208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

On se fixe un corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Tous les espaces vectoriels considérés auront $\mathbf{K}$ comme corps de base.

1 Généralités

Remarque. Tout $\mathbf{K}$-ev de dim finie peut être normé par la norme euclidienne : $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$, ainsi que par les normes classiques $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_i |x_i|$ et pour $p \in [1, +\infty[$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$:

Proposition 1 (Minkovski discret)**.**

Définition 1. Soient E et F deux evn. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E, F)$ le sous-espace de $L(E, F)$ constitué des applications continues. On note aussi $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ le *dual topologique* de $\mathbf{K}$.

Remarque. Il existe des applications linéaires non continues, comme par exemple $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, $f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f$. La suite de fonctions $\frac{1}{n(n-1)} 1_{[n,n^2]}$ converge uniformément vers 0 mais les intégrales valent toutes 1.

Proposition 2. *Soient E et F deux evn et $f \in L(E, F)$. Lpsse :*
– $\exists M > 0 : \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$
– *f est continue en 0*
– *f est continue*

Proposition 3. $|||f||| = \sup_{E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ *fournit une norme d'algèbre sur l'ev $\mathcal{L}(E, F)$.*

2 Dualité

Proposition 4. *Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.*

Proposition 5. *Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé. Sinon, celui-ci est dense.*

Théorème 1 (Hahn-Banach)**.** *Soit E un $\mathbf{K}$-evn, G un sev de E et $g \in G'$. Alors il existe $f \in E'$ prolongeant g et telle que $|||f||| = |||g|||$.*

Application. L'application canonique $E \to E''$ est une isométrie injective.

3 Cas de la dimension finie [Ska]

Proposition 6. *Soit E un evn de dim finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors l'application $\varphi : (\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty) \to (E, N),\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i e_i$ est un homéomorphisme.*

Proposition 7. *Si E est un evn de dimension finie, alors il est complet.*

Remarque. Si E est un evn admettant une base dénombrable, alors E est complet ssi il est de dim finie. Ainsi $\mathbf{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Théorème 2. *Si E est un evn de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Corollaire 1. *Si E est de dim finie et F est un evn, alors $L(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ quel que soit la norme que l'on mette sur E.*

Application. Il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbf{C}_n[X]$, P unitaire, on ait $\int_0^1 |P| \geq C_n$.

Corollaire 2. *Soit E un evn et F un sev de dim finie. Alors F est fermé dans E.*

Théorème 3 (Riesz)**.** *Soit E un evn. Lpsse :*

(i) E est de dim finie

(ii) la boule unité est compacte

(iii) les compacts sont exactement les fermés bornés.

4 Espaces de Banach, de Hilbert

4.1 Espaces de Banach

Définition 2. Un evn complet est appelé un *Banach*.

Exemple. Tout evn de dim finie est un Banach.
Pour E un Banach, $C_b^0(X, \mathbf{R})$, $C_b^k(X, \mathbf{R})$, $C_b^\infty(X, \mathbf{R})$ et $B(X, E)$ sont des Banach.

Proposition 8. *Soient E et F deux evn, avec E complet. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la topologie de la norme triple est complet. En particulier E' est complet.*

Théorème 4 (Riesz-Fischer Brézis p.57)**.** *Soit (E, A, μ) un espace mesuré. Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(E, A, \mu)$ muni de la norme $\|.\|_p$ est un Banach.*

Proposition 9. *Pour Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, $\mathcal{H}(\Omega)$ est complet.*

Théorème 5. *Pour $1 < p < \infty$, le dual de L^p est $L^{p'}$. Le dual de L^1 est L^∞ mais le dual de L^∞ contient strictement L^1.*

Théorème 6 (Baire)**.** *Soit E un Banach. Une intersection d'ouverts denses de E est elle-même dense dans E.*

Application. Théorèmes de non densité dans les espaces de fonctions continues.

Théorème 7 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient E un Banach, F un evn et $A \subset \mathcal{L}(E, F)$. Si pour tout $x \in E$, le sous-ensemble $\{f(x) \mid f \in A\}$ est borné, alors A est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$.*

Corollaire 3. *Soient E un Banach et F un evn, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est fermé pour la convergence simple.*

Application (Gou). Soient E un Banach et F, G deux evn. Soit $b : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors b est continue ssi $b(x, .)$ et $b(., y)$ sont continues pour tout $x \in F$ et $y \in G$.

Définition 3. Soient E et F deux Banach. Une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite *compacte* si l'image de la boule unité de E est relativement compacte dans F.

Proposition 10. *L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est un sev fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Proposition 11. *Les sous-espaces propres associés à une valeur propre non nulle d'un opérateur compact sont de dimension finie.*

4.2 Espaces de Hilbert, exemples d'applications des théorèmes.

Définition 4. Soit H un $\mathbf{K}$-ev. H est dit *de Hilbert* s'il est muni d'un produit scalaire dont la norme associée le rend complet.

Exemple. – Les $\mathbf{K}$-ev de dimension finie munis de la norme euclidienne sont des Hilbert.
– Pour (X, μ) un espace mesuré, l'ensemble $L^2(X, \mu) = \{f \in \mathbf{C}^X \text{mesurables} \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty\}$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ est un Hilbert.

Théorème 8 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert et C un cvx fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $p \in C$ tq $\|x_p\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$. C'est la projection de x sur C.*

Corollaire 4. *Soit F un sev fermé de H Hilbert. Pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $p \in H$ tq $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$. De plus, l'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective, et H se décompose en somme directe orthogonale $H = F \oplus F^\perp$. En particulier, un sev F est dense ssi $F^\perp = \{0\}$.*

Application (Hahn-Banach géométrique). Soit H un Hilbert réel. Si A et B sont deux convexes non vides disjoints de H, avec A fermé et B compact, alors il existe une forme linéaire $f \in H^*$ telle que $\sup_{a\in A} f(a) < \inf_{b\in B} f(b)$.

Théorème 9 (Riesz). *Soit H un espace de Hilbert de H' son dual topologique. Alors $\phi : H \to H',\ y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$ est une isométrie semi-linéaire surjective.*

Définition 5 (Ska p. 261). Soit u un endomorphisme continu de H et $y \in H$. Il existe un unique $z \in H$ tq pour tout $x \in H$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, z\rangle$. On pose alors $u^*(x) = z$. u^* est alors un endomorphisme continu de H appelé *adjoint* de u.

Définition 6. Un endomorphisme continu u est dit *autoadjoint* s'il est son propre adjoint.

Théorème 10 (Hellinger-Toepliz Gonnord p. 112, app du graphe fermé). *Soit H un Hilbert et f un endomorphisme de H. S'il existe un endomorphisme g de H tq $\forall x, y \in H,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$, alors f est continu : l'existence de l'adjoint et la continuité sont équivalents.*

Définition 7. On dit qu'une suite $x_n \in H^{\mathbf{N}}$ *converge faiblement* vers $x \in H$, et note $x_n \rightharpoonup x$, si $\forall y \in H,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Proposition 12 (app de Banach-Steinhaus). *Toute suite faiblement convergente est bornée. Toute suite fortement convergente est faiblement convergente. Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$, alors $x_n \to x$.*

Théorème 11 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *La boule unité d'un Hilbert séparable est compacte relativement à la topologie faible.*

Théorème 12. *Soit H un Hilbert séparable et T un opérateur autoadjoint compact. Alors H est la somme hilbertienne des sep de T.*

4.3 Convolution et transformée de Fourier

Théorème 13 (Inégalité de Young).

Corollaire 5. *On en déduit la continuité de la convolution.*

Proposition 13. *Soit $f \in L^1$. L'adjoint de $L^2 \to L^2,\ g \mapsto f * g$ est $g \mapsto \overline{f}(-.) * g$.*

Théorème 14. *Convergence et identités approchées...*

Corollaire 6. *Densité C_c^∞, théorème de Féjer.*

Définition 8. TF dans L^1.

Théorème 15 (Riemann-Lebesgue)**.** *La TF est un opérateur continu de* L^1 *dans* C_b *muni de la norme infinie.*

Proposition 14. *Comportement vis-à-vis de la convolution.*

Théorème 16 (Inversion de Fourier)**.**

Théorème 17 (Plancherel)**.** *Isométrie d'un espace de Hilbert.*