240 - Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications

Rappels

Densité C^0, fonctions en escalier, troncature.
Translation, $\tau_a f \to f$ dans L^p $(1 \leq p < \infty)$ et dans C^0.

1 Convolution

1.1 Définition et premières propriétés [Beck, Hirsch-lacombe, Brézis]

Définition 1 ([Hirsch-Lacombe])**.** Fonctions convolables.

Remarque. On peut aussi définir la convolution pour des fonctions mesurables positives.

Proposition 1. $f * g = g * f$

Proposition 2. *Support*

Exemples

$L^1/C_b \to C_b$
$L^1_{loc}/C_c \to C_b$
$L^p/L^q \to C^0_0$
$L^1/L^2 \to L^2$.
Algèbre de convolution L^1, utilisation de Fubini et de la densité de C^0_c.

Théorème 1 (Inégalité de Young)**.**

Remarque. On en déduit la continuité de la convolution.

Exemple. Convolution de 2 gaussiennes.

Proposition 3. *Soit $f \in L^1$. L'adjoint de $L^2 \to L^2$, $g \mapsto f * g$ est $g \mapsto \overline{f}(-.) * g$.*

Théorème 2 (fondamantal du traitement du signal)**.** *Soit $T : L^2 \to C_b$ un opérateur linéaire continu invariant par translation. Alors il existe $g \in L^2$ tq $T = . * g$.*

1.2 Approximation et régularisation

Proposition 4. *Dérivation $L^1/C^k \cap L^\infty$ et $L^\infty/C^k \cap L^1$*

Définition 2. Identité approchée.

Théorème 3. *Convergences :*
L^∞ : convergence ponctuelle partout où f est continue
C_b : convergence uniforme
L^p : convergence dans L^p.'

Application. Densité de C_c^∞ dans L^p.

Attention : la densité de C_c ne s'obtient pas comme ça.

Application. Weierstrass par convolution.

Application. Noyaux de Dirichlet et de Féjer.

Théorème 4 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.**

Application. Application Brézis.

2 Transformée de Fourier

2.1 La TF dans L^1

Définition 3. TF.

Proposition 5. *TOC (Rudin + dérivation).*

Proposition 6. *Comportement vis à vis de la convolution.*

Intérêt numérique

Théorème 5 (Riemann-Lebesgue)**.**

Par densité !

Théorème 6. $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$.

Exemple. TF de la Gaussienne, de $\chi_{[-1,1]}$, de $e^{-ax}\chi_{\mathbf{R}^+}$, de $\frac{x^k}{k!}e^{-ax}\chi_{\mathbf{R}^+}\cdots$

Proposition 7. *Formule de Fresnel.*

Proposition 8. *Calcul via l'analyse complexe (Cartan p. 102).*

Théorème 7. *Injectivité de la TF.*

Proposition 9. *Polynômes orthogonaux.*

Théorème 8 (Inversion de Fourier)**.** *G-W p. 135.*

Application. TF de $1/(a + 2i\pi\xi)^{k+1}$.

2.2 La TF dans l'espace de Schwarz

Définition 4. Espace de Schwarz.

Exemple. Gaussienne, C_c^∞.

Proposition 10. *Stabilité par multiplication polynomiale, par dérivation, inclusion et densité dans les* L^p*.*

Définition 5. Topologie de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Théorème 9. $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ *est stable par TF. La TF est continue.*

Théorème 10. $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ *est stable par convolution. La convolution est une opération continue.*

Théorème 11 (Parseval)**.**

2.3 La TF dans L^2

Théorème 12 (Plancherel)**.**

Prolongement fonction unif continue (car linéaire continue) Banach.

Exemple. TF du sinus cardinal, de $\frac{1}{a \pm 2i\pi x}$.

2.4 Applications

pour $g \in L^1$, la norme de $L^2 \to L^2$, $f \mapsto f * g$ est $\|\hat{g}\|_\infty$ (passer par Fourier).
Principe d'incertitude [Willem]
Échantillonage [Willem]
Équation de transport / des ondes [Di Menza p. 35/55].
Vp de la TF [Kolmogorov p. 237]
Formule sommatoire de Poisson (Gourdon)

Références

Beck
Hirsch-Lacombe
Di Menza
Brézis
Bony
Rudin
Kolmogorov Fomine
Gasquet Witomski
Cartan
Chambert-Loir 1