203 - Utilisation de la notion de compacité

1 Généralités

Définition 1. Un espace topologique K est dit *compact* s'il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue i.e. pour tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Une partie d'un espace topologique est dite compacte si elle l'est pour la topologie trace.

Exemple. Les ensembles finis munis de la topologie discrète, les ensembles formés des valeurs d'une suite convergente et de sa limite...

Proposition 1. – *Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.*
– *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

Théorème 1 (Tychonov)**.** *Tout produit d'espaces compacts, muni de la topologie produit, est compact.*

Théorème 2. *Soit (X, d) un espace métrique. Il est compact si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass i.e. si de toute suite de X on peut extraire une sous-suite convergente.*

Lemme 1. *Toute intersection décroissante de compacts non vides est non vide.*

Lemme 2 (Lebesgue)**.** Soit(K, d) un espace métrique possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass. Alors pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_i$ de K, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que toute boule de K de rayon λ soit incluse dans au moins un des O_i.

Définition 2. *Un espace métrique (K, d) est dit* précompact *si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie de points de K $(x_1, \dots, x_n)$ tels que les boules de centres x_i et de rayon ε recouvrent K.*

Proposition 2. *Un espace métrique possède la propriété de Bolzano-Weirstrass si et seulement si il est précompact et complet.*

Proposition 3. – *Un espace métrique compact est borné.*
– *Un espace métrique compact est complet.*

Théorème 3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Les segments de* $\mathbf{R}$ *sont compacts.*

Proposition 4. *Les parties compactes de tout* $\mathbf{R}$ *(ou* $\mathbf{C}$*)-espace vectoriel de dimension finie sont exactement les fermés bornés.*

Exemple. Critère de densité des sous-groupes monogènes du groupe des complexes de module 1.

Théorème 4 (Riesz). *Un $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$)-espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.*

Définition 3. Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite *compacte* si l'image de la boule unité par T est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte).

Exemple. Opérateurs à noyaux, compacts par Ascoli, [Hirsch-lacombe].

Proposition 5 ([Gou]). *Les espaces propres associés aux valeurs propres non nulles d'un opérateur compact sont de dimension finie.*

Théorème 5. *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert et $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur continu autoadjoint compact. Alors $\mathcal{H}$ est la somme hilbertienne des sep de T.*

2 Compacité et continuité

Proposition 6. *L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.*

Remarque. En particulier, une fonction d'un compact à valeurs dans $\mathbf{R}$ (ou tout espace métrique) est bornée et atteint ses bornes. On en déduit des démonstrations du théorème de d'Alembert-Gauss, de l'équivalence des normes sur les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie...

Application. Un théorème de point fixe : une application continue $f : K \to K$, avec K compact métrisable telle que pour tout couple de points distincts (x, y) de K, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, admet un unique point fixe a. De plus, pour tout $x_0 \in K$ la suite $(f^n(x_0))_n$ converge vers a.

Application. Application au sinus.

Proposition 7. *Soit $f : K \to X$ une application continue entre deux espaces topologiques K et X, avec K compact et X séparé. Si f est bijective, alors f est un homéomorphisme.*

Exemple. Il n'existe pas d'application continue injective du cercle $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$.

Théorème 6 (Heine). *Soient K et X deux espaces métriques, et $f : K \to X$ une application continue. Si K est compact, alors f est uniformément continue.*

Exemple. Le groupe des homéomorphismes d'un espace compact dans lui-même est un groupe topologique pour la convergence uniforme.

Théorème 7 (Dini)**.** *Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $C^0(K, \mathbf{R})$. On suppose que la suite (f_n) est croissante et converge simplement vers une fonction f elle-même continue. Alors la convergence de la suite (f_n) est uniforme.*

Exemple. La suite de fonctions polynomiales (P_n) définie sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{x-P_n^2}{2}$ cvu vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Définition 4. Soit (K, d) un espace métrique compact.
– Une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ est appelée un *treillis* si $\forall f, g \in S,\ \max(f, g)$, $\min(f, g) \in S$.
– On dit qu'une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ *sépare les points* si $\forall x, y \in K$, $x \neq y$, $\exists f \in S : f(x) \neq f(y)$.

Théorème 8 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit K un espace métrique compact ayant au moins deux éléments distincts et S une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Banach de $C^0(K, \mathbf{R})$. Alors S est dense si et seulement si S sépare les points.*

Corollaire 1. – *Théorème de Weierstrass : densité des polynômes à coefficients réels.*
– *Théorème de Féjer (ou de Weierstrass trigonométrique) : densité des polynômes trigonométriques.*
– *Densité des TF [ZQ p. 536].*
– *Séparabilité de $C(X, \mathbf{R})$ (par le lemme d'Urisohn).*

Exemple. Soit $f \in C^0([0,1], \mathbf{R})$ vérifiant $\int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Alors $f = 0$.

Théorème 9 (Banach-Alaoglu-Bourbaki, [Gou] (Hilbert), [ZQ] (métrique), [Bre] (général))**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Alors la boule unité de son dual topologique est compacte pour la topologie faible-* (celle pour laquelle $f_n \rightharpoonup f$ ssi $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in E$).*

Corollaire 2 (Krylov-Bogolubov, [Z-Q])**.** *Soit K un espace métrique compact et $f : K \to K$ une application continue. Alors il existe une mesure de probabilité borélienne μ invariante par f i.e. $\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$ pour tout borélien A.*

Théorème 10 (Lemme d'Urysohn, [Queffélec])**.** *Soit X un espace compact, et A et B deux fermés de X disjoints. Alors il existe une fonction $f : X \to [0,1]$ continue valant 0 sur A et 1 sur B.*

Théorème 11 (Tietze-Urysohn)**.** *Soit X un espace compact, A un fermé de X et $f : A \to [0,1]$ une fonction continue. Alors f se prolonge sur X en une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$.*

Application. On a alors existence de partitions de l'unité : soit K un espace compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de X. Alors il existe des fonctions $\varphi_i : X \to [0,1]$ continues tq $supp(\varphi_i) \subset U_i$ et $\sum_i \varphi_i = 1$ sur K.

Application. Une intersection décroissante de compacts connexes non vides est un compact connexe non vide.

3 Théorème d'Ascoli et applications

On fixe X un espace compact, (Y, d) un espace métrique, et une famille $\mathcal{A} \subset C^0(X, Y)$.

Définition 5. $\mathcal{A}$ est dite *équicontinue* en $x \in X$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_x : \forall f \in \mathcal{A}, y \in V \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Théorème 12 (Ascoli)**.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$\mathcal{A}$ est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme.*
- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X et pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans Y.*

Théorème 13 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et ω un ouvert relativement compact tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F}, \forall \|h\| < \delta, \ \|f(.+h) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Théorème 14 (Ascoli-Peano-Arzela)**.** *Considérons l'équation différentielle (E) : $y' = f(t, y)$, où $f : U \to \mathbf{R}^n$, avec U un ouvert de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Choisissons $(t_0, y_0) \in U$ une condition initiale et des réels $r_0 > 0$, $T > 0$ tels que $C \doteq [t_0 - T, t_0 + T] \times B(y_0, r_0) \subset U$ et que $T \sup_{(t,y) \in C} \|f(t, y)\| < r_0$. Alors il existe une solution de (E) (pas forcément unique)avec condition initiale (t_0, y_0) définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.*

Théorème 15 (Familles normales de Montel)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{H}(\Omega)$, bornée sur tout compact de Ω. Alors $\mathcal{F}$ est normale, i.e. toute suite de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite convergeant sur tout compact de Ω.*

4 Compacité et convexité

Théorème 16 (Carathéodory)**.** *Dans un espace vectoriel réel de dimension finie n, l'enveloppe convexe de tout ensemble A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $n+1$ points de A.*

Corollaire 3. *Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

Proposition 8. *Dans un Banach, l'enveloppe convexe d'un compact est relativement compacte.*

contre-ex ?

Définition 6. Soit E un espace vectoriel normé, et $X, Y \subset E$. On dit qu'un hyperplan H de E, d'équation $f = \alpha$ (avec f forme linéaire) sépare X et Y au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) < \alpha - \varepsilon \; \forall x \in X$ et $f(y) > \alpha + \varepsilon \; \forall y \in Y$.

Théorème 17 (Hahn-Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Soient $K, F \subset E$ deux ensembles non vides convexes et disjoints, tels que K soit compact et que F soit fermé. Alors il existe un hyperplan fermé de E qui sépare K et F au sens strict.*

Corollaire 4 (Minkowski)**.** *Toute partie convexe fermée d'un espace vectoriel normé réel est l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.*

Théorème 18 (Brouwer)**.** *Soit K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : K \to K$ admet au moins un point fixe.*

Exemple. Une matrice réelle dont tous les éléments sont positifs a au moins une valeur propre positive.

Application (Rou)*.* Champ rentrant.

Ce théorème possède une généralisation en dimension infinie :

Théorème 19 (Schauder)**.** *Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et C un fermé borné convexe de E. Si f est une fonction continue de C dans C telle que $f(C)$ soit relativement compact, alors f admet au moins un point fixe.*

Théorème 20 (Leray-Schauder)**.** *Soit E un Banach et $f : E \to E$ une application continue compacte telle qu'il existe $C > 0$ tq $\forall (\lambda, x) \in [0,1] \times E,\ \lambda f(x) = x \implies \|x\| \leq C$. Alors f possède un point fixe.*

Application (G-T)*.* Ascoli-Peano-Arzela.

Développements

- Ascoli (Skandalis) +201
- Riesz-Fréchet-Kolmogorov (Brézis) +201, 234
- Stone-Weierstrass (Choquet) +201, 202
- Diagonalisation des opérateurs compacts autoadjoints (Brézis, Gonord-Tosel, Zuily-Queffélec) +201, 208, 213
- Brouwer (Rouvière dim. 2, Lafontaine, Hatcher, Gonord-tosel) +206 et autres selon méthode de démo.