Espaces complets. Exemples et applications.

1 Espaces complets

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1.1. Soit (E, d) un espace métrique. Une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est une *suite de Cauchy* si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p > q > N, \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Remarque.
- Une suite convergente est de Cauchy ;
- une suite de Cauchy est bornée ;
- une suite de Cauchy ayant au moins une valeur d'adhérence est convergente.

Proposition 1.2 ([Ska p. 107])**.** *Soit d et d' deux distances uniformément équivalentes de E. Alors toute suite de E est de Cauchy dans (E, d) si et seulement si elle est de Cauchy dans (E, d'). Cela est en particulier vrai lorsque d et d' sont équivalentes.*

Définition 1.3. On dit qu'un espace métrique (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E.
Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normé complet s'appelle un *espace de Banach*. Si de plus la norme est issue d'un produit scalaire, on parle alors d'*espace de Hilbert*.

Proposition 1.4. *Toute série normalement convergente d'un espace de Banach est uniformément convergente.*

Absolue convergence ?

Exemple. Si A est une algèbre de Banach, alors pour tout élément a de A, la série $e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ est bien définie.

1.2 Exemples

Proposition 1.5. $\mathbb{R}$ *est complet.*

Proposition 1.6. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés, si F est complet alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet pour la norme triple.*

Théorème 1.7 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $(L^p(\Omega), || \ ||_p)$ est de Banach.*

Théorème 1.8. *Soit X un espace topologique et E un espace complet, alors l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs dans E, $\mathcal{C}(X,E)$ muni de d_∞ ($d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$) est complet. De même pour l'ensemble des fonctions bornées de X dans E, $(\mathcal{B}(X,E), || \ ||_\infty)$.*

Proposition 1.9. *Pour Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω, $\mathcal{H}(\Omega)$ est complet pour le topologie de la convergence sur tout compact.*

Proposition 1.10. *Soit X un espace métrique compact. Alors l'ensemble des homéomorphismes de X est complet pour la distance $\delta(f,g) = d_\infty(f,g) + d_\infty(f^{-1},g^{-1})$.*

Proposition 1.11. *$A[[X]]$ est complet ; c'est le complété de $A[X]$.*

2 Propriétés des espaces métriques complets et applications

2.1 Propriétés générales

Proposition 2.1. *Toute sous-partie complète d'un espace métrique est fermée. Réciproquement tout fermé d'un espace complet est complet.*

Proposition 2.2. *Soit (E_1,d_1),...,(E_n,d_n) des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times ... \times E_n$ est complet si et seulement si pour tout i, l'espace métrique (E_i,d_i) est complet.*

Exemple. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est complet.

Théorème 2.3 (Fermés emboités)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E, telle que $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ (où $\delta(F_n)$ désigne le diamètre de F_n). Alors il existe $x \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.*

Application. Bolzano-Weierstrass.

Théorème 2.4. *Une espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Application. Ascoli, équivalence des définitions de compacité, enveloppe convexe compacte rel compacte...

Théorème 2.5 (Complété d'un espace métrique)**.** *Soit (E,d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet $(\hat{E},\hat{d})$ et une injection naturelle isométrique $i : E \longrightarrow \hat{E}$ telle que $i(E)$ soit dense dans $\hat{E}$.*

Exemple. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la norme usuelle est $\mathbb{R}$.

2.2 Théorème de Picard

Théorème 2.6 (Picard)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $f : E \to E$ *une application contractante. Alors* f *possède un unique point fixe* a *et pour tout* $x_0 \in E$*, la suite* $f^n(x_0)$ *converge vers* a *; la vitesse de convergence vérifie alors* $d(a, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Théorème 2.7. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application ultimement contractante (i.e. dont l'un des itérés est contractant). Alors* f *possède un unique point fixe et pour tout* $x_0 \in X$*, la suite* $f^n(x_0)$ *converge vers* a.

Remarque. Cette propriété sert à démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Le théorème du point fixe sert aussi à montrer le théorème d'inversion locale, des fonctions implicites...

Théorème 2.8. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* L *un espace topologique. Soit* $f : L \times E \to E$ *continue telle que* $\forall \lambda \in L,\ f(\lambda, .)$ *est contractante de rapport* k *(indépendant de* λ*). Pour tout* λ *on note* a_λ *le point fixe de* $f(\lambda, .)$*, alors l'application* $\lambda \to a_\lambda$ *est continue.*

Remarque. Cté des solutions d'une EDO par rapport aux CI.

2.3 Théorème de prolongement

Théorème 2.9 (Prolongement uniformément continu)**.** *Soit* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques. Soit* A *une partie dense de* E *et supposons* F *complet. Soit* $f : A \to F$ *une application uniformément continue. Alors il existe une unique fonction* $g : E \to F$ *uniformément continue telle que* $g_{|A} = f$.

Théorème 2.10 (Plancherel)**.**

2.4 Théorème de Baire et applications

Définition 2.11. On appelle G_δ d'un espace topologique toute intersection dénombrable d'ouverts.

Théorème 2.12 (Baire)**.** *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts denses dans* E*, alors* $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ *est un* G_δ *dense dans* E.

Proposition 2.13. *Un espace vectoriel normé admettant une base dénombrable ne peut être complet.*

Proposition 2.14. *la fonction dérivée d'une fonction dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue sur un* G_δ *dense.*

Proposition 2.15. *L'ensemble des fonctions partout continues nulle part dérivables forment un* G_δ *dense dans l'ensemble des fonctions continues pour la norme infinie.*

Théorème 2.16 (Sunyer y Balaguer)**.** ***Gourdon*** *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists n_x \in \mathbb{N}$: $f^{(n_x)}(x) = 0$. Alors f est un polynôme.*

Définition 2.17. Soit X un espace métrique compact et $f : X \to X$ continue. On dit que f est *transitive* si $\forall x, y \in X, \varepsilon > 0$, $\exists z \in X, n \in \mathbb{N} : d(x, z) < \varepsilon, d(y, f^n(z)) < \varepsilon$.

Proposition 2.18. *L'ensemble des points $x \in X$ dont l'orbite par f transitive est dense est un G_δ-dense.*

Application. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto 2x$ si $x \leq 1/2, 4 - 2x$ si $X \geq 1/2$. Alors f est transitive, et l'ensemble des points périodiques de f est dense.

2.5 Théorèmes de Banach et applications

Théorème 2.19 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues entre deux espaces de Banach E et F. Ou bien*

$$\sup_{i \in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty$$

ou bien

$$\sup_{i \in I} ||T_i x|| = \infty$$

pour tout x dans un G_δ dense de E.

Proposition 2.20 (Gourdon)**.** *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues, alors B est continue sur $E \times F$.*

Proposition 2.21. *La limite simple d'une suite de fonctions linéaires continues est linéaire et continue.*

Théorème 2.22 (Application ouverte)**.** *Soit $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective entre deux espaces de Banach, alors T est ouverte.*

Application. Coercivité/injectivité Skandalis.

Théorème 2.23 (Isomorphisme de Banach)**.** *Soit $T : E \to F$ une appliaction linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach, alors T^{-1} est continue.*

Théorème 2.24 (Graphe fermé)**.** *Soit $T : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces de Banach, alors T est continue si et seulement si son graphe est fermé.*

Application. Skandalis p. 220.

3 Espaces de Hilbert

Définition 3.1. Hilbert

Exemple. L^2, ℓ^2

Théorème 3.2 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert $(H, \langle \ | \ \rangle)$. Alors pour tout x dans H, il existe un unique élément $y \in C$ tel que $||x - y|| = d(x, C)$.*

Proposition 3.3. *Soit F un sev fermé de H Hilbert. Pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $p \in H$ tq $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$. De plus, l'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective, et H se décompose en somme directe orthogonale $H = F \oplus F^\perp$. En particulier, un sev F est dense ssi $F^\perp = \{0\}$.*

Théorème 3.4 (Hahn-Banach géométrique)**.** *Soit H un Hilbert réel. Si A et B sont deux convexes non vides disjoints de H, avec A fermé et B compact, alors il existe une forme linéaire $f \in H^*$ telle que $\sup_{a \in A} f(a) < \inf_{b \in B} f(b)$.*

Définition 3.5. On dit que $(e_n)_n \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ est une *base hilbertienne* si $\forall i, j$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$ et $vect(e_i)$ est dense dans $\mathcal{H}$.

Théorème 3.6. *Soit $\mathcal{H}$ un Hilbert muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 0}$. Pour $x \in \mathcal{H}$ on pose $x_n = \langle x, e_n \rangle$. Alors $x = \lim_N \sum_{n=0}^N x_n e_n$ et $\|x\|^2 = \sum |x_n|^2$ (Parseval).*
De plus si on se donne $(x_n)_n \in \ell^2$, alors $\sum x_n e_n$ converge et $x = \sum x_n e_n$ vérifie $\langle x, e_n \rangle = x_n \, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, avec $e_n(x) = e^{2i\pi n x}$, est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

Définition 3.7. Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T : E \to F$ est dite *compacte* si l'image de la boule unité par T est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte).

Théorème 3.8. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et T un endomorphisme de $\mathcal{H}$ autoadjoint compact. Alors il existe une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T, autrement dit $\mathcal{H}$ est la somme hilbertienne des sous-espaces propres.*