140 - Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.

k est un corps commutatif.

1 Position du problème et étude théorique

1.1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1. Système d'équations linéaires, matrice associée, solution du système, système compatible, rang du système, systèmes équivalents.

Exemple. Exemple sans solution.
Exemple 2×3 avec un ensemble de solutions de rang 2.
Systèmes inversible 2×2

Proposition 1. *Ensemble des solutions sea, vide si $b \notin Im\, A$, de direction $Ker\, A$ sinon.*

Application. Inversion de matrices, calcul d'une base de $F^{\perp}$ ayant une base de F, discrétiqation d'EDP ?

1.2 Systèmes particuliers

Système de Cramer

Cas A carrée inversible.

Proposition 2 (Formules de Cramer). *Allaire Kaber p.77.*

Remarque. Coût horrible en $n!$. Autres méthodes de résolution mais intérêt théorique.

Système triangulaire

On considère une matrice A triangulaire supérieure inversible. On utilise un "algorithme de remontée" : la dernière équation fournit x_n, que l'on remplace dans les équations précédentes. On peut alors calculer x_{n-1} etc. Cet algorithme est de complexité $n^2/2$.

Système échelonné

Définition 2. On dit que le système A est *écheloné* s'il existe une suite $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ tq $a_{i,j_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq r$, $a_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j < j_i$ et $a_{i,j} = 0$, $r < i \leq p$, $1 \leq j \leq n$.
Les inconnues $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ sont dites *principales*, les autres sont dites *secondaires.*

Le système n'a pas de solution si $\exists i \geq r : b_i \neq 0$. Sinon l'ensemble des solutions, obtenu par un algorithme de remontée, sera de rang l'ensemble des inconnues secondaires.

1.3 Théorème de Rouché-Fontené

Théorème 1 (Blabla)**.**

2 Résolutions pratiques

2.1 LE pivot de Gauss

Définition 3. Matrices de permutation, dilatation, transposition.

Exposition de l'algo ($\times$ gauche $\leftrightarrow$ lignes). Indépendant du corps de base.

Application. Les transvections engendrent Sl_n, les tranvections et les dilatations engendrent Gl_n.

Application. Calcul de A^{-1} (conservation de la matrice de passage), de $\det A$.

Proposition 3. *r-équivalence.*

Application. Aplications $rg(A) = rg({}^tA)$, densité Gl_n, toute matrice somme de deux inversibles, calcul de l'image et du noyau.

Théorème 2. *Algo de Berlekamp.*

2.2 Décompositions classiques

Décompositions LU, de Choleski, PG. Remarques algorithmiques et de complexité.

2.3 Le gradient

On se place dans le cas où $A \in S_n^{++}$.
On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$.

Proposition 4. *On a $\nabla f = Ax - b$ et f fortement convexe.*

Théorème 3. *Gradient à pas optimal, Allaire.*

Références

D. Serre
Allaire Kaber
Allaire
RDO
Ciarlet