# 202 - Exemples de parties denses et applications

## 1 Généralités et premiers exemples

### 1.1 Parties denses

On fixe un espace métrique $(X, d)$.

**Définition 1.** Soit $D \subset X$. On dit que $D$ est *dense* dans $X$ si $\overline{D} = X$.

*Exemple.* $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.

**Définition 2.** L'espace $X$ est dit *séparable* s'il existe une suite dense dénombrable dans $X$.

*Exemple.*
- $\mathbf{R}$ est séparable, plus généralement tout $\mathbf{R}$-ev de dim finie l'est.
- $\mathbf{R}[X]$ est séparable pour la topo produit.
- Tout compact métrique est séparable.

**Proposition 1.** *Un sous-espace d'un espace métrique séparable est séparable (par les bases d'ouverts).*

### 1.2 Exemples

- $\overline{Gl_n(\mathbf{R})} = M_n(\mathbf{R})$.
- L'ensemble des matrices diagonalisables à coefficients complexes est dense dans $M_n(\mathbf{C})$. Par contre, l'adhérence des matrices diagonalisables à coefficients réels est l'ensemble des matrices trigonalisables.

*Application.* $det : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ est différentiable et on a : $d\,det_M(H) = tr({}^t com(M)H)$.
$\det \circ \exp = \exp \circ tr$.

*Exemple.* Les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ sont :
- les sous-groupes denses de $\mathbf{R}$ ou
- les groupes monogènes du type $x\mathbf{Z}$, avec $x \in \mathbf{R}$.

*Exemple.* Le sous-ensemble de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ $\{n\alpha \mid n \in \mathbf{Z}\}$ est dense ssi $\alpha \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{Q}$.

**Définition 3.** Une suite $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est dite *équirapartie modulo 1* si $\forall a < b \in [0,1]$, $\frac{1}{n}\sharp\{k \in [|0, n-1|] \mid u_n - [u_n] \in [a,b]\} \to b - a$. Une suite équirépartie est à fortiori dense.

**Théorème 1** (Critère de Weyl, [FGN]). *Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Elle est équirapartie modulo 1 sssi* $\forall \lambda \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi u_k \lambda} \to 0$.

*Application.* La suite $(n\alpha)$ est équirépartie pour tout $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

### 1.3 Lemme de Baire [Ska]

**Théorème 2** (Baire). *Soit $(X,d)$ un espace métrique complet. Alors une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $X$ (appelée $G_\delta$) est dense dans $X$.*

*Exemple.* $\mathbf{Q}$ est dense mais n'est pas un $G_\delta$ dense de $\mathbf{R}$.

*Application.*
- Soit $X$ un espace métrique complet et $Y$ un espace métrique. Alors l'ensemble des points de continuité d'une limite simple de fonctions de $X$ dans $Y$ est un $G_\delta$ dense. Ainsi, l'ensemble des points de continuité de la dérivée d'une fonction dérivable est un $G_\delta$ dense.
- Un Banach ne possède pas de base algébrique dénombrable.

**Théorème 3** (Sunyer y Balaguer, [Gou]). *Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tq $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N} : f^{(n)}(x) = 0$. Alors $f$ est un polynôme.*

**Définition 4.** Soit $X$ un espace métrique compact et $f : X \to X$ continue. On dit que $f$ est *transitive* si $\forall x, y \in X, \varepsilon > 0$, $\exists z \in X, n \in \mathbf{N} : d(x,z) < \varepsilon, d(y, f^n(z)) < \varepsilon$.

**Proposition 2.** *L'ensemble des points $x \in X$ dont l'orbite par $f$ transitive est dense est un $G_\delta$-dense.*

*Application.* Soit $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 2x$ si $x \leq 1/2, 4 - 2x$ si $X \geq 1/2$. Alors $f$ est transitive, et l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense.

## 2 Dualité

Soit $E$ un $R$-ev de Banach et $E'$ son dual.

**Définition 5.** Soit $D$ un sev de $E$. On note $D^\perp = \{f \in E' \mid f(x) = 0 \forall x \in D\}$.

**Théorème 4** (Hahn-Banach). *Soient $A, B \subset E$ deux cvx tq $A$ soit fermé et $B$ compact. Alors il existe un hyperplan séparant $A$ et $B$ au sens strict.*

**Corollaire 1.** *$D$ est dense dans $E$ ssi $D^\perp = \{0\}$.*

# 3 Espaces de Banach

## 3.1 Généralités

**Théorème 5.** *Soient $X$ un espace métrique et $Y$ un Banach, et $D$ une partie dense de $X$. Soit $f : D \to X$ une fonction uniformément continue. Alors $f$ admet un unique prolongement continu sur $X$, qui de plus est uniformément continu.*

*Application* (Plancherel). Transformée de Fourier $L^2$. Posons $\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}) \mid \forall p, q \in \mathbf{N}, f^{(p)}(x)x^q \to_{|x|\to\infty} 0\}$ l'espace de Schwarz. Alors $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$ est $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2$. De plus $f \to \hat{f}$ est une isométrie de $\mathcal{S}$, donc se prolonge continuement sur $L^2$ en une unique isométrie.

**Théorème 6** (Application ouverte)**.**

**Corollaire 2** (Isomorphisme de Banach)**.**

**Corollaire 3.** *Injective et d'image fermée implique coercive.*

## 3.2 Hilberts

*Remarque.* Puisque tout espace de Hilbert s'identifie canoniquement à son dual via le théorème de Riesz, un sev $D$ est dense ssi $D^\perp = \{0\}$ pour le produit scalaire.

**Définition 6.** On dit que $(e_n)_n \in \mathcal{H}^{\mathbf{N}}$ est une *base hilbertienne* si $\forall i, j$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ et $vect(e_i)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

**Théorème 7.** *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$. Pour $x \in \mathcal{H}$ on pose $x_n = \langle x, e_n \rangle$. Alors $x = \lim_N \sum_{n=0}^N x_n e_n$ et $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$ (Parseval).*
*De plus si on se donne $(x_n)_n \in \ell^2$, alors $\sum x_n e_n$ converge et $x = \sum x_n e_n$ vérifie $\langle x, e_n \rangle = x_n \, \forall n \in \mathbf{N}$.*

*Exemple.* La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, avec $e_n(x) = e^{2i\pi nx}$, est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

**Définition 7.** Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite *compacte* si l'image de la boule unité par $T$ est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte).

**Théorème 8.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T$ un endomorphisme de $\mathcal{H}$ autoadjoint compact. Alors il existe une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de $T$, autrement dit $\mathcal{H}$ est la somme hilbertienne des sous-espaces propres.*

## 4 Densité dans les espaces de fonctions continues

**Proposition 3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$*
- *Les fonctions en escalier sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $I$,*
- *Les fonctions affines par morceaux sont denses dans l'ensemble des fonctions continues sur $I$.*

*Application.*
- Si $I$ est compact, alors $C^0(I, \mathbf{R})$ est séparable.
- Définition de l'intégrale de Riemann sur un segment. et méthodes d'intégration numérique (point-milieu, trapèzes).

**Définition 8.** Soit $(K, d)$ un espace métrique compact.
- Une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ est appelée un *treillis* si $\forall f, g \in S,\ \max(f, g)$, $\min(f, g) \in S$.
- On dit qu'une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ *sépare les points* si $\forall x, y \in K$, $x \neq y$, $\exists f \in S : f(x) \neq f(y)$.

**Théorème 9** (Stone-Weierstrass)**.** *Soit $K$ un espace métrique compact ayant au moins deux éléments distincts et $S$ une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Banach de $C^0(K, \mathbf{R})$. Alors $S$ est dense si et seulement si $S$ sépare les points.*

**Corollaire 4.** – *Théorème de Weierstrass : densité des polynômes à coefficients réels.*
- *Théorème de Féjer (ou de Weierstrass trigonométrique) : densité des polynômes trigonométriques.*
- *Densité des fonctions lipschitz [Hirsch-Lacombe].*
- *Densité des TF de fonctions $L^1$ [ZQ].*
- *Séparabilité de $C(X, \mathbf{R})$ via Tietze-Urisohn [Queffélec].*

*Application* (Moments). Soit $f : [a; b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(t) t^n dt = 0$, alors $f = 0$.

**Théorème 10** (Müntz)**.**

**Proposition 4.** *Fonctions nulle part dérivables forment un $G_\delta$ dense.*

## 5 Densité dans les espaces de fonctions intégrables

On fixe $n \geq 1$ et $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert. On prendra toujours la tribu des mesurables et la mesure de Lebesgue.

### Résultats de base [Briane ?]

**Proposition 5.** *L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty]$.*

**Corollaire 5.** *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $p \in [1, +\infty[$.*

*Remarque.* Le résultat est faux pour pour $p = +\infty$ : les fonctions $1_{\tilde{E}}$, avec $\tilde{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid [x] \in E\}$ et $E \in P(\mathbf{N})$, forment un ensemble non dénombrable de fonctions à distance au moins 1 les unes des autres.

*Application* (Lemme de Riemann-Lebesgue)*.* Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Alors $\hat{f}(\xi) \to_{|\xi| \to \infty} 0$.

**Théorème 11.** *Si $p \in [1, +\infty[$, alors l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$.*

*Remarque.* Le résultat est faux pour pour $p = +\infty$ : la fonction $1_{[0,1]}$ n'est pas limite de fonctions à supports compacts.

*Application* (Continuité de la translation)*.* Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors $\forall f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $\|f - \tau_h f\|_p \to_{h \to 0} 0$, avec $\tau_h(f)(x) = f(x + h)$.

**Théorème 12** (Lusin, [Rud])**.**

### Régularisation

**Définition 9.** Une *suite régularisante* $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de $C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\rho_k \geq 0$ p.p, *Supp*$(\rho_k) \subset B(0, 1/k)$ et $\int_{\mathbf{R}^n} \rho_k = 1$.

**Proposition 6.** *Une telle suite existe bien pour tout $n$ : il suffit de considérer la fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto exp(1/(x+1)^2 + 1/(x-1)^2$ sur $[-1, 1]$, 0 ailleurs ; de la normaliser en $\tilde{f}$ et de considérer $\rho_k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 1/k^n f(k\|x\|)$.*

**Théorème 13.** *Soit $(\rho_k)_k$ une suite régularisante.*
- *Si $f \in C^0(\mathbf{R}^n)$, alors $\rho_k * f \to f$ uniformément sur tout compact.*
- *Si $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, alors $\rho_k * f \to f$ en norme $p$.*

**Corollaire 6.** *$C_c^\infty$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$.*

**app ?**

**Théorème 14** (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $\omega$ un ouvert relativement compact tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F}, \forall \|h\| < \delta, \ \|f(. + h) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

*Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.*