215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

1 Définitions et généralités

On se donne $m, n \in \mathbf{N}^*$, U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$.

Définition 1. On dit que f est *différentiable* en a s'il existe une application $l(a) \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ telle que pour h assez petit on ait $f(a+h) = f(a) + l(a).h + o(\|h\|)$. Si elle est différentiable en tout point de U, elle est dite *différentiable* sur U.

Remarque.
- L'application $l(a)$ est unique. Elle est appelée *différentielle* de f en a.
- $df(a)$ est indépendante de la norme choisie (on est en dimension finie).
- Si $n = 1$, alors les applications différentiables et dérivables coïncident ; on a alors $df(a).h = hf'(a)$.

Proposition 1. *Si f est différentiable en a, alors elle est continue en a.*

Exemple. Une application linéaire est différentiable en tout point de différentielle elle-même. Différentielle d'une application bilinéaire.

Exemple. Une application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ différentiable en 0 tq $f(tx) = tf(x)$ est linéaire.

Proposition 2. *L'ensemble des applications différentiables en un point est un ev. Si l'espace d'arrivée est numérique, il est stable par produit.*

Proposition 3. *Si f est différentiable en a et $g : V \to R^p$, avec V un ouvert de $\mathbf{R}^m$ contenant $f(U)$, est différentiable en $f(a)$), alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.*

Application (Différentielle d'une restriction). Soit E un sev de $\mathbf{R}^n$ contenant a. Alors il existe $d(f_{|U \cap E})(a) = df(a)_{|E}$.

Définition 2. On dit que f admet une *dérivée* en a selon le vecteur $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ si la fonction $F : t \mapsto f(a+tv)$ définie au voisinage de 0, admet une dérivée en 0, alors appelée *dérivée* selon v. Les dérivées selon les vecteurs de la base canonique sont appelées *dérivées partielles* est notées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Proposition 4. *Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée selon tout vecteur, donnée par $F'(0) = df(a).v$. En particulier $df(a).(h_1, \dots, h_n) = \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$*

Exemple. La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $f(x, y) = 0$ si $x \neq 0$, y sinon (on a même pas la continuité)

Proposition 5 (Identité d'Euler, [Rou p. 74])**.** *Soient $f : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to R$ différentiable en tout point et $k \in \mathbf{R}$. f est* homogène de degré k *(i.e. $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$) ssi $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.*

Définition 3. On suppose $m = 1$. Alors $df(a)$ est une forme linéaire. Donc il existe un unique vecteur $v \in R^n$ tq $df(a) = \langle v, . \rangle$. v est appelé le *gradient* de f en a et est noté $grad(f)(a)$.

Remarque. Le gradient indique la direction de la plus forte pente de f. Il est normal à l'espace tangent en a de l'hypersurface $\{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$.

Définition 4. Si $n = m$, le déterminant de $df(a)$ est appelé *jacobien* de f en a et est noté $J_f(a)$.

Application. Wronskien.

2 Classes C^k

2.1 Définitions

Définition 5. On dit que f est de *classe* C^1 sur U si elle est différentiable sur U de différentielle continue.

Théorème 1. *f est de classe C^1 sur U ssi pour tout $1 \leq i \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur U.*

Application (Formule de changment de variables)*.* Soit φ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbf{R}^n$. Pour toute fonction borélienne $f : V \to \mathbf{C}$, f est intégrable sur V si et seulement si $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur U, auquel cas

$$\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(u))|J_\varphi(u)|du$$

Définition 6. On dit que f est de classe C^k si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur à k existent et sont continues. On définit de même la classe C^∞. Ceci est équivalent à l'existence et à la continuité de la k-ième différentielle.

Théorème 2 (Schwarz)**.** *Si f est de classe C^2, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Exemple. $f : (x,y) \mapsto xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 sinon est C^1 non C^2.

Définition 7. Si $m = 1$, $d^2f(a)$ est une fbs. La matrice associée à cette forme est appelée *Hessienne* de f en a, notée $Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$.

2.2 Formules de Taylor

Théorème 3 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Si f est C^{k+1} sur U et si $[a, a+h] \subset U$, alors :*

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} d^i f(a).h^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th).h^{k+1}$$

Remarque. La différentielle s'exprime de manière plus agréable : $d^k f(a).h^k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \dots h_{i_k}$.

Application (Lemme d'Hadamard, [Gou p. 310]). Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^∞. Si $f(0) = 0$, alors il existe des fonctions $g_i \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tq $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$.

Théorème 4 (Formule de Taylor-Young)**.** *On suppose seulement que f est i fois différentiable en a. Alors :*

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!} d^i f(a).h^i + o(\|h\|^k)$$

2.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 5. *Si $[a, a+h] \subset U$, f est continue sur $[a, a+h]$ et différentiable sur $]a, a+h[$, alors il existe $t \in]0,1[$ tq $f(a+h) - f(a) = df(a+fh).h$.*

Théorème 6. *Si $[a, a+h] \subset U$, f est continue sur $[a, a+h]$ et différentiable sur $]a, a+h[$ avec $\|df(u)\| \leq M \; \forall u \in]a, a+h[$, alors $\|f(a+h) - f(a)\| \leq M\|h\|$.*

Remarque. Il est toujours possible de majorer $\|df(u]\|$ quand f est de classe C^1.

Théorème 7. *Point fixe de Picard.*

Corollaire 1. *Si f est continue sur U et différentiable sur $U \setminus \{a\}$ et si $df(x) \to_{x \to a} l$, alors f est différentiable en a et $df(a) = l$.*

Corollaire 2. *Si U est connexe sur lequel $df = 0$, alors f est constante.*

Définition 8. Si a est tq $df(a)$ est non surjective, a est appelé un *point critique* de f. $f(a)$ est appelée une *valeur critique* de f.

Théorème 8 (Sard)**.** *L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction de classe C^1 est de mesure nulle. En particulier si $m = n$ et f est non constante, il existe toujours des valeurs régulières.*

3 Théorèmes d'inversion

3.1 Énoncés

Définition 9. On dit que f est un *difféomorphisme* sur son image si elle est de classe C^1, bijective et de réciproque de classe C^1.

Théorème 9 (Inversion locale)**.** *On suppose que f est C^k et que $df(a)$ est inversible. Alors il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que f soit un C^k-difféomorphisme de V dans W.*

Théorème 10 (Inversion globale)**.** *On suppose que f est C^1. Alors f est un C^1-difféomorphisme sur $f(U)$ ssi elle est injective et en tout point sa différentielle est bijective.*

Définition 10. Une fonction f est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

Théorème 11 (Hadamard,[Z-Q])**.** *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $df(x)$ soit inversible. Si de plus f est propre, alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.*

Exemple. Soit f une fonction de classe C^1 et k-dilatante, $k > 0$. Alors f est un C^1-difféo sur son image.

Théorème 12 (Fonctions implicites)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$, $(a, b) \in U$ et $f \in C^1(U, \mathbf{R}^m)$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice jacobienne $d_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b et une unique application $\varphi \in C^1(V, W)$ tels que :*
$\forall (x, y) \in V \times W,\ f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

Dessin !

Exemple. Le folium de Descartes : l'ensemble des $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ admet un paramétrage local en tout point différent de l'origine.

3.2 Applications

Lemme 1 (Milnor)**.**

Théorème 13 (Brouwer)**.**

Définition 11. Immersion, submersion.

Théorème 14 (Des sous-variétés)**.** *Laf p. 29.*

Exemple (Laf p. 31)*.* O_n

4 Application à la recherche d'extremums

Proposition 6. *Si f admet un extremum local en a, alors $df(a) = 0$.*

Exemple. La condition n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple $x \mapsto x^3$.

Application. Méthode du gradient, de Newton.

Proposition 7. *Si f est convexe et si $df(a) = 0$, alors f admet un minimum global en a.*

Proposition 8. *CNSs Hessienne.*

Théorème 15 (Extremums liés)**.**

Application. Dvpt 21 pb d'extremums dans un triangle.