207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

1 Cadre topologique

Tous les espaces considérés sont séparés [Ska p. 33].

Théorème 1. *Soient X et Y deux espaces topolgiques, D une partie dense de X et $f : D \to Y$ une fonction continue. Alors f admet au plus un prolongement continu sur X.*

Exemple. Les seuls morphismes continus de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(\mathbf{R}, +)$ sont les $x \mapsto ax$.

Remarque. Un tel prolongement n'existe pas forcément, voir par exemple $x \mapsto 1/x$, défini sur $\mathbf{R}_+^*$, dense dans $\mathbf{R}_+$.

Proposition 1. *Si X et Y sont deux espaces topologiques, a est un point non isolé de X et $f : X \setminus \{a\} \to Y$ est une fonction continue avec $f(x) \to_{x \to a} l \in Y$, alors $\tilde{f} : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ si $x \neq a$, l sinon est l'unique prolongement continu de f.*

Exemple. – Fonction croissante majorée.
- Prolongement de $x \mapsto x^x$ en 0.
- Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable en $a \in \mathbf{R}$, alors la fonction $g : \mathbf{R} \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se prolonge par continuité en a en posant $\tilde{g}(a) = f'(a)$ (fonction pente fonction convexe).

Théorème 2. *Soient X et Y deux espaces métriques, avec Y complet, et D une partie dense de X. Soit $f : D \to X$ une fonction uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement continu sur X, qui de plus est uniformément continu.*

Exemple. – Transformée de Fourier L^2. Posons $\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}) \mid \forall p, q \in \mathbf{N}, f^{(p)}(x)x^q \to_{|x| \to \infty} 0\}$ l'espace de Schwarz. Alors $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$ est $\mathcal{S}$ est dense dans L^2. De plus $f \to \hat{f}$ est une isométrie de $\mathcal{S}$, donc se prolonge continuement sur L^2 en une unique isométrie.
- Inégalité de Hardy (C-L p. 148, on montre l'inégalité sur l'ensemble dense des fonctions continues). Soit $1 < p < +\infty$ et $f \in L^p$. Posons $F(x) = 1/x \int_0^x f(t)dt$. Alors $F \in L^p$ et $\|F\|_p \leq \frac{p-1}{p} \|f\|_p$.

Théorème 3 (Lemme d'Urysohn, [Queffélec p. 71]). *Soit X un espace compact ou métrique, et A et B deux fermés de X disjoints. Alors il existe une fonction $f : X \to [0,1]$ continue valant 0 sur A et 1 sur B.*

Théorème 4 (Tietze-Urysohn). *Soit X un espace compact ou métrique, A un fermé de X et $f : A \to [0,1]$ une fonction continue. Alors f se prolonge sur X en une fonction continue à valeurs dans $[0,1]$.*

Application. On a alors existence de partitions de l'unité : soit X un espace paracompact et $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement localement fini de X. Alors il existe des fonctions $\varphi_i : X \to [0,1]$ continues tq $supp(\varphi_i) \subset U_i$ et $\sum_i \varphi_i = 1$ sur X.

Application. Densité de C_c dans L^p.

Application. Avec Stone-Weierstrass, $C^0(X, \mathbf{R})$ est séparable.

Théorème 5 (Du relèvement). *CF G-T.*

2 Cadre linéaire

Théorème 6 (Hahn-Banach). *Soit E un $\mathbf{R}$-ev et $p : E \to \mathbf{R}$ une application vérifiant :*
- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E$, $\lambda \in \mathbf{R}$,
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Soit d'autre part G un sev de E et $g : G \to \mathbf{R}$ une application linéaire tq $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$. Alors il existe $F : E \to \mathbf{R}$ forme linéaire tq $f_{|G} = g$ et $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

Corollaire 1. *Soit E un evn réel. Pour tout x de E, il existe une forme linéaire continue f_x de E de norme 1 tq $f_x(x) = \|x\|$. Ainsi on a $\|x\| = \max_{f\in E', \|f\|=1} |f(x)|$; autrement dit l'injection canonique $i = E \to E''$; $x \mapsto (f \mapsto \langle f, x\rangle)$ est isométrique.*

Corollaire 2. *Il existe une forme linéaire u de $L^\infty([0,1])$ telle que $u(f) = f(0)$ $\forall f \in C^0$. Ainsi, le dual de L^∞ contient strictement L^1.*

Théorème 7 (Versions géométriques).

Application. Convexité, blabla.

3 Cadre différentiable

3.1 Fonctions dérivables

Proposition 2 ([Gou p. 74]). *Soit $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbf{R}$. Alors f se prolonge en une fonction continue sur $[a,b[$ de façon unique ; ce prolongement est dérivable à droite en a de dérivée l.*

IAF

Exemple. Prolongement de $\frac{\sin x}{x}$ en la fonction sinus cardinal, de dérivée nulle en 0.

Corollaire 3. *La fonction $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}, x \mapsto e^{-x^2}$ se prolonge de manière unique en une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}$.*

Corollaire 4. *On en déduit un exemple de fonction plateau, C^∞ à support compact.*

Application. Approximations de l'unité et régularisation.

Application ([Rou p 355]). Whitney.

Application. Partitions de l'unité, Whitney [Laf].

Théorème 8 (Borel). *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Alors il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n \, \forall n$.*

Corollaire 5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ dont les dérivées n-ièmes admettent toutes une limite en a et b. Alors il existe une fonction C^∞ prolongeant f sur $\mathbf{R}$.*

Application ([Rou]). Si f est paire, alors il existe g tq $f(x) = g(x^2)$.

3.2 Équations différentielles

Soit $I =$ un intervalle de $\mathbf{R}$, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : I \times U \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. On considère l'équation (E) $y'(t) = f(t, y(t))$

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz). *Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. Alors il existe une unique solution locale au problème de Cauchy (E), $y(t_0) = y_0$.*

Proposition 3. *Si x et y sont deux solutions au problème de Cauchy supra définies sur resp. I et J, alors $x = y$ sur $I \cap J$.*

Corollaire 6 (Cauchy-Lipschitz maximal). *Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy (E), $y(t_0) = y_0$.*

Théorème 10 (des bouts). *Soit (y, J) une solution maximale de (E), avec $J =]T_*, T^*[$. Alors soit $(T^*, x(T^*)) \in \partial I \times U$, soit $\|x(t)\| \to_{x\to T^*} +\infty$.*

Application. Hadamard-Levy.

Lotka-Volterra

3.3 Paramétrisation des courbes [RDO 5]

Définition 1. Paramétrisation normale.

Proposition 4. *Unicité de la param normale.*

Théorème 11. *Classification des variétés en dimension 1.*

4 Cadre de l'analyse complexe

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}$.

Théorème 12 (10.21 Rud)**.** *Soit $a \in \Omega$ et $h \in \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{a\}$. On a alors 3 possibilités :*

(i) singularité artificielle

(ii) méromorphe au voisinage

(iii) image de tout voisinage dense

Remarque. On a fortement affaibli les hypothèses sur la fonction par rapport au cas dérivable.

Application (Ama)*.* Automorphismes de $\mathbf{C}$.

Théorème 13 (des zéros isolés)**.** *Soit h une fonction holomorphe sur Ω s'annulant sur $X \subset \Omega$ admettant un point d'accumulation. Alors $h \equiv 0$.*

Remarque. Autrement dit $h : X \to \mathbf{C}$ admet au plus un prolongement holomorphe sur Ω.

Exemple. Prolongement de Γ.
Prolongement de ζ sur le demi-plan positif [Amar-Matheron p. 149].

Application. La somme des $1/p$ diverge.

Application. Inversion globale holomorphe.

Théorème 14. *Cercle de coupure, points réguliers etc.*

Théorème 15 (Hardy-littlewood)**.**

Références

Skandalis
Queffélec
Gourdon
Rudin
Beck
Brézis
Lafontaine
RDO 5