141 - Utilisation des groupes en géométrie.

1 Groupe orthogonal

1.1 Généralités

Définition 1. Espace euclidien, espace affine euclidien.

Proposition 1. *La norme est une distance.*

Définition 2. Groupe orthogonal.

Proposition 2. *Stabilité de l'orthogonal.*

Proposition 3. *L'orbite d'un vecteur par le groupe orthogonal est la boule de rayon la norme du vecteur.*

Théorème 1. *Structure du groupe [Per].*

Corollaire 1. *Composantes connexes.*

Corollaire 2. *L'image de A_n par l'exponentielle est SO_n, image réciproque [FGN3 p. 65].*

Théorème 2. *Toute application de $O(E)$ est produit d'au plus n réflexions.*

Application. Perrin p. 199.

Théorème 3. *Générateurs de $SO(E)$.*

Théorème 4. *Tout sous-groupe compact de Gl_n est stable par un produit scalaire.*

1.2 La dimension 2 et les angles

Soit E le plan euclidien orienté.

Proposition 4. *Étant donnés deux vecteurs unitaires de E, il existe une unique rotation qui envoie l'un sur l'autre. Cela définit la relation d'équivalence $(u,v)R(u',v')$ ssi il existe une rotation r tq $r(u)=u'$ et $r(v)=v'$.*

Définition 3. La classe d'équivalence de (u,v) est appelée *angle orienté* de u et de v. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés.

Proposition 5. *Soit* $\varphi : \mathcal{A} \to SO(E)$, $(u,v) \mapsto r$ *telle que* r *soit la rotation envoyant* u *sur* v. φ *est bien définie et est une bijection. On en déduit une structure de groupe sur* $\mathcal{A}$ *en posant* $(u,v)+(u',v') = \varphi^{-1}(\varphi(u,v)\circ\varphi(u',v'))$, *ce qui fait de* φ *un morphisme de groupes.*

Proposition 6. *La matrice d'une rotation de* E *est la même dans toutes les bases orthonormées directes.*

Définition 4. On associe alors à tout angle (u,v) l'unique $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ tel que $\varphi(u,v)$ soit représenté par la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. θ est appelé la *mesure* de l'angle (u,v).

Proposition 7. $SO(E) \approx \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, *i.e.* $SO_2(\mathbf{R}) \approx \mathbf{U}$. *Ainsi à tout angle orienté correspond bijectivement un élément de* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. *Pour tout* $z \in \mathbf{U}$, *l'argument de* z *correspond à l'angle* $(1,z)$.

1.3 Similitudes vectorielles

Cf Perrin.

2 Géométrie affine

2.1 Espaces affines

Définition 5. Soit k un corps. Un k-espace affine est un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une action de groupe libre et transitive d'un k-espace vectoriel. L'action est notée additivement. L'unique vecteur u vérifiant $A+u=B$ est noté $\overrightarrow{AB}$. [Tauvel]

Exemple. $\mathbf{R}^n$ est muni naturellement d'une structure d'espace affine.
Ex. TD Vinx ?

Proposition 8. *Relation de Chasles.*
Identité du parallélogramme.

Définition 6. Vectorialisé.

Définition 7. Sea.

Définition 8. Application affine [Aud]. Alors $\varphi(M) = \varphi(O) + f(\overrightarrow{OM})$.

Exemple. Application constante, identité, translation...

Proposition 9. *Effet sur les sous-espaces, les barycentres.*

Proposition 10 ([Aud p. 21]). *La composée de deux applications affines est affine.*
Une application affine est bijective ssi l'application linéaire associée l'est. Les bijections affines forment le groupe affine. Surjection sur $Gl(E)$ morphisme, noyau.

Proposition 11. *Conjugaison des translations.*

Théorème 5 (Thalès). *(Youhou !)*

Théorème 6 (Pappus). *(Youhou !)*

Proposition 12. *Carré dans le triangle, [Aud p. 69] ?*

2.2 Avec de l'euclidien

Définition 9. Espace affine euclidien.

Proposition 13. *La norme est une distance.*

Définition 10. Groupe des isométries.

Proposition 14. *Translations, réflexions orthogonales, rotations...*

Théorème 7. *Toute isométrie est produit d'au plus $n+1$ réflexions.*

Proposition 15. *Forme réduite.*

2.3 Cas de la dimension 2

Représentation par les nombres complexes, similitudes directes et indirectes.
Groupe des isométries d'un polygone régulier, groupe diédral, sous-groupes de O_2.
Parties dédoublebles de $\mathbf{R}^2$.

3 Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré

Définition du demi-plan, de l'action par homographie de PSl_2, action libre, domaine fondamental, engendrement par S et T.

4 Groupe fondamental

Homotopie, composition de chemins, définition du groupe fondamental, invariance par homéo, groupe fondamental du cercle, applications : $\mathbf{R}^2 \not\simeq \mathbf{R}$, Brouwer.

Références

Tauvel
Audin
Hatcher
Perrin