219 - Problèmes d'extremums.

Définition 1. Maximum, minimum, extremum.

Existence, unicité, calcul

1 Cadre topologique

1.1 Compacité

Proposition 1. *Continue sur compact atteint ses bornes.*

Application.
– équivalence des normes
– distance à un sev atteinte en dim finie
– d'Alembert-Gauss
– diagonalisation opérateurs symétriques
– théorème de point fixe pour une application "presque" contractante
– Triangle d'aire maximale inscrit dans un cercle [Pommelet]

1.2 Convexité

Définition 2. Application convexe.

Proposition 2. *Convexe + majorée implique constante.*

Proposition 3. *f est convexe ssi $\forall a, b, \lambda$, $(f + \lambda Id)_{|[a,b]}$ atteint son sup en a ou en b.*

Proposition 4. *Unicité minimum fonction convexe.*

Proposition 5 (Inégalités de convexité)**.**
– *somme-puissance : Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz.*
– *arithmético-géométrique*
– *FGN1 p. 285.*

Application. Boîte de volume maximal.

Théorème 1. *Ellipsoïde de John.*

Application. Sous-groupes compacts de Gl_n.

1.3 Théorème de projection dans un Hilbert

Théorème 2. *Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et C un cvx fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $p \in C$ tq $\|x_p\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$. C'est la projection de x sur C. Si on note p_C l'application qui à x associe sa projection sur C, celle-ci est l'unique élément de C tel que $Re(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0$ pour tout $y \in C$. De plus, l'aplication p_C est 1-lipsch.*

Corollaire 1. *Soit F un sev fermé de H Hilbert. Pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $p \in H$ tq $p \in F$ et $x - p \in F^{\perp}$. De plus, l'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective, et H se décompose en somme directe orthogonale $H = F \oplus F^{\perp}$. En particulier, un sev F est dense ssi $F^{\perp} = \{0\}$.*

Application. Hahn-Banach géométrique.

Théorème 3 (Inégalité isopérimétrique)**.** *Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ une courbe de Jordan continue par morceaux de longueur L enfermant une surface S. Alors $L^2 \geq 4\pi S$, avec égalité si et seulement si γ définit un cercle parcouru une fois.*

Proposition 6. *Distance et matrice de Gram.*

Théorème 4 (Müntz)**.**

2 Calcul différentiel

2.1 Sur un ouvert

Proposition 7. *Extremum implique $df(a) = 0$.*

Corollaire 2 (Rolle)**.**

Application. TAF.

Application (Théorème des quatre sommets, [BG]). Soit Γ un arc géométrique de Jordan convexe régulier de classe C^3. Alors Γ possède au moins quatre sommets, i.e. quatre points où la dérivée de la courbure s'annule.

Théorème 5 (Sard)**.**

Définition 3. La différentielle seconde de f en a est une forme bilinéaire ; sa matrice représentative est appelée *hessienne* de f en a et notée $Hf(a)$.

Théorème 6 (Schwarz)**.** *$d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique, autrement dit $Hf(a)$ est symétrique.*

Théorème 7. *On note (s, t) la signature de $Hf(a)$. Alors :*
- *Si f admet un minimum local en a, alors $df(a) = 0$ et $Hf(a)$ est positive*
- *Si f admet un maximum local en a, alors $df(a) = 0$ et $Hf(a)$ est négative*

Si de plus on suppose $df(a) = 0$:
- *Si $Hf(a)$ est définie positive ($(s,t) = (2,0)$), alors f admet un minimum local strict en a*
- *Si $Hf(a)$ est définie négative ($(s,t) = (0,2)$), alors f admet un maximum local strict en a*
- *Si $(s,t) = (1,1)$, f n'est pas extrémale en a.*

Exemple. La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^3$ possède un point critique en $(0,0)$; sa hessienne en 0 est positive (mais pas définie positive) bien que f n'admette pas de minimum en $(0,0)$.
La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 e^x + xy - \cos y$ possède un minimum local strict en 0.

Application (Principe du maximum, [Gou]). On note D le disque unité de $\mathbf{R}^n$ et suppose que $\overline{D} \subset \Omega$. Si $\Delta f = 0$ sur D (f harmonique), alors pour tout $x \in D$, $\min_{\|y\|=1} f(y) \leq f(x) \leq \max_{\|y\|=1} f(y)$.

2.2 Sur un ouvert convexe

Proposition 8. *f est convexe ssi sa hessienne est positive en tout point.*

Application (Régression linéaire, [Rou p. 384]). Étant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbf{R}^2$, avec les x_i non tous égaux, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$ uniques tels que la somme $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$ soit minimale.

Théorème 8 (Méthode de Newton)**.**

Théorème 9 (Méthode du gradient à pas optimal)**.**

2.3 Problèmes sous contraintes

Théorème 10 (Extremums liés)**.**

Application (Gou p. 317). .

Application. Inégalité arithmético-géométrique.

Application. Dvpt 21 pb d'extremums dans un triangle.

Application. Hadamard ?

Application (Ale p. 140). Sous-groupes SO_n.

Références

Rouvière
Gourdon
Beck
Brézis
Allaire

Alessandri
Pommelet
FGN alg. 3/ana. 1