204 - Connexité. Exemples et applications.

1 Définitions, propriétés

Soit E un espace topologique.

1.1 Connexité et parties connexes

Proposition 1. *Lpsse :*

(i) E n'admet pas de partition formée de deux ouverts.

(ii) E n'admet pas de partition formée de deux fermés.

(iii) Les seuls ouverts-fermés de E sont E et $\emptyset$.

(iv) Toute application continue de E dans $\{0,1\}$ est constante.

Définition 1. Si E vérifie l'une de ces hypothèses, on dit qu'il est *connexe*. Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit connexe s'il l'est pour la topologie induite.

Exemple. Tout esp. topo. grossier est connexe. Un esp. muni de la topo discrète est connexe ssi il est de cardinal au plus 1.

Proposition 2. *Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont exactement les intervalles.*

Proposition 3. *Soit $A \subset E$ connexe. Si $B \subset E$ vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier $\overline{A}$ est connexe.*

Proposition 4 (Passage des douanes)**.** *Soient $A, B \subset E$ tq A soit connexe. Si A rencontre $\mathring{B}$ et $\mathring{B^{\complement}}$, alors A rencontre ∂B.*

Exemple. Une intersection décroissante de compacts connexes est connexe.

Exemple. Soit (X, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est connexe.

Proposition 5. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E.*
– *Si $\forall i, j,\ A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*
– *Si $I = \mathbf{N}$, et si $\forall i,\ A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Exemple. Tout ensemble étoilé de $\mathbf{R}^n$ est connexe.

1.2 Connexité et continuité

Soit F un espace topologique et $f : E \to F$ continue.

Proposition 6. *Si E est connexe, alors $f(E)$ l'est aussi.*

Remarque. La connexité est une propriété topologique (i.e. invariante par homéomorphisme).

Exemple. $\mathbf{R}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^2$, et $\mathbf{S}^1$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}$.

1.3 Composantes connexes

Définition 2. $a, b \in E$ sont dits *connectés* s'il existe $A \subset E$ contenant a et b tel que A soit connexe.

Proposition 7. *La relation "a connecté à b" est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées* composantes connexes.

Proposition 8. *Soit $a \subset E$. La composante connexe de a est la plus grande partie de E connexe contenant a.*

Corollaire 1. *Les composantes connexes sont fermées.*

Remarque. Attention, les composantes connexes ne sont pas toujours ouvertes : considérer la composante connexe de 0 dans $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

Théorème 1. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques et $E = \prod_{i\in I} E_i$.*

(i) E est connexe ssi $\forall i$, E_i est connexe.

(ii) La composante connexe de $(a_i)_{i\in I}$ dans E est $\prod_{i\in I} A_i$, où A_i est la composante connexe de a_i dans E_i.

Théorème 2 (Jordan). *Soit γ une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$. On suppose que γ n'a pas de point double, alors le complémentaire de $\gamma([0,1])$ dans $\mathbf{R}^2$ a exactement deux composantes connexes, dont l'une est bornée et l'autre non.*

1.4 Connexité par arcs

Définition 3. Une partie A de E est dite *connexe par arcs* si $\forall a, b \in A$, $\exists \gamma : [0,1] \to A$ continu tq $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Proposition 9. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de E.*
– *Si $\forall i, j$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*
– *Si $I = \mathbf{N}$, et si $\forall i$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Proposition 10. *Si A est connexe par arcs, alors A est connexe.*

Exemple. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple : $E = \{(x, sin(1/x))/x \in \mathbf{R}_+^*\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

1.5 Locale connexité

Définition 4. E est dit *localement connexe* (resp. *localement connexe par arcs*) si tout point de E possède une base de voisinages connexes (resp. connexes par arcs).

Exemple. Dans $\mathbf{R}^2$, $\{(x,y)/y=0\} \cup \{(x,y)/y=1\}$ est localement connexe mais pas connexe, tandis que $\{(x,y)/x=0\} \cup \{(x,y)/y \in \mathbf{Q}\}$ est connexe mais pas localement connexe.

Proposition 11. *Si E est localement connexe, alors toutes ses composantes connexes sont ouvertes.*

Théorème 3. *Si E est localement connexe par arcs et connexe, alors il est connexe par arcs.*

2 Applications

2.1 Fonctions numériques

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est un intervalle. En particulier pour $x, y \in E$, $\forall a \in [(f(x), f(y))], \exists z \in E : f(z) = a$.*

Exemple. Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Corollaire 2. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$. Alors si $f(I) \subset I$, ou si $I \subset f(I)$, alors f possède un point fixe.*

Application (Sarkovskii[F-G1])*.* Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue ayant un point périodique de période 3. Alors il existe des points périodiques de toutes les périodes entières.

Théorème 5 (Accroissements finis)**.** *Soit $a < b \in \mathbf{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Corollaire 3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors :*
- *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ ssi $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur $]a,b[$.*
- *f est constante sur $[a,b]$ ssi $f' = 0$ sur $]a,b[$.*

Théorème 6 (Darboux)**.** *Soit $a < b \in \mathbf{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Théorème 7 (inégalité des accroissements finis)**.** *Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et vérifie $|f'| \leq M$ sur $]a,b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.*

Corollaire 4. *Soit $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x) \to_{x\to a} l$. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Exemple. $f : x \mapsto \exp(1/x^2)$ prolongée en 0 par 0 est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Théorème 8. *Égalité de Taylor-Lagrange.*

Corollaire 5. *Méthode de Newton.*

2.2 Fonctions de plusieurs variables

Proposition 12. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$ et f une application dérivable sur U. Alors f est constante sur U ssi $df \equiv 0$.*

Théorème 9 (Hadamard Levy)**.** *Soit $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Alors f est un difféomorphisme ssi f est propre et $\forall x \in \mathbf{R}^n, df(x)$ est inversible.*

Théorème 10 (Brouwer)**.** *Soit K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$. Alors toute fonction continue $f : K \to K$ admet au moins un point fixe.*

Cauchy-Lipsch maximal, Demailly p.132 idem pts fixes.

2.3 Analyse complexe

Définition 5. Un sous-ensemble Ω de $\mathbf{C}$ est appelé un *domaine* s'il est ouvert et connexe.

Théorème 11 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe d'un domaine Ω de $\mathbf{C}$. Si f est non identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros n'admet pas de point d'accumulation.*

Corollaire 6 (Prolongement analytique)**.** *Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}$. Si deux fonctions holomorphes coïncident sur un sous-ensemble de Ω contenant un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω.*

Exemple. Définition de Γ sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.

2.4 Groupes de matrices

Proposition 13. *$Gl_n(\mathbf{C})$ est connexe.*

Proposition 14. *$U_n(\mathbf{C})$ et $SO_n(\mathbf{R})$ sont connexes par arcs.*

Proposition 15. *$O_n(\mathbf{R})$ a exactement deux composantes connexes, homéomorphes à $SO_n(\mathbf{R})$ et à $O_n(\mathbf{R}) \setminus SO_n(\mathbf{R})$.*

Théorème 12 (Décomposition polaire)**.** *L'application*

$$\begin{aligned} O_n(\mathbf{R}) \times S_n^{++}(\mathbf{R}) &\to Gl_n(\mathbf{R}) \\ (O,S) &\mapsto OS \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 7. *$Gl_n(\mathbf{R})$ a exactement deux composantes connexes, à savoir $Gl_n^+(\mathbf{R})$ et $Gl_n(\mathbf{R}) \setminus Gl_n^+(\mathbf{R})$.*

Développements

- Brouwer (Rouvière, Gonnord-Tosel Calcul diff.) +203, 206, 214, 217
- Hadamard (Zuily-Quéffélec p.400)
- Sarkovskii