213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications

On fixe une fois pour toutes un corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1 Généralités

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Soit H un $\mathbf{K}$-ev. H est dit *préhilbertien* s'il est muni d'un produit scalaire. Si de plus il est complet relativement à la norme associée à ce produit scalaire, il est dit *de Hilbert*.

Exemple. – Les $\mathbf{K}$-ev de dimension finie munis de la norme euclidienne sont des Hilbert.
– L'ensemble $\ell^2(\mathbf{C}) = \{(x_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \sum_n |x_n|^2 < +\infty\}$, muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_n x_n \overline{y_n}$ est un Hilbert.
– Pour (X, μ) un espace mesuré, l'ensemble $L^2(X, \mu) = \{f \in \mathbf{C}^X \text{mesurables} \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty\}$, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x)$ est un Hilbert.

Proposition 1 (Identité du parallélogramme)**.** *Si $(E, \|.\|)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout $x, y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$.*

Remarque. On en déduit que la boule unité d'un evn préhilbertien est strictement convexe.

Cette propriété possède une réciproque :

Théorème 1. *Un evn est préhilbertien si pour tout $x, y \in E$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$.*

1.2 Théorème de projection

Théorème 2. *Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert et C un cvx fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $p \in C$ tq $\|x_p\| = \min_{y\in C} \|x - y\|$. C'est la projection de x sur C. Si on note p_C l'application qui à x associe sa projection sur C, celle-ci est l'unique élément de C tel que $Re(\langle x-p_C(x), y-p_C(x)\rangle) \leq 0$ pour tout $y \in C$. De plus, l'aplication p_C est 1-lipsch.*

Corollaire 1. *Soit F un sev fermé de H Hilbert. Pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $p \in H$ tq $p \in F$ et $x - p \in F^{\perp}$. De plus, l'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective, et H se décompose en somme directe orthogonale $H = F \oplus F^{\perp}$. En particulier, un sev F est dense ssi $F^{\perp} = \{0\}$.*

Exemple. Contre ex [Vinx p. 98].

Proposition 2. *Expression de la projection sur un sev défini par une de ses bases. Déterminant de Gram.*

Application. Müntz.

Théorème 3 (Hahn-Banach géométrique, [Vinx])**.** *Soit H un Hilbert réel. Si A et B sont deux convexes non vides disjoints de H, avec A fermé et B compact, alors il existe une forme linéaire $f \in H^*$ telle que $\sup_{a\in A} f(a) < \inf_{b\in B} f(b)$.*

Application. Tout convexe fermé d'un Hilbert est égal à l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

2 Dualité et applications

2.1 Théorème de Riesz et adjoint

Théorème 4 (Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert de H' son dual topologique. Alors $\phi : H \to H'$, $y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$ est une isométrie semi-linéaire surjective.*

Définition 2. Soit u un endomorphisme continu de H et $y \in H$. Il existe un unique $z \in H$ tq pour tout $x \in H$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, z\rangle$. On pose alors $u^*(x) = z$. u^* est alors un endomorphisme continu (C-S) de H appelé *adjoint* de u.

Théorème 5 (Hellinger-Toepliz Gonnord p. 112, app du graphe fermé)**.** *Soit H un Hilbert et f un endomorphisme de H. S'il existe un endomorphisme g de H tq $\forall x, y \in H$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$, alors f est continu : l'existence de l'adjoint et la continuité sont équivalents.*

Théorème 6 (Hahn-Banach analytique)**.**

Application ?

Définition 3. Un endomorphisme continu u est dit *autoadjoint* s'il est son propre adjoint.

Décomposition polaire ?

Proposition 3. *Soit u un endomorphisme continu de H. Alors H se décompose comme $H = \ker u^* \oplus^{\perp} \overline{\operatorname{im} u}$.*

Application (Théorème de Von Neumann)*.* Soit T un endom continu de H tq $\|T\| \leq 1$. Alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T^k(x) \to_{n\to+\infty} p(x)$, où p est la projection sur $\ker Id - T$.

2.2 Convergence faible (Gourdon)

Définition 4. On dit qu'une suite $x_n \in H^{\mathbf{N}}$ *converge faiblement* vers $x \in H$, et note $x_n \rightharpoonup x$, si $\forall y \in H,\ \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.

Proposition 4. *Toute suite admet au plus une limite faible. Toute suite faiblement convergente est bornée (Banach-Steinhaus). Toute suite fortement convergente est faiblement convergente. Si $x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|$, alors $x_n \to x$.*

Théorème 7 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *La boule unité d'un Hilbert est compacte relativement à la topologie faible.*

3 Bases hilbertiennes

3.1 Définition et premières propriétés [Vinx]

Définition 5. Soit H un Hilbert. On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

(i) orthogonale : $\forall i \neq j \in I,\ \langle e_i, e_j\rangle = 0$,

(ii) normée : $\forall i \in I,\ \|e_i\| = 1$,

(iii) totale : $H = \overline{\mathrm{vect} e_i}$.

On dit que H est la *somme hilbertienne* des sev $(V_i)_{i\in I}$ si ceux-ci sont deux à deux orthogonaux et si $\overline{\mathrm{vect} V_i} = H$.

Remarque. Pour construire une base hilbertienne, on peut utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Ainsi un Hilbert séparable possède une base hilbertienne dénombrable.
Le lemme de Zorn permet de montrer l'existence d'une base hilbertienne dans tout Hilbert.
En général, une base hilbertienne n'est pas algébrique. Par exemple dans un Hilbert séparable, le lemme de Baire permet de montrer qu'il n'existe pas de base algébrique dénombrable.

Exemple. La famille $\delta_{i,j}$ est une base hilbertienne de l^2.

Proposition 5 (Caractérisation des bases hilbertiennes)**.** *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille orthonormée de H. Lpsse :*

(i) $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une base hilbertienne*

(ii) Pour tout $x \in H,\ s = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$

(iii) Pour tout $x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2$ (Parseval)

(iv) $\{e_n \mid n \in \mathbf{N}\}^\perp = \{0\}$.

De plus l'application $\Delta : H \to \ell^2(\mathbf{C}),\ x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ est une isométrie injective.

3.2 Applications

Définition 6. Un endomorphisme de H est dit *compact* si l'image de la boule unité de H est relativement compacte.

Exemple. Opérateurs à noyaux, comapcts par Ascoli, [Hirsch-Lacombe].

Théorème 8. *Soit H un Hilbert séparable et T un opérateur autoadjoint compact. Alors H est la somme hilbertienne des sep de T.*

Théorème 9 (Beck p. 112/140)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et ρ une fonction de poids. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < \infty$. On peut alors former une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ à l'aide de polynômes orthogonaux.*

4 Applications aux séries de Fourier et à la TF

Définition, noyau de Féjer, convergence dans L^2, (e_n) base hilbertienne, Parseval.

Application. Calcul de $\sum 1/n^2$...

Application. Inégalité isopérimétrique.

Isométrie de l'espace de Schwarz, Plancherel, convolution.

Exemple. TF du sinus cardinal, de $\frac{1}{a \pm 2i\pi x}$.

Application. Signaux à spectre borné [Vinx p. 92].