218 - Applications des formules de Taylor.

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Énoncés et premiers exemples

Ref : [Gou], [FGN1], [FGN2]

Théorème 1 (Taylor avec reste intégral).

Remarque. Généralisation de $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Application. Maximum de $\int_0^1 f''^2$, [FGN2, p.25].

Théorème 2 (Taylor-Young).

Application. Itération du sinus et autres fonctions, [FGN1 p.99].

Application. Méthode de Laplace.

Théorème 3 (Taylor-Lagrange).

Remarque. Généralisation EAF.

Proposition 1. *EAF généralisée, [Gou p.72].*

Application. Règle de l'Hôpital [Gou].

Application. Laguerre, [FGN2 p.138].

Application. Polynôme, [FGN1 p.266].

Application. Asymptotique du point c, [Gou p.81].

Théorème 4 (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Remarque. Généralisation IAF.

1.2 Développements limités

Proposition 2. *DLs usuels.*

Proposition 3. *Dérivation, intégration des DLs.*

Application. Calcul de limites et de développements asymptotiques, pax ex $\frac{x \sin x}{\cos x - 1} \to -2$...

1.3 Développements en série entière

Proposition 4. *Condition de DSE (par Taylor-Lagrange).*

Proposition 5. *DSE usuels.*

Théorème 5 (Bernstein)**.** *[Gou p.250].*

Application. RCV de tan est $\pi/2$.

Théorème 6. *Condition d'analyticité par majoration des dérivées successives, [FGN2 p.232].*

Théorème 7 (Borel)**.** *[FGN2]*

Application. Application de [Rou p.359].

2 Fonctions vectorielles

2.1 Énoncés et généralités

Énoncés des théorèmes [Vinx], [Rou]

Application. Caractérisation de la convexité.

Théorème 8 (Hadamard)**.** *[Vinx p. 25].*

Corollaire 1 (Vinx p.33)**.** .

Théorème 9 (Rou p. 323)**.** .

Théorème 10 (Morse)**.** *[Rou p.354].*

2.2 Conditions d'extremums

Du premier et du second ordre.

Application (Principe du maximum, [Gou])*.* On note D le disque unité de $\mathbf{R}^n$ et suppose que $\overline{D} \subset \Omega$. Si $\Delta f = 0$ sur D (f harmonique), alors pour tout $x \in D$, $\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$.

Théorème 11 (Extremums liés)**.**

Application. Dvpt 21 pb d'extremums dans un triangle.

2.3 Sous-variétés

Théorème 12 (Des sous-variétés)**.** *[Laf p.29].*

Exemple (Laf p. 31)*.* Dimension 0, $\mathbf{S}^n$, $\mathbf{T}^n$, ouverts, sea, courbes, pas cône, pas segment, O_n.

Théorème 13. *Morse.*

3 Analyse numérique

3.1 Calcul de π

Formule de Machin, DL de arctan.

3.2 Accélération de convergence

Δ^2 d'Aitken [Pommelet].

3.3 Méthode de Newton

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbf{R})$, telle que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et que $f(a) < 0 < f(b)$. Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(c) = 0$ (un tel c existe et est unique). Cela revient à chercher un point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; l'avantage de cette fonction F est que sa dérivée en le point fixe est nulle : la convergence est alors au moins quadratique.

Proposition 6. *Il existe un voisinage $J \subset [a,b]$ de c tel que F soit contractante sur J. Alors $\forall x_0 \in J$, $F^n(x_0) \to c$ et $\exists K > 0$ tel que $|F^{n+1}(x_0) - c| \leq K|x_n - c|^2$*

Exemple. Approximation de la racine carrée : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ x \mapsto x^2 - y$ admet un unique zéro $a = \sqrt{y}$ que l'on peut approcher par la méthode de Newton. Prenant $x_0 \geq a$, on a une majoration de l'erreur : $0 \leq x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

3.4 Approximations d'intégrales

Éventuellement...

Références

FGN 1 et 2
Gourdon
Beck
Rouvière
Demailly
Pommelet