214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.

On fixe une fois pour toutes $n, p \in \mathbf{N}^*$, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbf{R}^p$ une application différentiable de classe C^1.

1 Théorèmes d'inversion

1.1 Inversion locale

Dimension 1, dessins

Définition 1. On dit que f est un *difféomorphisme* sur son image si elle est de classe C^1, bijective et de réciproque de classe C^1.

Théorème 1 (Inversion locale)**.** *On suppose que f est C^k et que $df(a)$ est inversible. Alors il existe $V \subset U$ voisinage ouvert de a et W voisinage ouvert de $f(a)$ tels que f soit un C^k-difféomorphisme de V dans W.*

Exemple.
- Contre ex. $x \mapsto x^2$ en 0
- Contre ex. Rou p. 204 sans caractère C^1
- $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ difféo au vois. de tt pt différent de 0 (élévation au carré cplx)
- L'exponentielle matricielle est un difféo d'un voisinage de 0 vers un voisinage de I_n.

Application. $Gl_n(\mathbf{K})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit : il existe un voisinage V de l'identité dans $Gl_n(\mathbf{K})$ tel que le seul sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{K})$ inclus dans V soit le sous-groupe trivial.

Application (Laf)*.* Soit $\varphi : \mathbf{R} \to Gl_n(\mathbf{K})$ un morphisme continu. Alors il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi(t) = \exp(tA)$.

Application (Beck)*.* Racine k-ième d'une matrice.

Théorème 2 (Inversion locale holomorphe, [Rou p. 191])**.** *Si $f \in H(U)$, avec U ouvert de $\mathbf{C}$ et $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe $V \subset U$ voisinage ouvert de z_0 et W voisinage ouvert de $f(z_0)$ tels que f soit un C^∞-difféomorphisme de V dans W et que f^{-1} soit holomorphe.*

Application. Une fonction holomorphe non constante est ouverte.

Théorème 3 (Minoration de la taille des voisinages)**.** *Par Rouvière !*

Théorème 4 (Du rang constant)**.** *On suppose que le rang de la jacobienne de f est constant au voisinage de a égal à r. Alors il existe un changement de coordonnées locales au voisinage de a au départ, et un autre au voisinage de $f(a)$ à l'arrivée, tel que dans ces coordonnées f soit égale à la projection sur les r premières coordonnées.*

Théorème 5 (Morse, [Rou])**.** *On suppose que f est de classe C^3 et que $0 \in \Omega$. Si $df(0) = 0$ et $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ C^1 entre deux voisinages de l'origine de $\mathbf{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et que $f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \cdots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) + \cdots - \varphi_n^2(x)$.*

Application. Point double en un point hyperbolique, [Rou p. 330]

1.2 Inversion globale

En général, un difféomorphisme local n'est pas un difféomorphisme global (cf exemples supra). Néanmoins en ajoutant une hypothèse d'injectivité on a :

Théorème 6 (Inversion globale)**.** *On suppose que f est C^k. Alors f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$ ssi elle est injective et en tout point sa différentielle est inversible ; f est alors ouverte.*

Théorème 7 (Inversion globale holomorphe, [Beck])**.** *Si $f \in H(U)$ est injective sur U ouvert de $\mathbf{C}$, alors f est un C^∞ difféomorphisme de U sur $f(U)$ et f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$.*

Exemple. $x > 0$ est un ouvert maximal pour lequel l'élévation au carré cplx est un difféo sur son image.

En pratique, injectivité -> calcul de f^{-1}

Lemme 1 (Milnor, [G-T])**.**

Théorème 8 (Brouwer)**.**

Application. Champ rentrant, boule chevelue.

Définition 2. Une fonction f est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

Proposition 1. *Soit f une fonction continue. Alors f est propre ssi $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Théorème 9 (Hadamard,[Z-Q]). *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $df(x)$ soit inversible. Si de plus f est propre, alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.*

Exemple. Soit f une fonction de classe C^1 et k-dilatante, $k > 0$. Alors f est un C^1-difféo sur son image.

2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 10 (Fonctions implicites). *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $(a, b) \in U$ et $f \in C^k(U, \mathbf{R}^m)$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $d_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b et une unique application $\varphi \in C^k(V, W)$ tels que :*
$\forall (x, y) \in V \times W,\ f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$. De plus, la différentielle de φ vérifie : $d\varphi(x) = -\big(d_y f(x, \varphi(x))\big)^{-1} \circ d_x f(x, \varphi(x))$.

Dessin ! Equivalence inversion locale

Exemple. Le folium de Descartes : l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ admet un paramétrage local en tout point différent de l'origine.

Application (Beck). Régularité d'une racine simple d'un polynôme, donc des valeurs propres.

Application. $PV = nRT$ [Rou p. 248].

Application. Point fixe à paramètre C^1, [Rou p. 250].

Application. Équation de Burgers, [Rou p. 257].

3 Sous-variétés

Définition 3. Un sous-ensemble $M \subset \mathbf{R}^n$ est appelé une *sous-variété* de dimension p de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $a \in M$, il existe des voisinages ouverts de a et 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme $F : U \to V$ tels que $F(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^p \times \{0\})$.

Exemple. Dimension 0, $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{T}^n$, ouverts, sea, courbes, pas cône, pas segment.

Définition 4. Immersion, submersion.

Théorème 11 (Des sous-variétés). *Laf p. 29.*

Exemple (Laf p. 31). O_n

Définition 5. Espace tangent.

Exemple. Sphère, O_n...

Théorème 12 (Extremums liés).

Application. Dvpt 21 pb d'extremums dans un triangle.

Application. exo 4 p. 319 Gourdon

Théorème 13. *Classification des sous-variétés de dimension 1.*