229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications

1 Définition et caractérisations

1.1 Définitions

Définition 1. Soient un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbf{R}$.
- f est dite *croissante* (resp. *décroissante*) si $\forall a, b \in I$, $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$).
- f est dite *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*) si les inégalités sont strictes.
- f est dite *(strictement) monotone* si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Définition 2. Soient un e.v. E, un sous-ensemble convexe C de E et une fonction $f : C \to \mathbf{R}$.
- f est dite *convexe* si $\forall a \neq b \in C$, $\forall t \in [0,1]$, $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.
- f est dite *strictement convexe* si l'inégalité est stricte.
- f est dite *concave* si $-f$ est convexe.

Exemple. – $x \mapsto x^\alpha$ est convexe pour $\alpha \geq 1$ et concave pour $0 \leq \alpha \leq 1$.
- $x \mapsto \ln x$ est concave.
- $x \mapsto \exp x$ est convexe.

1.2 Théorèmes opératoires classiques

Proposition 1. *Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$. Sur les ensembles ou cela a un sens,*
- *si f et g sont croissantes, alors $f + g$ l'est aussi,*
- *si f et g sont croissantes et positives, alors $f.g$ est croissante,*
- *si f et g sont croissantes, alors $f \circ g$ l'est aussi,*
- *si l'une est croissante et l'autre décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante.*
- *Si $f : I \to J$ est bijective et croissante, alors f^{-1} est croissante.*

Proposition 2.
- *Soient $f, g : C \to \mathbf{R}$. Si f et g sont convexes, alors $f + g$ aussi.*

– *Soient $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : C \to I$. Si f est croissante convexe et g convexe, alors $f \circ g$ est convexe.*
– *Si $f : I \to J$ est bijective, croissante et convexe, alors f^{-1} est concave.*

Remarque. On ne sait rien à priori sur la différence de deux fonctions monotones ou convexes.

Proposition 3. *Soit (f_i) une famille de fonctions convexes, avec $f_i : C \to \mathbf{R}$. Alors $\sup_i f_i$ et convexe.*

1.3 Caractérisations

Proposition 4. *Si f est dérivable, alors f est croissante ssi f' est positive.*

Proposition 5. *$f : C \to \mathbf{R}$ est convexe ssi $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}_+^*$, $f\left(\frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i}\right) \leq \frac{\sum \lambda_i f(x_i)}{\sum \lambda_i}$.*

Proposition 6. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Lppsse :*

(i) *f est convexe,*

(ii) *$\forall y \in I$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est croissante,*

(iii) *epi(f) l'épigraphe de f (i.e. l'ensemble des points du plan situés au dessus de la courbe de f) est convexe.*

Corollaire 1. *Toute fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et bornée est constante.*

Proposition 7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Alors f est convexe ssi f' est croissante ssi f est au dessus de toutes ses tangentes.*
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable. Alors f est convexe ssi f'' est positive.

Application (Rou p. 128). .

Proposition 8. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. On note A l'ensemble des applications affines de I dans $\mathbf{R}$ dont le graphe est au dessous de celui de f. Alors f est convexe ssi $\forall x \in I$, $f(x) = \sup_{l \in A} l(x)$.*

2 Propriétés des fonctions monotones ou convexes en dimension 1

2.1 Régularité, prolongement des fonctions monotones

Proposition 9. *Toute fonction monotone $f : I \to \mathbf{R}$ admet des limites à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$.*

Application. Il existe un seul automorphisme du corps $\mathbf{R}$.

Proposition 10. *Une fonction monotone sur $[a, b[$ et bornée au voisinage de b admet une limite en b.*

Proposition 11. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$. Si f est monotone, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.*

Théorème 1. *Une fonction monotone est dérivable presque partout.*

2.2 Régularité, prolongement des fonctions convexes

Proposition 12. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors les dérivées à gauche et à droite f'_g et f'_d sont définies sur $\mathring{I}$. Elles sont croissantes et vérifient $f'_g \leq f'_d$. De plus, l'inégalité est stricte sur un ensemble au plus dénombrable.*

Exemple. $f : x \mapsto |x|$ est convexe et on a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Proposition 13. *Toute fonction convexe $f : I \to \mathbf{R}$ est localement lipsch. sur I. Elle y est donc continue.*

Proposition 14. *$f : I \to \mathbf{R}$ est convexe ssi $\exists g : I \to \mathbf{R}$ croissante tq $\forall x \in \mathring{I}$, $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$.*

Exemple. $\ln x = \int_1^x 1/tdt$

Proposition 15 ([FGN1 p. 289])**.** *Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors $f(x)/x$ admet une limite $l \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$; si l est fini alors $f(x) - lx$ admet une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$.*

2.3 Inversion des fonctions monotones

Théorème 2. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ continue. Alors f est injective ssi f est monotone.*

Corollaire 2. *Si f est continue et injective, alors f est un homéomorphisme sur son image.*

2.4 Convergence uniforme

Théorème 3 (Dini)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$ cvs vers une fonction continue f. Alors la convergence est uniforme.*

Dini convexe : Ruaud-Warufsel p. 213.

3 Convexité en dimensions supérieures

Proposition 16. *Toute fonction convexe est localement lipsch.*

Proposition 17. *Cas C^2 et C^1 : CNS Hessienne def pos et au dessus des hyperplans tangents.*

Convexe pour les restrictions aux droites.

Proposition 18. *Unicité minimum.*

Corollaire 3. *Ellipsoïde de John.*

Application. Sous-groupes compacts de Gl_n.

4 Applications

4.1 Inégalités

Proposition 19. *Moyenne arithmétique/géométrique.*

Application. Mise en boîte [Rou].

Théorème 4 (Jensen). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de proba. Soient $X \in L^1(\Omega)$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ convexe telles que $f(X) \in L^1(\Omega)$. Alors $f(E(X)) \leq E(f(X))$.*

Proposition 20. *Pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}_+^n$ avec $\sum \alpha_i = 1$, pour tout $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, on a $\left(\sum \alpha_i \frac{1}{x_i}\right)^{-1} \leq \prod x_i^{\alpha_i} \leq \sum \alpha_i x_i$.*

Théorème 5 (Hölder). *Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $p, q \in \overline{\mathbf{R}}$ tq $1/p + 1/q = 1$), et f, g mesurables sur un espace mesuré (X, μ). Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Corollaire 4. *Dans un espace de proba, $L^p \subset L^q$ pour tout $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.*

Théorème 6 (Minkowski). *Soit $p \geq 1$ f, g mesurables sur un espace mesuré (X, μ). Alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$*

Remarque. Cela assure que $\|.\|_p$ est bien une norme.

Interpolation Brézis

Proposition 21. *Pour $(p_n)_n$ une suite de réels positifs, on a :*

$$1 + \sum_{n=1}^{N} p_n \leq \prod_{n=1}^{N} (1 + p_n) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N} p_n\right)$$

Proposition 22. *FGN1 p. 285.*

4.2 Analyse numérique

Méthode de Newton

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbf{R})$, telle que $f' > 0$ sur $[a, b]$ et que $f(a) < 0 < f(b)$. Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(c) = 0$ (un tel c existe et est unique). Cela revient à chercher un point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; l'avantage de cette fonction F est que sa dérivée en le point fixe est nulle : la convergence est alors au moins quadratique.

Proposition 23. *Il existe un voisinage $J \subset [a,b]$ de c tel que F soit contractante sur J. Alors $\forall x_0 \in J$, $F^n(x_0) \to c$ et $\exists K > 0$ tel que $|F^{n+1}(x_0) - c| \leq K|x_n - c|^2$. Si de plus f est convexe sur $[a,b]$, alors $[c,b]$ est stable par f et pour toute donnée initiale $x_0 \in [c,b]$, la suite $(x_n)_n$ est décroissante et tend vers c de manière quadratique.*

Exemple. Approximation de la racine carrée : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ x \mapsto x^2 - y$ admet un unique zéro $a = \sqrt{y}$ que l'on peut approcher par la méthode de Newton. Prenant $x_0 \geq a$, on a une majoration de l'erreur : $0 \leq x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0-a}{2a}\right)^{2^n}$.

Gradient à pas optimal

Que dire ?

4.3 Fonctions à variations bornées

Tout est fait dans le Gourdon !

4.4 Fonctions de répartition

Définition 3. Soit X une v.a.r. d'un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On définit la *fonction de répartition* de X comme étant la fonction $F_X : x \mapsto P(X \leq x)$.

Proposition 24. *C'est une fonction croissante et limitée à gauche qui vérifie $F_X(x) \to_{x \to -\infty} 0$ et $F_X(x) \to_{x\to+\infty} 1$.*

Corollaire 5. *Une mesure de proba sur $\mathbf{R}$ a un nombre d'atomes au plus dénombrable.*

Proposition 25. *Deux v.a.r. ayant même fonction de répartition ont même loi.*

Fonctions réglées, p.p. dérivable ?