223 - Convergence des suites numériques. Exemples et applications

$\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$

1 Définition, opérations sur les limites

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Tend vers l, converge, diverge, tend vers $\pm\infty$.

Remarque. $\overline{\mathbf{R}}$.

Proposition 1. *Unicité limite dans* $\overline{\mathbf{R}}$.

Exemple. $(n^\alpha)_n$, suite stationnaire, suite géométrique.

Proposition 2.
- u_n, u_{2n}
- *Image par une applicaation continue, exemple* $u_n \to l \implies |u_n| \to |\ell|$
- *Convergente dans* $\mathbf{C} \implies$ *bornée*

Exemple. $((-1)^n)_n$ est bornée non convergente.
$n((-1)^n)_n$ est non bornée mais ne tend pas vers $\pm\infty$.

1.2 Propriétés d'ordre des limites dans R

Proposition 3. *Soit* $u_n \to \ell$
- *Si* $\ell > a$, *alors apcr* $u_n \geq a$.
- *Si apcr* $u_n \geq a$, *alors* $\ell \geq a$.

Proposition 4. *Si* $u_n \to \ell$ *et* $v_n \to \ell'$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}$, *tq* $u_n \leq v_n$ *apcr, alors* $\ell \leq \ell'$.

Théorème 1 (des gendarmes)**.**

Proposition 5 (Suites sous-additives)**.** *FGN 1.*

Application. Rayon spectral.

1.3 Théorèmes opératoires classiques

Proposition 6. *Théorèmes opératoires, dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *et dans* $\overline{\mathbf{C}}$ *: linéarité, produit quotient.*

2 Divers critères de convergence

2.1 Limite et suites monotone

Tout est dans le titre.

Application. La série $\sum 1/n^2$ converge.

Définition 2. Suites adjacentes.

Proposition 7. *Convergence des suites adjacentes.*

Corollaire 1. *Segments emboîtés.*

Proposition 8. *Approximation décimale.*

Application. CSSA.

2.2 Suites de Cauchy

Définition 3. Suite de Cauchy.

Proposition 9.
- *Convergente est de Cauchy.*
- *De Cauchy bornée.*
- *De Cauchy et une valeur d'adhérence convergente.*

Théorème 2 (Construction de $\mathbf{R}$)**.** *Comme complété de* $\mathbf{Q}$. *En particulier* $\mathbf{R}$ *est complet.*

Corollaire 2. $\mathbf{C}$ *est complet.*

Théorème 3. *Picard.*

Application. Exemple de résolution d'une équation polynomiale de gros degré.

2.3 Compacité

Théorème 4 (Bolzano-Weierstrass)**.**

Segments emboîtés

Proposition 10. *Convergent ssi 1 seule val d'adh.*

Exemple. Soit (u_n) bornée telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2 \to 0$. Alors (u_n) tend vers 0 [FGN p. 110].
Soit une suite $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ bornée. Si $(u_n + \frac{u_{2n}}{2})_n$ converge, alors il en est de même pour (u_n).

2.4 Utilisation de séries

Remarque. On a $u_N - u_0 = \sum_{k=1}^{N}(u_k - u_{k-1})$.

Proposition 11. *Si $\sum u_n$ cv, alors $u_n \to 0$.*

Théorème 5 (De Cesàro)**.** *Cf Pommelet.*

Théorème 6. *Taubérien fort.*

2.5 Utilisation de relations de comparaison

Proposition 12. *Relations de comparaison.*

Exemple. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$.

Proposition 13. *Règle de D'Alembert.*

Proposition 14 (Règle de Raabe-Duhamel)**.**

Application. Formule de Wallis, formule de Stirling.

3 Applications

3.1 Méthode de Newton [Rou p.152]

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbf{R})$, telle que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et que $f(a) < 0 < f(b)$. Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(c) = 0$ (un tel c existe et est unique). Cela revient à chercher un point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; l'avantage de cette fonction F est que sa dérivée en le point fixe est nulle : la convergence est alors au moins quadratique.

Proposition 15. *Il existe un voisinage $J \subset [a,b]$ de c tel que F soit contractante sur J. Alors $\forall x_0 \in J$, $F^n(x_0) \to c$ et $\exists K > 0$ tel que $|F^{n+1}(x_0) - c| \leq K|x_n - c|^2$*

Exemple. Approximation de la racine carrée : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ x \mapsto x^2 - y$ admet un unique zéro $a = \sqrt{y}$ que l'on peut approcher par la méthode de Newton. Prenant $x_0 \geq a$, on a une majoration de l'erreur : $0 \leq x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

3.2 Intégration

Théorème 7. *Somme de Riemann pour fonction CM.*

Application. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} \to \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[Arctan\, t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.
Méthode des rectangles...

Références

Gourdon
FGN
Rouvière
Demailly
Pommelet
J. Combes