcal{A} \to SO(E)$, $(u,v) \mapsto r$ telle que r soit la rotation envoyant u sur v. φ est bien définie et est une bijection. On en déduit une structure de groupe sur $\mathcal{A}$ en posant $(u,v)+(u',v') = \varphi^{-1}(\varphi(u,v)\circ\varphi(u',v'))$, ce qui fait de φ un morphisme de groupes.*

Proposition 5. *La matrice d'une rotation de E est la même dans toutes les bases orthonormées directes.*

Définition 5. On associe alors à tout angle (u,v) l'unique $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tel que $\varphi(u,v)$ soit représenté par la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. θ est appelé la *mesure* de l'angle (u,v).

Proposition 6. *$SO(E) \approx \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, i.e. $SO_2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{U}$. Ainsi à tout angle orienté correspond bijectivement un élément de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Pour tout $z \in \mathbf{U}$, l'argument de z correspond à l'angle $(1,z)$.*

Proposition 7. *On a $arg(z_1z_2) = arg(z_1)arg(z_2)$, $arg(z_1/z_2) = arg(z_1) - arg(z_2)$.*