236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calculs d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

1 Calcul intégral pour une fonction d'une variable réelle

1.1 Calcul de primitives

On fixe $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Le théorème fondamental suivant est à la base du calcul des intégrales de fonctions d'une variable réelle :

Théorème 1.1. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application intégrable au sens de Lebesgue. Si $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une primitive de f sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

Proposition 1.2 (Primitives usuelles)**.**

Fonction	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
Primitive	$\arg th\, x = \frac{1}{2} \ln \left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert$	$\arctan x$	$\arg sh\, x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$	$\arcsin x$	$\arg ch\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

1.1.1 Intégration par parties et changement de variables

Proposition 1.3 (Intégration par parties (IPP))**.** *Si $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux applications de classe C^1, alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

Exemple (Intégrales de Wallis, [Gou] ex. 1 p. 126)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

Une IPP permet d'établir la formule de récurrence : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, d'où, sachant que $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$:

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3}{2p(2p-2)\dots 4 \cdot 2} \qquad \textit{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 4 \cdot 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3}$$

On en déduit la formule de Wallis $\lim\limits_{p \to +\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 4 \cdot 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 3} \right)^2 = \pi$.

Exemple (Relation fonctionnelle de la fonction Γ)**.** $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$.

Exemple (Primitive de l'élément simple $\frac{1}{(x^2+a^2)^h}, h \in \mathbb{N}_\star$)**.**

$$I_h = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^h} = \frac{x}{(x^2+a^2)^h} + 2hI_h - 2ha^2 I_{h+1}$$

Le calcul de I_1 étant immédiat, puisque $\int \frac{1}{(x^2+a^2)} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + cste$.

Exemple. $\int_0^1 x^x dx$.

Proposition 1.4 (Changement de variables, CAS MESURABLE ? ? ? ? ?)**.** *Si $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ est continue par morceaux et telle que $\phi([a,b]) \subset I$, alors*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\, du$$

Exemple (Intégrale de Dirichlet, [Gou] pb.3 p. 174)**.** *La formule de duplication du sinus donne :*

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx = \frac{\pi \ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin\frac{x}{2})\, dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos\frac{x}{2})\, dx$$

Le changement de variable $x = 2t$ dans les deux intagrales, suivi de $u = \pi/2 - t$ dans la deuxième, établit $I = \frac{\pi \ln 2}{2} + 2I$, d'où $I = -\frac{\pi \ln 2}{2}$.

Le même genre d'idées permet d'obtenir ([FGN], ex. 1 p. 6) :

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\, dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

1.1.2 Calcul de primitives ([Gou] 3.2 p. 132)

Fractions rationnelles : décomposition en éléments simples.

Polynômes en sin **et** cos **:** linéarisation par les formules d'Euler et de De Moivre.

Fractions rationnelles en sin **et** cos **:** – $t = \tan(x/2)$

- Règle de Bioche : Si $R(\sin x, \cos x)\, dx$ est invariant par $x \leftarrow \pi - x$ (resp. $x \leftarrow -x$, $x \leftarrow \pi + x$), on pose $t = \sin x$ (resp. $t = \cos x$, $t = \tan x$).

Fractions rationnelles en e^x **:** $t = e^x$

Fractions rationelles en sh et ch : – $t = \operatorname{th}(x/2)$ ou $t = e^x$

- procéder par analogie à la règle de Bioche.

La règle de Bioche appliquée à l'intégrale suivante suggère de poser $t = \operatorname{sh} x$

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 2\operatorname{th}^2 x}\, dx = \int \frac{1+t^2}{3t^2+t^4}\, dt = \int \frac{dt}{3t^2} + \int \frac{2}{3(t^2+3)}\, dt$$

qui ce primitive en

$$\frac{-1}{3t} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + k$$

soit

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 2\operatorname{th}^2 x}\, dx = \frac{-1}{3\operatorname{sh} x} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{3}}\right) + k$$

1.2 Intégrales à paramètres

Les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe intégral, dont on ne rappelle pas les énoncés, permettent d'obtenir la valeur de certaines intégrales.

Exemple. *Transformée de Fourier de la gaussienne. Soit $g : t \mapsto e^{-t^2/2} \in L^1$. Alors sa transformée de Fourier $\hat{g}$ vérifie $\hat{g}'(t) + t\hat{g} = 0$; on en déduit que $\hat{g} = \sqrt{2\pi} g$.*

Exemple ([Gou p. 164]). $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \arctan x$

Exemple (Intégrale de Fresnel ([Gou] ex. 4 p. 164)).

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1.3 Calcul de résidus ([Car], III.6 p. 100)

Théorème 1.5 (Formule des résidus). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction méromorphe sur Ω et A l'ensemble de ses pôles. Si γ est un lacet continu, C^1 par morceaux dans $\Omega \setminus A$ et homotope à un point dans Ω, alors*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{a \in A} Ind_\gamma(a)\, Rés(f, a)$$

Exemple (Fraction rationnelle en sinus et cosinus). *En paramétrant le cercle unité par $\gamma : t \in [0, 2\pi] \longmapsto e^{it}$, on a, pour $a > 1$,*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin t} dt = \int_\gamma \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}\, dz = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

puisque $f : z \longmapsto \frac{2}{z^2+2iaz-1}$ a pour unique pôle $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$ dans le disque unité et $Rés(f, z_0) = \frac{-i}{\sqrt{a^2-1}}$.

Exemple. *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $F(0) \neq 0$, $\deg F \leqslant -1$ et F n'a aucun pôle appartenant à $\mathbb{R}^+$. Pour $0 < \alpha < 1$, on note $a_1, \dots, a_p$ les pôles de $z \longmapsto F(z)/z^\alpha$, où $z \longmapsto z^\alpha$ désigne la détermination holomorphe de z^α sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, alors, en utilisant le lacet Γ (PacMan !), on établit*

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} x^{-\alpha} F(x)\, dx = 2i\pi \sum_{i=1}^{p} Rés(f, a_i)$$

En particulier, pour $n \geqslant 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x+1)^n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\pi}{(n-1)!\sin \pi\alpha}$$

Application (Formule des compléments).

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\ , \ \text{pour } 0 < Re(z) < 1$$

2 Calcul intégral pour une fonction de plusieurs variables réelles

2.1 Changement de variables et théorèmes de Fubini ([BP], 11.3 et 12.2)

Théorème 2.1 (Fubini, [Cand]). *Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Si f est mesurable, alors les intégrales suivantes ont un sens (fonctions mesurables) et sont égales :*

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f est mesurable et intégrable pour la mesure produit, alors la fonction $x \mapsto \int_{R^q} f(x,y)dy < \infty$ p.p. (idem en y), et les intégrales suivantes ont un sens (fonctions mesurables) et sont égales :

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Théorème 2.2 (Formule de changement de variables). *Soit φ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts Δ et D de $\mathbb{R}^d$. Pour toute fonction borélienne $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, f est intégrable sur D si et seulement si $(f\circ\varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur Δ, auquel cas*

$$\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|(u)\,du$$

Exemple (Intégrale de Gauss). *L'utilisation successive du théorème de Fubini et d'un passage en coordonnées polaires donne :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \left(\iint_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\right)^{1/2} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \text{pour } a>0$$

Exemple (Volume de la boule euclidienne unité de $\mathbb{R}^d$, [Cand]). *On procède par récurrence sur $d \in \mathbb{N}_\star$. Pour $d \geqslant 2$:*

$$\begin{aligned} v_d &= \int_{\mathbb{R}^2} dx_d dx_{d-1}\left[\int_{\mathbb{R}^{d-2}} dx_1\ldots dx_{d-2}\mathbb{1}_{\{x_1^2+\cdots+x_{d-2}^2\leqslant 1-(x_{d-1}^2+x_d^2)\}}\right]\mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2+x_d^2\leqslant 1\}} \\ &= \int_{\{x_{d-1}^2+x_d^2\leqslant 1\}} dx_d dx_{d-1}(1-(x_{d-1}^2+x_d^2))^{d/2-1}\times v_{d-2} = \frac{2\pi}{d}v_{d-2} \end{aligned}$$

Ainsi $v_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$, si d est pair, et $v_d = \frac{2^d\pi^{(d-1)/2}((d-1)/2)!}{d!}$, si d est impair.

2.2 Intégrales curvilignes ([Gou], p. 336)

Théorème 2.3 (Green-Riemann). *Soit K un compact à bord de $\mathbb{R}^2$ et $P\,dx + Q\,dy$ une forme différentielle de degré 1, de classe C^1 sur un ouvert contenant K, alors*

$$\int_{\partial K^+}(P\,dx+Q\,dy) = \iint_K\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Application (Caclul d'aire). *Si K est un compact à bord, on peut exprimer son aire $\mathcal{A} = \iint_K dx\,dy$ comme*

$$\mathcal{A} = \int_{\partial K^+} x\,dy = -\int_{\partial K^+} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} r^2\,d\theta$$

Exemple (Aire de la boucle droite de la lemniscate de Bernoulli). *Elle admet pour équation polaire $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, avec $a > 0$, ainsi*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}$$

Références

[Gou] X. Gourdon, *les maths en tête, analyse*, édition ellipses

[RDO] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques, tome 3*, édition Dunod

[AM] É. Amar, É. Matheron, *Analyse complexe*, édition Cassini

[Cand] B. Candelpergher *Calcul intégral*

[Car] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, édition Hermann

[FGN] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, analyse 2*, édition Cassini

[BP] M. Briane, G. Pagès, *Théorie de l'intégration*, édition Vuibert

[HH] H. Haruki, S. Haruki, *Euler's integrals*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 7 (Aug. - Sep., 1983), pp. 464-466

[ZQ] Hervé Queffélec, Claude Zuily, *Analyse pour l'agrégation*, édition Dunod

Développements

- Intégrale de Fresnel ([Gou], 228, 235, 236, 239, 240, 247)
- Calcul des résidus et formule des compléments ([Car, AM], 236, 245, 247)