220 - Equations différentielles $X' = f(t, X)$; exemples d'études qualitatives des solutions.

1 Définitions et théorèmes généraux

1.1 Énoncé du problème

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : I \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue. On s'intéresse au problème :

$$x'(t) = f(t, x), \qquad \text{(E)}$$

avec $x \in C^1(J, \Omega)$ et $J \subset I$.

Définition 1. – Une solution de (E) est la donnée de (x, J), où $x \in C^1(J, \Omega)$ et $J \subset I$, tels que l'équation (E) soit vérifiée pour tout élément de J
– Une solution du problème de Cauchy ($x(t_0) = x_0$, (E)), avec $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ est une solution de (E) vérifiant $x(t_0) = x_0$
– Une solution (x, J) est dite *maximale* si elle ne peut pas être prolongée, i.e. si (y, K) est une autre solution de (E) telle que $J \subset K$ et $y_{|K} = x$, alors $J = K$
– Une solution est dite *globale* si $I = J$.

Remarque. Toute équation différentielle d'ordre quelconque se ramène à une équation différentielle d'ordre 1 : si on a $x^{(d)} = f(x^{(d-1)}, \dots x', x, t)$, on pose $X = (x^{(d-1)}, \dots, x', x)$ et on a $X' = F(X)$ avec $F(x_{d-1}, x_{d-2} \dots, x_0) = (f(x_{d-1} \dots, x_0, t), x_{d-1}, \dots, x_1)$.

1.2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Théorème 1. *Toute solution y de (E) se prolonge en une solution maximale de (E).*

Théorème 2 (Cauchy-Peano-Arzela)**.** *Tout problème de Cauchy associé à (E) admet des solutions pour toute donnée initiale : $\forall x_0 \in \omega, \forall t_0 \in I, \exists (x, [t_0 - T, t_0 + T])$ solution de (E) tq $x(t_0) = x_0$.*

Remarque. On n'a pas d'unicité, comme le montre l'exemple $x' = 2\sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, dont une famille de solutions possibles est $x_\lambda(t) = 0$ si $t \leq \lambda$, $(t - \lambda)^2$ sinon.

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz)**.** *On suppose de plus que f est localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors tout problème de Cauchy associé à (E) admet localement une unique solution. Plus généralement, tout problème de Cauchy associé à (E) admet une unique solution maximale (cf [RDO] pour des précisions sur les cylindres de sécurité).*

Application. S'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que pour tout $t \in I$, $f(x_0, t) = x_0$, alors toute solution passant par le point x_0 est la solution constante égale à x_0.

Application. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sur $\mathbf{R}$ possède une structure d'espace affine sur $\mathbf{R}$. La donnée initiale des $n-1$ premières dérivées i-èmes détermine de façon unique la solution de l'équation.

Définition 2. Ainsi à toute condition initiale (t_0, x_0) on associe une solution maximale, définie sur J_{x_0}. Pour $t_0 \in I$, peut alors définir le *flot* de (E) comme étant la fonction $\varphi(x,t)$, telle que pour tout $x \in \Omega$, la fonction $\varphi(x,.)$ soit définie sur J_x et coïncide avec la solution maximale de (E) passant par x_0 en t_0.

Proposition 1 ([Hub])**.** *L'ensemble de définition du flot est ouvert.*

1.3 Temps de vie et prolongement

Lemme 1 (Grönwall)**.** *Soit $x \in C^0([a,b], \mathbf{R}^n)$ et $c \in [a,b]$ tels qu'il existe deux constantes $A, B \in R_+$ telles que $\forall t \in [a,b], x(t) \leq A + B\left|\int_c^t x(s)ds\right|$, alors $\forall t \in [a,b], x(t) \leq Ae^{b|t-c|}$.*

Application ([Gou p. 378])*.*

Lemme 2 ("Des bouts" [Gou ?])**.** *Dans les hypothèses du th de Cauchy-Lipschitz, si (x, J) est une solution maximale de (E) telle que $\sup J < \sup I$ (resp. $\inf I < \inf J$), alors $\forall K$ compact de Ω, $\exists V$ vois. de $\sup J$ (resp. $\inf J$) dans I tel que $\forall t \in V, x(t) \notin K$.*

Exemple. La solution de $x' = x^2$, $x(0) = 1$ explose en temps fini (en $t = 1$).

Exemple ([Gou p. 382])*.*

Corollaire 1. *Pour A et B continues de I vers $M_n(\mathbf{C})$, l'équation différentielle linéaire $X' = A(t)X + B(t)$ a toutes ses solutions globales.*
Plus généralement, si f est bornée ou globalement lipsch., alors de même toutes les solutions sont globales.

1.4 Dépendance aux conditions initiales

Théorème 4. *On se place dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit (x, J) une solution, $[a,b] \subset J$, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall y_0 \in B(x(a), \eta)$, la solution de (E) passant par y_0 en a soit au moins définie sur $[a,b]$, et vérifie $\forall t \in [a,b], \|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$.*

Théorème 5. *Si f est de classe C^k sur son domaine de définition, alors le flot de (E) est de classe C^k.*

Remarque. Si f est de classe C^k, alors ses solutions sont de classe C^{k+1}.

Définition 3. Une fonction f est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact par f est un compact.

Proposition 2. *Soit f une fonction de classe C^1. Alors f est propre ssi $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.*

Théorème 6 (Hadamard,[Z-Q])**.** *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $df(x)$ soit inversible. Si de plus f est propre, alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.*

Exemple. Soit f une fonction de classe C^1 et k-dilatante, $k > 0$. Alors f est un C^1-difféo sur son image.

2 Équations autonomes

On considère l'équation *autonome* $x' = f(x)$ (E), avec f de classe C^1.

Remarque. Si x est solution de (E), alors $x(c + .)$ est aussi une solution de (E) pour tout $c \in \mathbf{R}$.

2.1 Orbites

Définition 4. L'*orbite* de $x \in \Omega$, notée O_x, est $O_x = \{\varphi(t, x) \mid t \in J_x\}$.

Proposition 3. *Les orbites forment une partition de Ω, appelée* portrait de phase.

Définition 5. Un point x est dit *stationnaire* si $f(x) = 0$.

Proposition 4. *Soit (y, J) une solution maximale tq $y(t) \to_{t\to\sup J} m$. Alors $\sup J = +\infty$ et m est un point stationnaire.*

Tracé : dessin des isoclines et du champ de vecteurs [Hub].

2.2 Étude locale

Définition 6. Soit x_0 un point d'équilibre de f.
- x_0 est dit *stable* si $\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 : \forall x$ solution tq si $\|x(t_0) - x_0\| \leq \delta$, x est définie pour tout $t \geq t_0$ et $\|x(t) - x_0\| \leq \varepsilon$.
- x_0 est dit *asymptotiquement stable* si $\exists\eta > 0 : \forall x$ solution tq si $\|x(t_0) - x_0\| \leq \delta$, x est définie pour tout $t \geq t_0$ et $x(t) \to_{t\to+\infty} x_0\|$.

Définition 7. Soit x_0 un point d'équilibre. Le *linéarisé* de f en x_0 est $Jf(x_0)$.

On cherche alors à déduire le comportement de (E) de celui de l'équation $x' = Jf(x_0).x$. Pour simplifier, on supposera par la suite que $x_0 = 0$.

Théorème 7 (Liapunov)**.** *[Rou p. 143].*

2.3 Cas de la dimension 2

Proposition 5. *Zéros isolés.*

Théorème 8. *Sturm [ZQ p. 407]. Application au cas où q est majorée.*

On suppose dans un premier temps $f = A$ linéaire. On s'intéresse aux vp de A (à priori dans $\mathbf{C}$), ce qui va fournir l'allure des orbites.
Cf ZQ p.384.

Théorème 9 (Linéarisation)**.** *[ZQ p. 390].*

Théorème 10 (Poincaré-Bendixson)**.** *[G-T].*

2.4 Minimum et stabilité [Rou p. 395] ?

2.5 Étude d'un exemple : l'équation de Lotka-Volterra

Blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla blablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablablabla

Références

RDO
Gourdon
Demailly
ZQ
Rouvière
Hubbard-West