201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

1 Théorèmes généraux sur les espaces complets et de Banach

Théorème 1 (Picard)**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors f possède un unique point fixe a et pour tout $x_0 \in E$, la suite $f^n(x_0)$ converge vers a ; la vitesse de convergence vérifie alors $d(a, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.*

Théorème 2 (Prolongement uniformément continu, [Ska p. 115])**.** *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Soit A une partie dense de E et supposons F complet. Soit $f : A \to F$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique fonction $g : E \to F$ uniformément continue telle que $g_{|A} = f$.*

Théorème 3 (Baire, [Ska p. 115])**.** *Soit (E, d) un espace métrique complet et $(\Omega_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses dans E, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \Omega_n$ est un G_δ dense dans E.*

2 Espaces de fonctions continues ou dérivables

2.1 Espaces de fonctions linéaires continues

Proposition 1. *Toutes linéaires continues en dimension finie.*

Proposition 2 ([Ska p. 172])**.** *Si E evn et F Banach, alors $L_c(E, F)$ est un Banach pour la norme d'application linéaire.*

Exemple. Dimension finie (tout continu), dual topologique.

Théorème 4 (Application ouverte, [Ska p. 218])**.** *Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach, alors T est ouverte.*

Corollaire 1 (Isomorphisme de Banach)**.** *Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach, alors T^{-1} est continue.*

Théorème 5 (Graphe fermé). *Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces de Banach, alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé.*

Application. Critère de continuité Skandalis.

Théorème 6 (Banach-Steinhaus, [Ska p. 221]). *Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues entre deux espaces de Banach E et F. Ou bien*

$$\sup_{i\in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

ou bien

$$\sup_{i\in I} ||T_i x|| = \infty$$

pour tout x dans un G_δ dense de E.

Coro du lemme de Baire

Application. $L_c(E, F)$ est fermé pour la cv simple.

Application ([Gou]). Une application bilinéaire séparément continue est continue.

2.2 Espaces de fonctions continues

Théorème 7 ([Ska p. 144, ZQ]). *Si X est un ensemble non vide et Y est complet, alors $C^0(X, Y)$ est un Banach pour la topologie de la cvu. Si X est paracompact et Y est complet, alors $C^0(X, Y)$ est complet pour la topologie de la cvu sur tout compact.*

Remarque. Une limite simple de fonctions continues n'est pas forcément continue ($x \mapsto x^n$).

Proposition 3 ([ZQ]). *Densité des points de continuité d'une limite simple de fonctions.*

Corollaire 2 ([Rudin]). *Lusin.*

Théorème 8 (Ascoli, [Ska p. 148]). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$\mathcal{A}$ est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme.*
- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X et pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans Y.*

Corollaire 3 (Ascoli-Peano-Arzela). *Considérons l'équation différentielle (E) : $y' = f(t, y)$, où $f : U \to \mathbf{R}^n$, avec U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Choisissons $(t_0, y_0) \in U$ une condition initiale et des réels $r_0 > 0$, $T > 0$ tels que $C \doteq [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0) \subset U$ et que $T \sup_{(t,y)\in C} \|f(t, y)\| < r_0$. Alors il existe une solution de (E) (pas forcément unique)avec condition initiale (t_0, y_0) définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Théorème 9 (Dini, [SKA p. 144])**.** *Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $C^0(K, \mathbf{R})$. On suppose que la suite (f_n) est croissante et converge simplement vers une fonction f elle-même continue. Alors la convergence de la suite (f_n) est uniforme.*

Exemple. La suite de fonctions polynomiales (P_n) définie sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{x-P_n^2}{2}$ cvu vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Théorème 10 (Stone-Weierstrass, [Choquet])**.** *Soit K un espace métrique compact ayant au moins deux éléments distincts et S une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Banach de $C^0(K, \mathbf{R})$. Alors S est dense si et seulement si S sépare les points.*

Corollaire 4. – *Théorème de Weierstrass : densité des polynômes à coefficients réels.*
- *Théorème de Féjer (ou de Weierstrass trigonométrique) : densité des polynômes trigonométriques.*
- *Densité des fonctions lipschitz [Hirsch-Lacombe].*
- *Densité des TF de fonctions L^1 [ZQ].*
- *Séparabilité de $C(X, \mathbf{R})$ via Tietze-Urisohn [Queffélec].*

Exemple. Le groupe des homéomorphismes d'un espace compact dans lui-même est un groupe topologique pour la convergence uniforme.

2.3 Espaces de fonctions dérivables

Définition 1 ([ZQ])**.** Fonctions C^k, C^∞, topologie.

Théorème 11. *Complétude.*

Passage à la limite uniforme.

Exemple. Toute SE est C^∞ sur son disque ouvert de cv.

Application. Dérivée exponentielle.

Théorème 12 (Montel)**.** *[ZQ].*

Proposition 4. *Non normabilité.*

Proposition 5. *Théorèmes de non densité / de densité...*

2.4 Espaces de fonctions holomorphes et analytiques

Théorème 13. *Holomorphe ssi analytique.*

Formule de Cauchy.

Définition 2 ([Vinx])**.** Convergence des suites.

Théorème 14 (Weierstrass)**.** *Stabilité par passage à la limite.*

Théorème 15 (Familles normales)**.**

Théorème 16 (Représentation conforme ?)**.**

Proposition 6. *La topologie de la convergence sur tout compact n'est pas normable (Riesz + familles normales).*

3 Espaces L^p [Bre]

3.1 Propriétés topologiques

Hölder, Minkowski, Riesz-Fisher, Séparabilité !

3.2 Convolution et régularisation

Théorèmes de densité
RFK

3.3 Le cas $p = 2$: propriétés hilbertiennes

TF, SF.
Müntz, coro cas continu.

Références

Skandalis
Zuily-Queffélec
Gourdon
Chambert-Loir
Brézis
Rudin
Vinx