217 - Sous-variétés de $\mathbf{R}^n$. Exemples.

1 Définitions et premiers exemples

Définition 1. Un sous-ensemble $M \subset \mathbf{R}^n$ est appelé une *sous-variété* de dimension p de $\mathbf{R}^n$ si pour tout $a \in M$, il existe des voisinages ouverts de a et 0 dans $\mathbf{R}^n$ et un difféomorphisme $F : U \to V$ tels que $F(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^p \times \{0\})$.

Exemple. Dimension 0, $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{T}^n$, ouverts, sea, courbes, pas cône, pas segment.

Proposition 1. *L'image par un difféo de $\mathbf{R}^n$ d'une sous-var de dimension p est une sous-var de dimension p. Un ouvert d'une sous-variété est encore une sous-variété.*

Remarque. Une sous-variété de dimension p est localement difféomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^p$, en particulier elle est localement connexe par arcs.

Définition 2. Immersion, submersion.

Théorème 1 (Des sous-variétés)**.** *[Laf p. 29], [Rou].*

Fonctions implicites, inversion locale

Exemple. $x = (2+\sin t \sin u)\sin(2u)$, $y = (2+\sin t \sin u)\cos 2u$, $z = \sin t \cos u$ paramètre le ruban de Möbius [Laf].

Définition 3. Plongement.

Proposition 2. *Condition nécessaire pour être un plongement, submersion... [Laf p. 67]*

Théorème 2 (Rou)**.** *Rang constant.*

Application (Laf)*.* La préimage est une variété de dim blabla.

Théorème 3 ([Laf])**.** *Une sous-variété connexe de dimension 1 est difféomorphe à $\mathbf{S}^1$ si elle est compacte, à $\mathbf{R}$ sinon.*

2 Espace tangent, fonctions différentiables

Définition 4. Vecteur tangent.

Exemple. Point de rebroussement.

Définition 5. Espace tangent. Espace normal.

Proposition 3. *L'espace tangent en un point est un ev.*
Il dépend du point de la variété de manière différentiable (les vecteurs d'une base dépendent du point de la variété de manière différentiable).

Proposition 4 ([Rou])**.** *Expression de l'espace tangent dans les différentes définitions de sous-variété.*

Exemple. Courbe, sphère.

Proposition 5. *Le fibré tangent (et le fibré normal) peut être muni d'une structure de sous-variété de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$*.*

Théorème 4 (Extremums liés)**.**

Application. Inégalité arithmético-géométrique.

Application. Pb d'extremums dans un triangle [FGN 3].

Application (Gou p. 317). .

Définition 6. Fonction différentiable. Difféo.

Exemple. Restriction de $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ à M.

Proposition 6. *Différentielle d'une composée.*

Proposition 7. *Critère de difféomorphie.*

Théorème 5. *Voisinages tubulaires.*

Théorème 6 (du type Jordan)**.** *Soit M une variété connexe de $\mathbf{R}^n$ de codimension 1. Alors le complémentaire de M possède au plus deux composantes connexes.*

Proposition 8. *Partitions de l'unité.*

Théorème 7 (Whitney)**.**

Théorème 8 (Sard)**.**

3 Applications aux ensembles de matrices

Exemple. Gl_n, S_n^{++} sont des sous-var de $M_n(\mathbf{R})$.

Exemple (Rou p. 284, Laf p. 31). Sl_n, O_n, SO_n rang donné.

Proposition 9. *L'addition et la multiplication sont lisses.*

Proposition 10. *Espace tangent de O_n, Sl_n.*

Exemple. La décomposition polaire est un C^∞-difféo.

Théorème 9. *L'exponentielle est C^∞ de différentielle...*

Proposition 11 (Laf)**.** *Sous-groupes à un param de Gl_n.*

Théorème 10. *Critère de difféomorphie de* exp *[M-T].*

Application. Applications aux sous-groupes classiques.

4 Étude métrique en petites dimensions

4.1 Courbes de $\mathbf{R}^2$

On considère un arc géométrique Γ C^k, $k \geq 2$, orienté et régulier, de représentation normale $\gamma = (I, f)$.

Définition 7. On appelle *courbure algébrique* de γ en s le réel $c(s)$ défini par $f''(s) = c(s)if'(s)$.

Remarque. La valeur absolue de la courbure algébrique est égale à la courbure classique. Plus précisément, $c = [f', f'']$.

Proposition 12. *Dans le plan, deux arcs géométriques ayant la même courbure algébrique sont identiques à isométrie près.*

Exemple. Dans le plan, les arcs de courbure constante non nulle sont les cercles.

Théorème 11 (des quatre sommets, [BG])**.** *Soit Γ un arc géométrique de Jordan convexe régulier de classe C^3. Alors Γ possède au moins quatre sommets, i.e. quatre points où la dérivée de la courbure s'annule.*

Proposition 13 (Calcul pratique de la courbure)**.** *Soit (J, g) un représentant quelconque de l'arc géométrique Γ. Alors la courbure algébrique est donnée par*

$$c(t) = \frac{[g'(t), g''(t)]}{\|g'(t)\|^3}$$

Exemple (Limaçon de Pascal, [BG]). C'est la courbe donnée en polaires par $\rho(\theta) = 1 + 2\cos\theta$. Sa courbure est $c(\theta) = \frac{9+6\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^{3/2}}$.

4.2 Les surfaces de R^3 ([Rou], [Aud], [LFA])

Soit Σ une surface de $\mathbf{R}^3$ de classe C^3 et $p \in \Sigma$.

Théorème 12 (Lemme de Morse).

Proposition 14. *On suppose que Σ est définie par un paramétrage cartésien $z = f(x,y)$ où $f : U \to \mathbf{R}$, avec U ouvert de $\mathbf{R}^2$. Soit $a \in U$ d'image p. Alors :*
- *Si $Hf(a)$ est définie, alors la surface Σ reste (localement) du même côté du plan tangent en p. p est dit* elliptique.
- *Si $Hf(a)$ est non dégénérée mais pas de signe constant, il existe des points de Σ arbitrairement proches de p de chaque côté du plan tangent. p est dit* hyperbolique.

Exemple. Les exemples les plus classiques de cela sont bien sûr les paraboloïdes et les ellipsoïdes.

Définition 8. La restriction du produit scalaire euclidien à $T_p\Sigma$ est appelé *première forme quadratique fondamentale* en p, et notée I_p.

Proposition 15. *Si Σ est donnée par une paramétrisation $f : U \to \mathbf{R}^3$, on pose $E = \|\frac{\partial f}{\partial u}(a)\|^2$, $F = \langle \frac{\partial f}{\partial u}(a), \frac{\partial f}{\partial v}(a)\rangle$, et $G = \|\frac{\partial f}{\partial v}(a)\|^2$. Si un vecteur $v \in T_p\Sigma$ s'écrit $v = \lambda\frac{\partial f}{\partial u}(a) + \mu\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, alors $I_p(v,v) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2$.*

Proposition 16. *Si Σ est donnée par une paramétrisation $f : U \to \mathbf{R}^3$ et Γ est l'image de l'arc plan γ défini par la paramétrisation $[a,b] \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (u(t), v(t))$, alors la longueur de Γ est*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + 2fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2 dt}$$

Définition 9. On munit localement Σ d'une orientation. L'application qui à p associe le vecteur normal orienté à Σ en p est appelée *application de Gauss* et notée $n(p)$. Sa différentielle est appelée *endomorphisme de Weingarten.*

Définition 10. La *seconde forme fondamentale* de Σ en p est la forme bilinéaire sur $T_p\Sigma$ telle que $I\!I_p(X,Y) = -\langle d_p n(X), Y\rangle$.

Proposition 17. *Soit γ une courbe paramétrée par longueur d'arc tracée sur Σ telle que $\gamma(0) = p$. Alors $\langle \gamma''(0), n(p)\rangle = I\!I_p(\gamma'(0), \gamma'(0))$.*

Proposition 18. *La forme bilinéaire $I\!I_p$ est symétrique.*

Définition 11. On appelle *courbure de Gauss* en p et note $K(p)$ le produit du maximum et du minimum de $X \mapsto I\!I_p(X,X)/I_p(X)$ sur l'ensemble des vecteurs non nuls de $T_p\Sigma$.

Exemple. La courbure de Gauss d'une sphère est positive en tout point, celle d'un plan ou d'un cylindre est identiquement nulle, celle du paraboloïde hyperbolique est négative en tout point.

Proposition 19. *Le point p est elliptique ssi $K(p) > 0$ et hyperbolique ssi $K(p) < 0$.*

Définition 12. Deux nappes Σ et Σ' paramétrées par resp. f et g sont dites *isométriques* si $\forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^2$, $m \in U$, $\langle df_m(\xi), df_m(\eta)\rangle = \langle dg_m(\xi), dg_m(\eta)\rangle$.

Théorème 13 (*theorema egregium* de Gauss)**.** *Si deux nappes de classe C^3 sont isométriques, alors elles ont même courbure de Gauss.*