148 - Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1 Généralités sur les formes quadratiques ([Gou], [Per], [Aud])

1.1 Définition

Définition 1. Une *forme quadratique* sur E est une application $q : E \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur E vérifiant pour tout $x \in E$: $q(x) = \varphi(x,x)$. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Proposition 1. *Pour toute forme quadratique q, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ vérifiant $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$. Elle est obtenue par les formules de polarisation : $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$. φ est appelée la* forme polaire *de q.*

Exemple. La norme euclidienne $(x_1, \dots x_n) \mapsto \sum x_i^2$.

Remarque. Si on se donne une base, toute forme quadratique s'exprime comme un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées, et réciproquement.

Définition 2. Le *noyau* d'une forme quadratique est l'ensemble des $x \in E$ tels que la forme linéaire $\varphi(x,.)$ soit nulle. Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si son noyau est trivial.
Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $\varphi(x,y) = 0$. L'*orthogonal* du sous-ensemble F de E est $F^\perp = \{x \in E \mid \varphi(x,y) = 0 \, \forall y \in F\}$.

Remarque. On peut se ramener au cas non dégénéré en prenant un supplémentaire du noyau.

Proposition 2. *Si q est non dégénérée et F est un sev de E, on a $dim\, F + dim\, F^\perp = n$.*

Proposition 3. *L'ensemble $Q(E)$ est isomorphe à $S_n(\mathbf{R})$ via l'application $q \mapsto A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$ dépendant d'une base (e_i) de E. Si, dans cette base, x s'exprime en un vecteur colonne X, on aura $q(x) = {}^tXAX$.*

1.2 Classification, indice

Méthode de Gauss

C'est une démonstration effective par récurrence sur n de l'existence de bases orthogonales.
Soit q une forme quadratique en les n variables : $q(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$.
On veut exprimer q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

– Il existe i tel que $a_{i,i} \neq 0$. On peut supposer que c'est 1. Alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,1}x_1^2 + 2A(x_2, \dots, x_n)x_1 + B(x_2, \dots, x_n) \\ &= a_{1,1}\left(x_1 + \frac{A}{a_{1,1}}\right)^2 + \left(B - \frac{A^2}{a_{1,1}}\right) \end{aligned}$$

– Pour tout i, $a_{i,i} = 0$. On peut supposer $a_{1,2} \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{1,2}x_1x_2 + A(x_3, \dots, x_n)x_1 + B(x_3, \dots, x_n)x_2 + C(x_3, \dots, x_n) \\ &= \frac{a_{1,2}}{4}\left(\left(x_1 + x_2 + \frac{A+B}{a_{1,2}}\right)^2 - \left(x_1 - x_2 - \frac{A-B}{a_{1,2}}\right)^2\right) + \left(C - \frac{AB}{a_{1,2}}\right) \end{aligned}$$

Corollaire 1. *Il existe deux entiers $s \leq r$ et une base de E dans laquelle on a $q(x) = \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2$.*

Définition 3. Deux formes quadratiques q et q' sur E sont dites *équivalentes* s'il existe $u \in Gl(E)$ tel que $q \circ u = q'$.

Théorème 1 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *Le couple d'entiers $(s, r-s)$ est appelé la* signature *de q. Deux formes sur E sont équivalentes ssi elles ont même signature. s est la dimension maximale des espaces sur lesquels q est définie positive, et $r-s$ la dimension maximale des espaces sur lesquels q est définie négative.*

Exemple. La forme quadratique sur $M_n(\mathbf{R})$ qui à M associe $tr(M^2)$ est de signature $(n(n+1)/2, n(n-1)/2)$.

Définition 4. On appelle *indice* de q l'entier ν maximum des dimensions des sous-espaces totalement isotropes (sur lesquels la restriction de q est nulle). Si q est non dégénérée, alors $\nu \leq n/2$.

Théorème 2 ([Gou])**.** *Si q est de signature $(s, n-s)$, alors $\nu = \min(s, r-s)$. De plus, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux sont de dimension ν .*

Application. Dans $M_n(\mathbf{R})$, la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel formé de matrices nilpotentes est $n(n-1)/2$.

1.3 Formes positives, définies positives

Définition 5. Une forme quadratique q est dite *définie* si $q(x) = 0$ implique $x = 0$. Elle est dite *positive* si à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, et *négative* si à valeurs dans $\mathbf{R}_-$.

Remarque. Contrairement à la plupart des autres propriétés des formes quadratiques, le caractère défini positif est stable par restriction.

Proposition 4. *Toute forme quadratique définie est positive ou négative. Une forme quadratique est définie positive si sa signature est $(n, 0)$.*

Proposition 5 (Critère de Sylvester)**.** *Soit q une forme quadratique de matrice M. q est définie positive ssi les mineurs principaux de M sont tous strictements positifs.*

Définition 6. La forme polaire d'une forme quadratique définie positive est appelée un *produit scalaire*. L'espace E muni d'un produit scalaire est appelé un espace *euclidien*.

Théorème 3 (Cauchy-Schwarz)**.** *Si q est positive, $\forall (x,y) \in E^2$, $|\varphi(x,y)| \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$. Si de plus q est définie, il y a égalité ssi x et y sont proportionnels.*

Corollaire 2 (Minkowski)**.** *Si q est positive, $\forall (x,y) \in E^2$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. Ainsi si q est définie positive, $\sqrt{q}$ est une norme.*

Théorème 4 (Réduction)**.** *On se fixe un produit scalaire $\langle \mid \rangle$ sur E. Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormée de E (relativement à $\langle \mid \rangle$) orthogonale pour q.*

Application (Minkowski, le retour, [FGN p. 223]). Soit $A, B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Alors $(\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n} \leq (\det(A+B))^{1/n}$.

Application. L'application $\mu : S_n^{++} \to \mathbf{R},\ S \mapsto (\det S)^{-1/2}$ est strictement convexe.

Théorème 5. *Réduction des autoadjoints compacts.*

1.4 Groupe orthogonal

Définition 7. On appelle *groupe orthogonal* de E relatif à q, noté $O(q)$, l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant $q \circ f = q$.

Théorème 6. *Le centre de $O(q)$ est $Z = \{\pm Id\}$.*

Définition 8. Un endomorphisme u de E tel qu'il existe un hyperplan H et une droite D supplémentaires orthogonaux vérifiant $u_{|H} = Id$ et $u_{|D} = -Id$ est appelé une *réflexion*.

Théorème 7. *Tout élément $u \in O(q)$ est produit d'au plus n réflexions.*

Application ([Per p. 198]). Si $u \in O(q)$ vérifie $\det u = -1$, alors u admet une valeur propre égale à ± 1.

Théorème 8. *Soit G un sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbf{R})$. Alors il existe une forme quadratique q^G découlant d'un proquit scalaire telle que G soit un sous-groupe de $O(q^G)$.*

Conjugaisons et commutateurs, *SO* ?

2 Applications

2.1 Coniques et quadriques ([Aud], Rosso)

On considère un espace affine X de direction E

Définition 9. On appelle *quadrique affine* tout élément de l'espace projectif $\mathbf{P}(P_2(V))$, avec $P_2(V)$ l'ensemble des formes quadratiques affines sur V, i.e. l'ensemble des polynômes de degré 2 en les coordonnées dans un repère donné. L'*image* de la quadrique q est l'ensemble $q^{-1}(0)$.

Le but est de classifier les quadriques affines sous l'action du groupe affine $GA(X)$ (qui agit par changement de repère).
On peut homogénéiser l'équation $q(x) = \sum a_{i,j} x_i x_j + \sum b_i x_i + c$ en $\tilde{q}(x,t) = \sum a_{i,j} x_i x_j + t \sum b_i x_i + t^2 c$.

Définition 10. La quadrique q est dite *propre* si $\tilde{q}$ est non dégénérée.

Proposition 6. *Les classes d'équivalence des quadriques affines sous $GA(X)$ sont de trois types :*

- $I_{r,s} : \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2$ *avec* $r \geq s$, $1 \leq r+s \leq n$
- $II_{r,s} : \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 1$ *avec* $1 \leq r+s \leq n$
- $III_{r,s} : \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 2x_n$ *avec* $r \geq s$ *et* $1 \leq r+s \leq n-1$

En dimension 2 : les coniques

Les classes d'équivalence des coniques propres donnent comme image : $II_{2,0}$: ensemble vide ; $II_{1,1}$: hyperbole ; $II_{0,2}$: ellipse ; $III_{1,0}$: parabole.

En dimension 3

Les classes d'équivalence des quadriques propres d'image non vide donnent : $II_{2,1}$: hyperboloïde à deux nappes ; $II_{1,2}$: hyperboloïde à une nappe ; $II_{0,3}$: ellipsoïde ; $III_{2,0}$: paraboloïde elliptique ; $III_{1,1}$: paraboloïde hyperbloique.

2.2 Problèmes d'extrémums ([Gou], [Rou], [Vinx])

On se donne une fonction $f : \Omega \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ et $a \in \Omega$.

Définition 11. La différentielle seconde de f en a est une forme bilinéaire ; sa matrice représentative est appelée *hessienne* de f en a et notée $Hf(a)$.

Théorème 9 (Schwarz)**.** *$d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique, autrement dit $Hf(a)$ est symétrique.*

Théorème 10. *On note (s,t) la signature de $Hf(a)$. Alors :*
- *Si f admet un minimum local en a, alors $df(a) = 0$ et $Hf(a)$ est positive*
- *Si f admet un maximum local en a, alors $df(a) = 0$ et $Hf(a)$ est négative*

Si de plus on suppose $df(a) = 0$:
- *Si $Hf(a)$ est définie positive ($(s,t) = (2,0)$), alors f admet un minimum local strict en a*
- *Si $Hf(a)$ est définie négative ($(s,t) = (0,2)$), alors f admet un maximum local strict en a*
- *Si $(s,t) = (1,1)$, f n'est pas extrémale en a.*

Exemple. La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ possède un point critique en $(0,0)$; sa hessienne en 0 est positive (mais pas définie positive) bien que f n'admette pas de minimum en $(0,0)$.
La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2e^x + xy - \cos y$ possède un minimum local strict en 0.

Application (Principe du maximum, [Gou]). On note D le disque unité de $\mathbf{R}^n$ et suppose que $\overline{D} \subset \Omega$. Si $\Delta f = 0$ sur D (f harmonique), alors pour tout $x \in D$, $\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$.

Proposition 7. *f est convexe ssi sa hessienne est positive en tout point.*

Application (Régression linéaire, [Rou p. 384]). Étant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbf{R}^2$, avec les x_i non tous égaux, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ uniques tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimale.

Théorème 11 (Morse, [Rou])**.** *On suppose que f est de classe C^3 et que $0 \in \Omega$. Si $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ C^1 entre deux voisinages de l'origine de $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et que $f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \cdots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) + \cdots - \varphi_n^2(x)$.*

2.3 Étude des surfaces ([Rou], [Aud], [LFA])

Soit Σ une surface de $\mathbf{R}^3$ de classe C^3 et $p \in \Sigma$.

Proposition 8. *On suppose que Σ est définie par un paramétrage cartésien $z = f(x,y)$ où $f : U \to \mathbf{R}$, avec U ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $a \in U$ d'image p. Alors :*
- *Si $Hf(a)$ est définie, alors la surface Σ reste (localement) du même côté du plan tangent en p. p est dit* elliptique.
- *Si $Hf(a)$ est non dégénérée mais pas de signe constant, il existe des points de Σ arbitrairement proches de p de chaque côté du plan tangent. p est dit* hyperbolique.

Exemple. Les exemples les plus classiques de cela sont bien sûr les hyperboloïdes et les ellipsoïdes.

Définition 12. La restriction du produit scalaire euclidien à $T_p\Sigma$ est appelé *première forme quadratique fondamentale* en p, et notée I_p.

Proposition 9. *Si Σ est donnée par une paramétrisation $f : U \to \mathbf{R}^3$, on pose $E = \|\frac{\partial f}{\partial u}(a)\|^2$, $F = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a) \rangle$, et $G = \|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\|^2$. Si un vecteur $v \in T_p\sigma$ s'écrit $v = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(a) + \mu \frac{\partial f}{\partial v}(a)$, alors $I_p(v,v) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$.*

Proposition 10. *Si Σ est donnée par une paramétrisation $f : U \to \mathbf{R}^3$ et Γ est l'image de l'arc plan γ défini par la paramétrisation $[a,b] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (u(t), v(t))$, alors la longueur de Γ est*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt$$

Définition 13. On munit localement Σ d'une orientation. L'application qui à p associe le vecteur normal orienté à Σ en p est appelée *application de Gauss* et notée $n(p)$. Sa différentielle est appelée *endomorphisme de Weingarten.*

Définition 14. La *seconde forme fondamentale* de Σ en p est la forme bilinéaire sur $T_p\Sigma$ telle que $II_p(X,Y) = -\langle d_p n(X), Y\rangle$.

Proposition 11. *Soit γ une courbe paramétrée par longueur d'arc tracée sur Σ telle que $\gamma(0) = p$. Alors $\langle \gamma''(0), n(p)\rangle = II_p(\gamma'(0), \gamma'(0))$.*

Proposition 12. *La forme bilinéaire II_p est symétrique.*

Définition 15. On appelle *courbure de Gauss* en p et note $K(p)$ le produit du maximum et du minimum de $X \mapsto II_p(X,X)/I_p(X)$ sur l'ensemble des vecteurs non nuls de $T_p\Sigma$.

Exemple. La courbure de Gauss d'une sphère est positive en tout point, celle d'un plan ou d'un cylindre est identiquement nulle, celle du paraboloïde hyperbolique est négative en tout point.

Proposition 13. *Le point p est elliptique ssi $K(p) > 0$ et hyperbolique ssi $K(p) < 0$.*

Définition 16. Deux nappes Σ et Σ' paramétrèes par resp. f et g sont dites *isométriques* si $\forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^2$, $m \in U$, $\langle df_m(\xi), df_m(\eta)\rangle = \langle dg_m(\xi), dg_m(\eta)\rangle$.

Théorème 12 (*theorema egregium* de Gauss)**.** *Si deux nappes de classe C^3 sont isométriques, alors elles ont même courbure de Gauss.*

Références

[Ale] M. Alessandri, *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.*

[Aud] M. Audin, *Géométrie.*

[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 3.*

[Gou] X. Gourdon, *Les maths en tête.*

[LFA] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Cours de mathématiques, tome 3 : géométrie et cinématique.*

[MT] R. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.*

[Per] D. Perrin, *Cours d'algèbre.*

[Rou] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.*

[Vinx] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif agrégation.*

Développements

- Sous groupes compacts de $Gl_n(\mathbf{R})$, ellipsoïde de John-Loewner ([Ale]) +106, 119 ?, 123 ?, 130, 131, 133, 136 ?, 137 ?, 141, 219, 229
- Diagonalisation simultanée et une application (?)
- Classification des coniques euclidiennes ([Aud]) + 135 ?, 136
- Lemme de Morse ([Rou]) +214, 215, 217
- Décomposition du groupe $O(p,q)$ ([MT]) +106, 119 ?, 131
- Critère de Sylvester ([Gou]) + 123, 130, 133