224 - Comportement asymptotique des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

1 Généralités

On considère $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1.1 Définitions et critères de convergence

Définition 1. On dit que $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ *converge* vers $l \in \mathbf{K}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$. l est alors unique et est appelée la *limite* de la suite $(u_n)_n$.

Proposition 1. *Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.*

Exemple. La série $\sum 1/n^2$ converge car son terme général est majoré par la suite $u_N = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} \leq 2$.

Proposition 2. *Soient deux suites (a_n), $(b_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que (a_n) soit décroissante, (b_n) croissante et que pour tout n, $a_n \geq b_n$. Deux telles suites sont dites* adjacentes. *Alors (a_n) et (b_n) sont convergentes.*

Corollaire 1. *Segments emboîtés.*

Proposition 3. *Approximation décimale.*

Application. CSSA + estimation de l'erreur.

Définition 2. Une suite $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est dite de *Cauchy* si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}$: $\forall p, q \geq N$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$

Proposition 4. $\mathbf{K}$ *est complet : toute suite de Cauchy converge.*

Proposition 5. *Toute suite à valeurs dans un compact de* $\mathbf{K}$ *converge ssi elle possède une unique valeur d'adhérence.*

Exemple. Soit (u_n) bornée telle que $u_{n+1} - u_n - u_n^2 \to 0$. Alors (u_n) tend vers 0 [FGN p. 110].
Soit une suite $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ bornée. Si $(u_n + u_{2n}/2)_n$ converge, alors il en est de même pour (u_n).

Lemme 1 (Cesàro, [Pommelet]). *Soit $(u_n) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ convergeant vers l. Alors la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = 1/n \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ converge elle aussi vers l.*

Proposition 6. *Soit (u_n) une suite bornée de réels positifs. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \to 0$ ssi il existe une suite (n_k) str. croissante de densité 1 tq $u_{n_k} \to 0$.*

Théorème 1 (Stolz-Cesàro). ***faire !***

Proposition 7 (suites sous-additives). *Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ vérifiant pour tout m, n $u_{n+m} \leq u_n + u_m$. Alors la suite $(nu_n)_n$ converge vers $\inf_n nu_n$.*

Théorème 2. *Soit T un opérateur borné d'un $\mathbf{C}$-e.v.n. complet. Alors $\|T^n\|^{1/n}$ converge et tend vers le rayon spectral de T* ***En dim finie : Dunford****.*

1.2 Relations de comparaison

Blabla

1.3 Exemples de suites divergentes

$\sum 1/n, \ \sum 1/p, \ u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$...

1.4 Suites et séries

Remarque. Le comportement d'une suite $(u_n)_n$ est le même que celui de la suite $\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$.

Proposition 8. *Soit (u_n) une suite décroissante de réells positifs. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o(1/n)$.*

Proposition 9. *Soit une fonction $f : R_+ \to \mathbf{R}_+$ mesurable et décroissante, et posons $u_n = f(n)$. Alors la série $\sum u_n$ a le même comportement que l'intégrale $\int_0^\infty f(t) dt$.*

Application (Séries de Bertrand). Soit $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. Alors $\sum u_n$ cv ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Proposition 10. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de $\mathbf{K}$ telles que $u_n \sim v_n$. Alors :*
- *si $\sum u_n$ cv, alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_n \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_n$,*
- *si $\sum u_n$ dv, alors $\sum_{k=0}^{n} u_n \sim \sum_{k=0}^{n} v_n$,*

Théorème 3 (Critère des séries alternées). *Soit $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ une suite positive décroissante tendant vers 0. Alors la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge. De plus sa limite l vérifie $0 \leq l \leq u_0$.*

Exemple. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge. De plus sa limite vaut $\ln 2$.

2 Vitesse de convergence

Exemple de convergence lente. Soit une fonction $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ admettant en 0 un DL de la forme $f(x) = x - \alpha x^p + o(x^p)$, avec $\alpha > 0$ et $p \geq 2$. Alors pour $x_0 > 0$ assez petit, la suite récurrente (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers 0 et on a $x_n \sim (\alpha(p-1)n)^{-1/(p-1)}$.

2.1 Au voisinage d'un point fixe... [Rou]

On suppose que f est une fonction C^1 possédant un point fixe l.
1er cas : $|f'(l)| < 1$.
Alors $|f'(x)| \leq k < 1$ sur un voisinage $J \subset I$ de l ; pour tout $u_0 \in J$ la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l. Le point fixe est dit *attractif*.
Si $f'(l) \neq 0$, alors pour tout $u_0 \in J \setminus \{l\}$, $|u_{n+1} - l| \underset{+\infty}{\sim} |f'(l)||u_n - l|$. Si f est C^2, $f'(l) = 0$ et $f''(l) \neq 0$ (point critique non dégénéré), alors pour tout $u_0 \in J \setminus \{l\}$, $|u_{n+1} - l| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|f''(l)|}{2}|u_n - l|^2$; c'est dans ce second cas que la convergence est la plus rapide.
2nd cas : $|f'(l)| > 1$.
Alors $|f'(x)| \geq k > 1$ sur un voisinage $J \subset I$ de l ; pour tout $u_0 \in J$ la suite $f^n(u_0)$ ne converge pas vers l. Le point fixe est dit *répulsif*. Pour approcher un tel point fixe, on considère la fonction f^{-1}, qui est bien définie sur J.
Si $|f'(l)| = 1$, on peut si c'est possible regarder le signe de la première dérivée n-ième non nulle de f en l, avec $n \geq 2$. Celui-ci permettra d'étudier la position relative de la courbe par rapport à la première bissectrice, et donc d'avoir un critère de convergence locale. Néamoins la convergence sera d'autant plus lente que n sera grand.

2.2 Accélération de la convergence

Proposition 11. Δ^2 *: Pommelet, Baranger.*

3 Approximations

3.1 Méthode de Newton [Rou p.152]

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbf{R})$, telle que $f' > 0$ sur $[a, b]$ et que $f(a) < 0 < f(b)$. Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(c) = 0$ (un tel c existe et est unique). Cela revient à chercher un point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; l'avantage de cette fonction F est que sa dérivée en le point fixe est nulle : la convergence est alors au moins quadratique.

Proposition 12. *Il existe un voisinage $J \subset [a,b]$ de c tel que F soit contractante sur J. Alors $\forall x_0 \in J$, $F^n(x_0) \to c$ et $\exists K > 0$ tel que $|F^{n+1}(x_0) - c| \leq K|x_n - c|^2$*

Exemple. Approximation de la racine carrée : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ x \mapsto x^2 - y$ admet un unique zéro $a = \sqrt{y}$ que l'on peut approcher par la méthode de Newton. Prenant $x_0 \geq a$, on a une majoration de l'erreur : $0 \leq x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

3.2 Calcul de π

Formule de Machin, développement de arctan et CSSA.

3.3 Approximation des réels par les rationnels

Proposition 13 (FGN1 p. 25)**.** .

4 Densité et orbites périodiques

Théorème 4 (Weyl)**.**

Définition 3. Transitivité.

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1/2 \\ -2x+2 & \text{si } x > 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = x \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. On décompose x en base 2 : $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^k$. On montre alors que la dynamique de f est chaotique, c'est à dire que l'ensemble des $x \in [0,1]$ engendrant une suite périodique est dense, qu'il existe une orbite dense et que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [0,1],\ \exists x' \in [0,1] \ :\ |x - x'| \leq \varepsilon \ :\ \forall p \in \mathbf{N}\ \exists n \geq p \ :\ |f^n(x) - f^n(x')| \geq 1/2$ (c'est la sensibilité aux conditions initailes).

Théorème 5 (Sarkovskii[F-G1])**.** *Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue ayant un point périodique de période 3. Alors il existe des points périodiques de toutes les périodes entières.*