234 - Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.

1 Construction des espaces L^p et propriétés générales

1.1 Le Banach L^p.

Définition 1. Pour $p \geq 1$ et f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbf{R}$, on pose $\|f\|_p = \left(\int_\omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}$; on pose aussi $\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 \mid |f| \leq M \ \mu-\text{p.p.}\}$. $\mathcal{L}^p$ est l'espace des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbf{R}$ dont la "norme" $\|.\|_p$ est finie. Sur cet espace on a une relation d'équivalence $f \sim g$ si $f = g$ p.p. On pose alors $L^p = L^p(\Omega, A, \mu) = \mathcal{L}^p / \sim$.

Proposition 1 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $p, q \in \overline{\mathbf{R}_+}$ tq $1/p+1/q = 1$), et f, g mesurables sur (Ω, μ). Alors $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Proposition 2 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$ et f, g mesurables. Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Corollaire 1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé.*

1.2 Comparaison des espaces L^p

Proposition 3. *Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\|f\|_p \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$.*
Si $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ et $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ et on a pour $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$. (Brézis p.57)

Corollaire 2. *Si Ω est de mesure finie, alors pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $L^q \subset L^p$.*

Exemple. Prenons pour μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Posons $f_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha} 1_{]0,1]}$ et $g_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha} 1_{[1,+\infty[}$. Si $p < q$ et $1/p < \alpha < 1/q$, alors $f_\alpha \in L^p \backslash L^q$ et $g_\alpha \in L^q \setminus L^p$.

Proposition 4 (FGN2 p. 53 pour énoncé faible)**.** *Pour tout $f : \Omega \to \mathbf{R}$ mesurable, $\liminf \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$. Si de plus l'espace est de mesure finie, alors $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$.*

1.3 Espaces ℓ^p

On prend ici $(\Omega, A, \mu) = (\mathbf{N}, P(\mathbf{N}), \mu)$ avec μ la mesure de comptage. L'espace $L^p(\Omega, \mu)$ est alors noté ℓ^p.
Dans cet exemple particulier, on a l'inégalité, pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, $\|u\|_q \leq \|u\|_p$.

1.4 Convergence des suites de fonctions

Théorème 1 (Riesz-Fischer)**.** *Pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace L^p est un Banach.*

Théorème 2 (Convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables tq $f_n \geq 0$ p.p. et que la suite $(f_n(x))$ soit croissante p.p. Soit $f = \lim f_n$ (définie p.p.). Alors $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.*

Théorème 3 (Fatou)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives p.p. Alors $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$. En particulier si $p < +\infty$ et $\liminf \|f_n\|_p < +\infty$, alors $f \doteq \liminf f_n \in L^p$ et $\|f\|_p \leq \liminf \|f_n\|_p$.*

Exemple. Cf ZQ p. 8-9.

Théorème 4 (Lebesgue)**.** *Soit $p < +\infty$ et (f_n) une suite de L^p cv p.p. vers une fonction f. On suppose qu'il existe $g \in L^p$ tq $|f_n| \leq g$ p.p. Alors $f_n \to f$ dans L^p et $\int f_n^p \to \int f^p$.*

Exemple. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx = 2$

Exemple. Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1_{[n,n+1]}$. Alors la suite (f_n) cv p.p. vers 0 mais ne converge pas dans $L^1(\mathbf{R})$.

Exemple. Calcul de $\int_0^1 x^x dx$.

Application. Troncature et équi-intégrabilité.

Proposition 5 ("Réciproque" du théorème de Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de L^p. Si $f_n \to f$ dans L^p, alors il existe une sous-suite de (f_n) convergeant p.p. vers f.*

Application. Si $f_n \to f$ dans L^p et $f_n \to g$ dans L^q, alors $f = g$.

1.5 Intégrales à paramètres

Théorème fondamental de l'analyse (Gou p 123, Rud p. 181). Continuité, dérivabilité, holomorphie. Exemples : solution EDO, Γ, définition de l'indice etc.

1.6 Propriétés hilbertiennes

Proposition 6. *L^2 muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_\omega f g d\mu$ est un Hilbert.*

Densité polys orthogonaux Injection Hilbert séparable dans ℓ^2

1.7 Dualité L^p/L^q

Théorème 5 (Riesz)**.** *Soit $p \in [1,+\infty[$ et q son exposant conjugué. Alors l'application $L^q \to (L^p)'$, $g \mapsto \left(f \mapsto \int_\omega fgd\mu\right)$ est une isométrie bijective.*

Proposition 7. *Caractérisation L^p*

Contre ex. L^∞ par Baire.

2 Cas où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et μ la mesure de Lebesgue.

2.1 Théorèmes de densité

Théorème 6. *Les fonctions étagées sont denses dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$*

Théorème 7. *Pour $1 \leq p < +\infty$, L^p est séparable.*

Remarque. Par contre l'espace L^∞ ne l'est pas ; il suffit de prendre l'ensemble des fonctions $\{\sum 1_{[n,n+1[} \mid n \in A\}_{A \in P(\mathbf{N})}$ qui n'est pas dénombrable et est constitué de fonctions à distances au moins 1 les unes des autres.

Théorème 8. *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque. Là encore le théorème est en défaut pour $p = +\infty$. On prend la fonction $1_{[0,1]}$, elle ne peut pas être uniformément approchée par des fonctions continues (même si on prend des fonctions à support quelconque).

Application.
- Soit $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Alors $\|f(.+h)-f\|_p \to_{h\to 0} 0$.
- Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Alors $\hat{f}(\xi) \to_{|\xi|\to\infty} 0$.
- Convergence de la convolution par des approximations de l'identité dans L^p.
- Inégalité de Hardy. Soit $p \in]1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Soit $F : x \mapsto 1/x \int_0^x f(t)dt$. Alors $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$. [Chambert-Loir 1]

2.2 Convolution dans les espaces L^p

$L^1 - L^p$, $L^1 - C_b/C_b^k$, $L^p - L^{p'}$.
Approximation de l'unité. Densité C_c^∞, Weierstrass.

Théorème 9 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et ω un ouvert relativement compact tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < +\infty$. On suppose que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{F}, \forall \|h\| < \delta,\ \|f(.+h) - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

3 Application à l'analyse de Fourier

SF : Théorèmes, Féjer (convolution) !
TF : Riemann-Lebesgue, Plancherel...