221 - Équations différentielles linéaires. Exemples.

1 Solutions, ensemble des solutions

Définition 1. EDL. Équation homogène associée.

Exemple. Résolution de $y' = a(t)y(t)$. Décroissance radioactive...

Remarque. Remarque sur les équations linéaires d'ordre plus grand que 1.

Théorème 1. *Cauchy-Lipschitz.*

Remarque. Il n'y a pas forcément unicité si l'équation n'est pas résolue : cf ex. 9.33 Hauchecorne p. 185.

Proposition 1. *Structure de l'ensemble des solutions, dimension. Isomorphisme entre CI et solutions.*

Définition 2. Système fondamental.

Obtention d'un sys fond par des méthodes heuristiques + vérification licite

Définition 3. Wronskien. Wronskien d'une EDL scalaire d'ordre n.

Proposition 2. *CNS Sys fond.*

Proposition 3. *Expression du wronskien.*

Application (De C-L)*.* Équation intrinsèque d'un arc.

2 Résolution et aspects qualitatifs

2.1 Méthode de variation des constantes

Lemme de RDO + méthode.

Application. Aux EDL scalaires d'ordre n [RDO p. 192].

2.2 Équations aux coefficients constants

Théorème 2. *Forme générale de la solution de l'équation homogène/complète $y' = a.y + b(t)$ avec l'exponentielle [Pom p. 321] :*

$$y(t) = \exp\big((t - t_0)a\big).x_0 + \exp(ta). \int_{t_0}^{t} \exp(-u).b(u)du$$

Remarque. Il s'agit de calculer l'exponentielle.

Proposition 4. *Forme générale en fonction des valeurs des racines [RDO p. 200].*

Application. Équations linéaires scalaires à coefficients constants [RDO p. 204].

Matrice compagnon

2.3 Aspects qualitatifs

Exemple. Ex 5 p. 366 Gourdon.

Lemme 1. *Grönwall.*

Définition 4. Résolvante [Gou p. 383].

Proposition 5. *Continuité selon les CI.*

2.4 Cas de la dimension 2

Proposition 6. *Cas linéaire, ZQ p.384.*

Application. Circuit RLC [Gasquet-Witomski p. 181].

Proposition 7. *Zéros isolés.*

Proposition 8 ([Gou p. 378])**.**

Théorème 3. *Sturm [ZQ p. 407]. Application au cas où q est majorée.*

Proposition 9. *DSE d'une EDO d'ordre 2. [ZQ p. 408].*

3 Points d'équilibre et linéarisation

Définition 5. Soit x_0 un point d'équilibre de f.

- x_0 est dit *stable* si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x$ solution tq si $\|x(t_0) - x_0\| \leq \delta$, x est définie pour tout $t \geq t_0$ et $\|x(t) - x_0\| \leq \varepsilon$.
- x_0 est dit *asymptotiquement stable* si $\exists \eta > 0 : \forall x$ solution tq si $\|x(t_0) - x_0\| \leq \delta$, x est définie pour tout $t \geq t_0$ et $x(t) \to_{t\to+\infty} x_0\|$.

Définition 6. Soit x_0 un point d'équilibre. Le *linéarisé* de f en x_0 est $Jf(x_0)$.

On cherche alors à déduire le comportement de (E) de celui de l'équation $x' = Jf(x_0).x$. Pour simplifier, on supposera par la suite que $x_0 = 0$.

Théorème 4 (Liapunov)**.** *[Rou p. 143].*

Théorème 5 (Linéarisation en dimension 2)**.** *[ZQ p. 390].*

Étude d'une équation en exemple (RDO ?)

Références

RDO 4 et 5
ZQ
Pommelet
Hauchecorne
Gourdon
Hubbard-West ?