228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelle d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

1 Définitions et généralités

Soit un sous-ensemble D de $\mathbf{R}$ et $f : D \to \mathbf{R}$.

1.1 Continuité

Définition 1. Soit $a \in D$. f est dite *continue* en a si $f(x) \to_{x\to a,\, x\in D} f(a)$ i.e. si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ |x-a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
f est dite *continue* sur D si elle l'est en tout point de D.

Proposition 1. *f est continue en $a \in D$ si $\forall (x_n) \in D^{\mathbf{N}},\ x_n \to a$, on a $f(x_n) \to f(a)$.*

Exemple. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbf{R}$.
La fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est continue nulle part.

Définition 2. On note $C^0(D, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbf{R}$.

Proposition 2. *$C^0(D, \mathbf{R})$ est une $\mathbf{R}$-algèbre.*

Proposition 3. *Soit $f \in C^0(D, \mathbf{R})$ et $g \in C^0(f(D), \mathbf{R})$.*
- *$g \circ f$ est continue sur D.*
- *$1/f$ est continue sur $D \setminus \{x \in D \mid f(x) = 0\}$.*

Exemple. $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}; x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbf{R}^*$.

Proposition 4. *Si $f : D \to \mathbf{R}$ est continue sur $D\setminus\{a\}$, et si $\exists \lim_{x\to a} f(x) = l$, alors $\tilde{f} : D \to \mathbf{R}$, égale à f en dehors de a et à l en a est continue sur D. C'est le* prolongement par continuité *de f en a.*

Exemple. $f : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin(x)/x$ est prolongeable par continuité en 0, avec $f(0) = 1$.

Continuité à droite, oscillation, homéo ?

Définition 3. $f : D \to \mathbf{R}$ est dit *uniformément continue* sur D si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \forall x, y \in D,\ |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Remarque. L'unifirme continuité implique la continuité, mais pas l'inverse, comme le montre l'exemple $x \mapsto x^2$.
Une fonction lipschitzienne est uniformément continue, mais une fonction uniformémément continue n'est pas forcément lipschitzienne (regarder $x \mapsto \sqrt{x}$.

1.2 Dérivabilité

On suppose désormais que D est un ouvert de $\mathbf{R}$.

Définition 4. Soit $f : D \to \mathbf{R}$. f est *dérivable* en $a \in D$ si la limite $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, on pose $f'(a)$ cette limite. f est dite *dérivable* sur D si elle l'est en tout point de D.

Exemple. Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbf{R}$

Remarque. Toute fonction dérivable sur D est continue sur D, mais la réciproque est fausse (regarder $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0).

Proposition 5. *L'ensemble des fonctions dérivables sur D est une $\mathbf{R}$-algèbre, avec $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$ et $(fg)' = f'g + fg'$.*
Si $a \in D$ et $f(a) \neq 0$, avec f dérivable en a, alors $1/f$ est dérivable en a et on a : $(1/f)'(a) = -f'(a)/f(a)^2$.
Si $f : D \to \mathbf{R}$ et $g : f(D) \to \mathbf{R}$ sont dérivables en resp. a et $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a : $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.
Si $f : D \to f(D)$ est une bijection dérivable de D sur $f(D)$, alors f^{-1} est dérivable sur $f(D)$ et on a $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$ pour tout x.

Définition 5. On définit par récurrence la dérivée n-ième de $f : D \to \mathbf{R}$ par $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ partout ou cette quantité est définie. On dit que $f : D \to \mathbf{R}$ est de classe C^n si elle est n-fois dérivable sur D et si cette dérivée n-ième est continue.

Remarque. Une fonction dérivable n'est pas nécessairement de classe C^1, comme le montre par exemple la fonction $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ prolongée par continuité en 0 par 0, dérivable en 0 de dérivée non continue en 0.

Proposition 6 (Formule de Leibniz)**.** *Si f et g sont n-fois dérivables en x, alors fg l'est aussi et on a :*

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

2 Propriétés

2.1 Intégration

Théorème 1 (dit « fondamental de l'analyse »)**.** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Posons $F : [a,b] \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Alors F est dérivable de dérivée égale à f.*

Théorème 2 (Taylor avec reste intégral)**.** *Soit $f \in C^{n+1}(I, \mathbf{R})$. Alors pour tous $a, b \in I$, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Théorème 3 (Taylor-Young)**.** *Soit $f \in C^n(I, \mathbf{R})$. Alors pour tous $a, b \in I$, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(b-a)$$

Application. DLs, calcul de limites...

2.2 Compacité et connexité

Proposition 7. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Corollaire 1. *Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue sur I segment de $\mathbf{R}$, alors f est bornée sur I et atteint ses bornes.*
Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Application. D'Alembert-Gauss, équivalence des normes.

Théorème 4 (Heine)**.** *Si $f : I \to \mathbf{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue.*

Théorème 5 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.*

Exemple. Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Corollaire 2. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ continue. Alors si $f(I) \subset I$, ou si $I \subset f(I)$, alors f possède un point fixe.*

Application (Sarkovskii[F-G1]). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue ayant un point périodique de période 3. Alors il existe des points périodiques de toutes les périodes entières.

Corollaire 3. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction injective continue. Alors f est monotone.*

Théorème 6 (Rolle)**.** *Soit f une fonction continue sur$[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Théorème 7 (Accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur$[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c)(b-a) = f(b)-f(a)$.*

Corollaire 4. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors :*
- *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ ssi $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur $]a,b[$.*
- *f est constante sur $[a,b]$ ssi $f' = 0$ sur $]a,b[$.*

Théorème 8 (Darboux)**.** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, dérivable sur l'intéieur de I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.*

Théorème 9 (inégalité des accroissements finis)**.** *Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et vérifie $|f'| \leq M$ sur $]a,b[$, alors $|f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$.*

Corollaire 5. *Soit $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f'(x) \to_{x\to a} l$. Alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

Exemple. $f : x \mapsto \exp(1/x^2)$ prolongée en 0 par 0 est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

Théorème 10 (Borel)**.** *Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. Alors il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n\, \forall n$.*

Corollaire 6. *Si $f \in C^\infty([a,b],\mathbf{R})$, avec a et b dans $\mathbf{R}$ et si les dérivées successives de f admettent des limites finies à droite et à gauche en a et b, alors f se prolonge en une fonction dans $C_c^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$.*

Théorème 11 (Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f \in D^{n+1}([a,b],\mathbf{R})$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tq :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Application. Lagrange, [FGN1 p.267].

2.3 Suites, séries, densité

Proposition 8. *On suppose que les $f_n : I \to \mathbf{R}$ sont continues sur I. Si f_n cvu vers f, alors f est continue.*

Proposition 9. *On suppose que les $f_n : I \to \mathbf{R}$ sont C^1 sur I. Si f_n cvs vers f et f_n' cvu vers g, alors f est C^1 sur I, $f' = g$ et la suite (f_n) cvu vers f.*

Corollaire 7. *Les C^k sont des Banach.*

Théorème 12 (Dini)**.** *Soit I un compact de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $C^0(I,\mathbf{R})$. On suppose que la suite (f_n) est croissante et converge simplement vers une fonction f elle-même continue. Alors la convergence de la suite (f_n) est uniforme.*

Ascoli !

Définition 6. Soit I un segment de $\mathbf{R}$. On dit qu'une famille $S \subset C^0(I, \mathbf{R})$ *sépare les points* si $\forall x, y \in I,\ x \neq y,\ \exists f \in S : f(x) \neq f(y)$.

Théorème 13 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit K un segment de $\mathbf{R}$ et S une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Banach de $C^0(I, \mathbf{R})$. Alors S est dense si et seulement si S sépare les points.*

Corollaire 8.
- *Théorème de Weierstrass : densité des polynômes à coefficients réels.*
- *Théorème de Féjer (ou de Weierstrass trigonométrique) : densité des polynômes trigonométriques.*
- *Densité des TF [ZQ].*
- *Séparabilité de $C(X, \mathbf{R})$ (avec Urisohn).*

Proposition 10 ([ZQ])**.** *Les fonctions nulle part dérivables forment un G_δ dense de l'ensemble de $C^0([0,1], \mathbf{R})$.*

Proposition 11. *L'ensemble des points de continuité d'une fonction forme un G_δ.*

Exemple. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $\frac{1}{q}$ si $x = p/q$ irréductible, est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et discontinue sur $\mathbf{Q}$.

Proposition 12. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ limite simple d'une suite de fonctions continues (en particulier si f ent une dérivée). Alors les points de continuité de f forment un G_δ dense de $\mathbf{R}$.*

2.4 Conditions de régularité

Blablablabla...