

146 - Résultant. Applications.

1 Introduction par l'élimination (titre à revoir, [RDO])

PGCD, Sylvester et dét, avec des exemples.

2 Définition et propriétés

On suppose A intègre commutatif.

2.1 Résultant de deux polynômes

Définition 1. Soient $P, Q \in A[X]$ de degrés resp. p et q , $P = \dots$, $Q = \dots$. On pose $\varphi : A_{q-1}[X] \times A_{p-1}[X] \rightarrow A_{p+q-1}[X]$, $U, V \mapsto UP + VQ$. La matrice représentative M de φ est la *matrice de Sylvester* de P et Q , de la forme (blabla), et son déterminant est appelé le *résultant* de P et Q , noté $R_X(P, Q)$.

Remarque. $Res_X(P, Q) \in \mathbf{Z}[a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q]$

Le plus souvent, A est un corps ou un anneau de polynômes.

2.2 Résultant d'ordre (p, q) [RDO]

Définition, polynôme homogène en les X et Y , exemples RDO.

2.3 Règles de calculs et propriétés générales

Proposition 1. *Premières règles. Saux Picart p. 143.*

Proposition 2. *Calcul par division euclidienne. Saux Picart p. 143.*

Remarque. Algo d'Euclide.

Proposition 3. $R(P, Q) = \prod(\alpha_i - \beta_j) \dots$ Par l'algo d'Euclide. Risler Boyer p. 109

Théorème 1. $R = 0 \iff$ sans facteur commun \iff premiers entre eux \iff pgcd=0 \iff pas de racine commune (dans le cas d'un corps). Plus précisément (Gozard) $rg(S) = p + q - d^\circ(P \wedge Q)$.

Théorème 2. *Si A factoriel, $R(P, Q = UP + VQ$ (démonstration inutilement dure, hypothèses nulles ?).*

Corollaire 1. *Dirichlet faible (Gozard).*

Proposition 4. *Élimination. (x_1, \dots, x_n) racine de P et $Q \iff (x_1, \dots, x_{n-1})$ racine de $R_{X_n}(P, Q)$.*

3 Discriminant

$A = k$.

Définition, exemples, propriétés [Gozard], séparabilité.

4 Applications

4.1 Éléments algébriques

$x + y, xy$ algébriques et un exemple.

4.2 Systèmes polynomiaux

Saux Picart.

Avec des équations implicites ?

4.3 Loi de réciprocité quadratique

Hindry.

4.4 Séparation de racines

Risler Boyer ?

Références

Risler Boyer

RDO1

Saux Picart

Gozard

Modern Computer Algebra