232 - Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.

1 Méthodes élémentaires

1.1 Dichotomie

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ continue. Si $[a, b] \subset I$ vérifie $f(a)f(b) < 0$, alors par théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$. En posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n > 0$, avec $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$), $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$ si $f(a_n)f(c_n) \geq 0$, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$ sinon. On obtient deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ adjacentes convergeant vers un réel $c \in]a, b[$ tq $f(c) = 0$. La convergence est alors linéaire : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$.
dessin

Exemple.

1.2 Utilisation des théorèmes de points fixes

L'idée directrice de ce paragraphe est de considérer une fonction $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, et de changer l'équation $f(x) = 0$ en l'équation $f(x) - x = x$.

Théorème 1 (Picard)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante. Alors f possède un unique point fixe a et pour tout $x_0 \in X$, la suite $f^n(x_0)$ converge vers a ; la vitesse de convergence vérifie alors $d(a, f^n(x_0)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.*

Exemple. – $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$; $x \mapsto \sqrt{1+x}$ possède un unique point fixe sur $[1, +\infty[$ (en l'occurence $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).
– $f :]0, 1] \to]0, 1]$; $x \mapsto \frac{x}{2}$ ne possède pas de point fixe : $]0, 1]$ n'est pas un Banach.
– $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ ne possède pas de point fixe : elle n'est pas contractante (même si $\forall x \neq y,\ |f(x) - f(y)| < |x - y|$).

Proposition 1. *Une application continue $f : K \to K$, avec K compact métrisable telle que pour tout couple de points distincts (x, y) de K, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, admet un unique point fixe a. De plus, pour tout $x_0 \in K$ la suite $(f^n(x_0))_n$ converge vers a.*

Au voisinage d'un point fixe... [Rou]

On suppose que f est une fonction C^1 possédant un point fixe l.
<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $|f'(l)| < 1$.
Alors $|f'(x)| \leq k < 1$ sur un voisinage $J \subset I$ de l ; pour tout $u_0 \in J$ la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l. Le point fixe est dit *attractif.*
Si $f'(l) \neq 0$, alors pour tout $u_0 \in J \setminus \{l\}$, $|u_{n+1} - l| \underset{+\infty}{\sim} |f'(l)||u_n - l|$. Si f est C^2, $f'(l) = 0$ et $f''(l) \neq 0$ (point critique non dégénéré), alors pour tout $u_0 \in J \setminus \{l\}$, $|u_{n+1} - l| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|f''(l)|}{2}|u_n - l|^2$; c'est dans ce second cas que la convergence est la plus rapide (point fixe *superattractif.*
<u>2$^{\text{nd}}$ cas</u> : $|f'(l)| > 1$.
Alors $|f'(x)| \geq k > 1$ sur un voisinage $J \subset I$ de l ; pour tout $u_0 \in J$ la suite $f^n(u_0)$ ne converge pas vers l. Le point fixe est dit *répulsif.* Pour approcher un tel point fixe, on considère la fonction f^{-1}, qui est bien définie sur J.
Si $|f'(l)| = 1$, on peut si c'est possible regarder le signe de la première dérivée n-ième non nulle de f en l, avec $n \geq 2$. Celui-ci permettra d'étudier la position relative de la courbe par rapport à la première bissectrice, et donc d'avoir un critère de convergence locale. Néamoins la convergence sera d'autant plus lente que n sera grand.

Exemple. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = th(u_n)$. Asymptotiquement, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{2n}}$: la convergence est très lente.

2 Méthode de Newton [Rou p.152]

2.1 La dimension 1

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbf{R})$, telle que $f' > 0$ sur $[a,b]$ et que $f(a) < 0 < f(b)$. Le but de la méthode de Newton est de résoudre l'équation $f(c) = 0$ (un tel c existe et est unique). Cela revient à chercher un point fixe de $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; l'avantage de cette fonction F est que sa dérivée en le point fixe est nulle : la convergence est alors au moins quadratique. On prend x_0 au voisinage de c et on considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = F(x_n)$. La proposition précédentre justifie la méthode de Newton :

Proposition 2. *Il existe un voisinage $J \subset [a,b]$ de c tel que F soit contractante sur J. Alors $\forall x_0 \in J$, $F^n(x_0) \to c$ et $\exists K > 0$ tel que $|F^{n+1}(x_0) - c| \leq K|x_n - c|^2$.*

<u>Dessin !</u>

Remarque. De manière plus précise, on peut prendre $K = \sup_{[a,b]} |f''|/2 \min_{[a,b]} f'$ et $J \subsetneq]c - 1/K, c + 1/K[$.

Exemple. Si on applique la méthode de Newton à la fonction arctan, alors il n'y a pas convergence de la suite pour toute condition initiale de $\mathbf{R}$: pour $|x|$ assez grand, on a $|F(x)| > |x|$.

Dans le cas de faveur f convexe, on a une convergence globale de la méthode :

Proposition 3. *Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[a, b]$, alors pour tout $x_0 \in [c, b]$, la suite (x_n) est définie pour tout n, est dans $[c, b]$ et est décroissante.*

Exemple. Approximation de la racine carrée : $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ x \mapsto x^2 - y$ admet un unique zéro $a = \sqrt{y}$ que l'on peut approcher par la méthode de Newton. Prenant $x_0 \geq a$, on a une majoration de l'erreur : $0 \leq x_n - a \leq 2a\left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$.

2.2 Cas de la dimension quelconque [C-L, Demailly p. 108]

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbf{R}^m$ de classe C^2. Soit a un point d'annulation de f. On va comme en dimension 1 chercher à approcher a à l'aide d'« itérations de la tengente ». Considérons donc la fonction $\varphi : x \mapsto x - df(x)^{-1}.f(x)$ définie sur le sous ensemble de Ω où la différentielle de f est inversible.

Proposition 4. *On suppose que l'application linéaire tengente $df(a)$ est inversible. Alors φ est bien définie au voisinage de a et a est un point fixe superattractif de φ.*

Exemple. Le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 4 \\ xe^x + ye^y = 0 \end{cases}$$

possède une unique solution (x_0, y_0) vérifiant $x_0 \simeq -2,126932$ et $y_0 \simeq 0,206278$.

3 Méthode de la sécante [Dem p. 100]

On se place ici dans les mêmes hypothèses que pour la méthode de Newton en dimension 1. Dans certains cas, il n'est pas commode d'avoir à calculer la dérivée de f. La méthode de Newton est alors difficile à mettre en œuvre ; une alternative est la méthode de la sécante.

Dessin !

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout n, $c_n = \frac{b_n f(a_n) - a_n f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$. Comme pour la dichotomie, on prend $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, c_n)$ si $f(a_n)f(c_n) \geq 0$ et $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (c_n, b_n)$ sinon. Alors la convergence est presque quadratique, et le schéma converge pour toutes données initiales au voisinage du point d'annulation, plus précisément on a :

Théorème 2. *Posons pour* $i \in \{1,2\}$, $M_i = \max_{[a,b]} |f^{(i)}|$, $m_i = \min_{[a,b]} |f^{(i)}|$, $K = \frac{M_2}{2m_1}\left(1 + \frac{M_1}{m_1}\right)$ *et* $h = \min\left\{b-c, c-a, \frac{1}{K}\right\}$. *Soit enfin* $(s_n)_n$ *la suite de Fibonacci. Alors pour toute donnée initiale* $(a_0, b_0) \in]c-h, c+h[$, $a_0 \neq b_0$, *la suite* (a_n, b_n) *est bien définie et on a :* $|c_n - c| \leq \frac{1}{K}\left(K \max\{|a_0-c|, |b_0-c|\}\right)^{s_n}$.

Remarque. Puisque $s_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$, la convergence est d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$.

Contre-exemple ?

4 Cas des polynômes

4.1 Préliminaires : localisation des racines d'un polynôme

Proposition 5 (Gauss-Lucas, FGN1 p. 229)**.** *Soit* $P \in \mathbf{C}[X]$ *non constant. Alors les racines de* P' *sont situées dans l'enveloppe convexe de celles de* P.

Proposition 6 (CL2 p. 206)**.** *Soit* $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{R}[X]$. *Alors toute racine complexe* ξ *de* P *vérifie* $|\xi| \leq \max\{1, \sum_i a_i\}$.

Théorème 3 (Eneström-Kakeya, FGN alg1 p.233)**.** *Soit* $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{R}[X]$. *Alors toute racine complexe* ξ *de* P *vérifie* $\min\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}} \mid 0 \leq k \leq n-1\right\} \leq |\xi| \leq \max\left\{\frac{a_k}{a_{k+1}} \mid 0 \leq k \leq n-1\right\}$.

CL2 ?

4.2 Méthode de Newton (bis !)

Soit $\xi_1 < \cdots < \xi_r$ des réels, $m_1, \ldots, m_r$ des entiers non nuls et $P = \prod_i (X - \xi_i)^{m_i}$. On cherche, connaissant les coefficients du polynôme P, à retrouver les racines ξ_i.

Remarque. Cette recherche prend tout son sens quand on sait que les équations polynomiales de degré plus grand que 5 ne sont pas résolubles par radicaux en général : on doit alors se contenter d'approximations des valeurs des racines.

On montre ici que la méthode de Newton converge globalement (et non localement) pour tout ploynôme, même si ses racines sont de multiplicité plus grande que 1. On se donne donc $x_0 \in \mathbf{R}$ et calcule la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Théorème 4. *Soit* $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 > \xi_r$. *Alors la suite* (x_n) *est décroissante et converge vers* ξ_r. *De plus,*

- *Si* $m_r = 1$, *alors la convergence est quadratique,*
- *Si* $m_r > 1$, *alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que* $|x_n - \xi_r| \sim c\left(1 - 1/m_r\right)^n$ *: la convergence est linéaire.*

4.3 Application au calcul de valeurs propres

Théorème 5. *Gerhsgörin [FGN2 p. 72].*

Proposition 7 (Allaire-Kaber)**.** *Algorithme de la puissance.*

5 Les systèmes linéaires

Gradient à pas optimal [Allaire].

Références

Demailly
Rouvière
C-L ana 2
FGN alg 1
FGN alg 2
Allaire
Allaire-Kaber