235 - Suite et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.

On se fixe $d \in \mathbf{N}^*$ et Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$. Dans toute la suite on considèrera des fonctions mesurables et la mesure de Lebesgue. Prérequis : mesure et intégrale de Lebesgue.

1 Définitions et résultats fondamentaux

1.1 Quelques types de convergence

Définition 1. Convergence p.p.

Exemple. $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$ cv p.p. vers 0.

Définition 2. Convergence L^p.

Exemple. $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$ cv vers 0 en norme L^p.

1.2 Premiers contre-exemples

- Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1_{[n,n+1]}$. Alors la suite (f_n) cv p.p. vers 0 mais ne converge pas dans $L^1(\mathbf{R})$.
- $n 1_{[-1/n,1/n]}$ cv p.p. vers 0 mais ne cv pas en norme L^1.
- Soit $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que si $n \in [2^k, 2^{k+1}-1]$, alors $f_n(x) = 1_{[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k}]}$. f_n cv vers 0 dans $L^1(\mathbf{R})$ mais ne cv pas p.p.
- Exemples convergence dans L^p mais pas dans L^q.

1.3 Les théorèmes d'intégration

Théorème 1 (Convergence monotone ou Beppo-Levi)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions positives de Ω. Alors $\lim \int f_n = \int \lim f_n$. Si de plus $\sup \int f_n < +\infty$, alors $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1.*

Théorème 2 (Fatou)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions positives de Ω. Alors $\int \underline{\lim} f_n \leq \underline{\lim} \int f_n$.*

Exemple. Cf ZQ.

Théorème 3 (Convergence dominée ou Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions convergeant p.p. vers f. On suppose qu'il existe g positive telle que sur Ω, $|f_n(x)| \leq g(x)$. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans L^1.*

Exemple. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx = 2$

Exemple. Premier exemple, vague de Richard...

Exemple. Cayley-Hamilton (Fun !), [FGN alg. 2 p. 229].

Corollaire 1. *troncature*

Corollaire 2. *Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \lambda(K) < \eta \implies \int_K |f(x)| dx < \varepsilon$.*

Proposition 1 (“Réciproque” du théorème de Lebesgue)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de L^p. Si $f_n \to f$ dans L^p, alors il existe une sous-suite de (f_n) convergeant p.p. vers f.*

Application. Si $f_n \to f$ dans L^p et $f_n \to g$ dans L^q, alors $f = g$.

1.4 Intégrales à paramètres

Continuité, dérivabilité (définition de l'indice !) + cté des solutions EDO.

1.5 Théorème de Fubini

Théorème 4 (Fubini)**.** *Soit $f : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}^+$. Si f est mesurable, alors les intégrales suivantes ont un sens (fonctions mesurables) et sont égales :*

$$\int_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbf{R}^p} \left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}^q} \left(\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y) dx \right) dy$$

Soit $f : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{C}$. Si f est mesurable et intégrable pour la mesure produit, alors la fonction $x \mapsto \int_{R^q} f(x,y) dy < \infty$ p.p. (idem en y), et les intégrales suivantes ont un sens (fonctions mesurables) et sont égales :

$$\int_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbf{R}^p} \left(\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y) dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}^q} \left(\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y) dx \right) dy$$

Remarque. On l'applique dans le cas de la mesure de comptage !

Exemple. Définition convolution L^1.

Exemple. Démo th holomorphie ss signe somme via Morera.

2 Applications

2.1 L^p

Théorème 5 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $(L^p, \|.\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet.*

2.2 Premiers théorèmes de densité

Théorème 6. *Les fonctions étagées sont denses dans* L^p *pour* $1 \leq p \leq +\infty$

Théorème 7. *Pour* $1 \leq p < +\infty$, L^p *est séparable.*

Remarque. Par contre l'espace L^∞ ne l'est pas ; il suffit de prendre l'ensemble des fonctions $\{\sum 1_{[n,n+1[} \mid n \in A\}_{A \in P(\mathbf{N})}$ qui n'est pas dénombrable et est constitué de fonctions à distances au moins 1 les unes des autres.

Théorème 8. *L'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans* L^p *pour* $1 \leq p < +\infty$.

Remarque. Là encore le théorème est en défaut pour $p = +\infty$. On prend la fonction $1_{[0,1]}$, elle ne peut pas être uniformément approchée par des fonctions continues (même si on prend des fonctions à support quelconque).

Application. – Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Alors $\|f(.+h) - f\|_p \to_{h \to 0} 0$.
– Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Alors $\hat{f}(\xi) \to_{|\xi| \to \infty} 0$.
– Inégalité de Hardy. Soit $p \in]1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Soit $F : x \mapsto 1/x \int_0^x f(t)dt$. Alors $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$. [Chambert-Loir 1]

Lusin/Egorov, Müntz.

2.3 Convolution et approximation

$L^1 - C_c^\infty$.
Approximation de l'unité. Densité C_c^∞, Weierstrass, Féjer. RFK.