241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

1 Premiers types de convergence

1.1 Définitions

On considère X un ensemble, E un espace vectoriel normé et f, f_n des fonctions de X dans E pour $n \in \mathbf{N}$. On dit que
– la suite (f_n) converge simplement vers f si $\forall x \in X,\ \|f_n(x) - f(x)\| \to 0$,
– la suite (f_n) converge uniformément vers f si $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0$,
– la série $\sum f_n$ converge normalement si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge,

1.2 Relations et critères

Proposition 1. *La convergence uniforme implique la convergence simple. De plus, si E est complet, alors la convergence normale entraîne la convergence uniforme.*

Exemple. – La suite $f_n : [0,1[\to [0,1[,\ x \mapsto x^n$ cvs vers 0, pas cvu.
– La série $\sum (-1)^n x^n / n$ cvu pas cvn.

Exemple. Une série entière cvn sur tout compact de son disque ouvert de convergence.

Proposition 2 (Critère de Cauchy)**.** *Si E est complet, alors (f_n) cvu ssi* $\sup \|f_p - f_q\| \to 0$.

Proposition 3 (Règle d'Abel [Jean Combes])**.** *Soit $\alpha_n, v_n : X \to E$, avec E Banach, tels que :*
– $\forall x \in X,\ \alpha_n(x) \geq 0$ et est décroissante, α_n cvu vers 0,
– $\forall x \in X,\ \sum_{i=1}^{N} v_n$ est borné indépendamment de N.
Alors $\sum \alpha_n v_n$ cvu.

Exemple. $\ln 2 = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Théorème 1 (Dini)**.** *Soit K un espace métrique compact et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $C^0(K, \mathbf{R})$. On suppose que la suite (f_n) est croissante et converge simplement vers une fonction f elle-même continue. Alors la convergence de la suite (f_n) est uniforme.*

Cf Skandalis pour 2de version

Exemple. La suite de fonctions polynomiales (P_n) définie sur $[0,1]$ par $P_0 = 0$ et $P_{n+1} = P_n + \frac{x-P_n^2}{2}$ cvu vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple. – La suite de fonctions $f_n(x) = -1/nx$ sur R_+^* est croissante, cvs vers 0 mais pas cvu, car $f_n(1/n) = -1$.
– La suite de fonctions $f_n(x) = nx$ sur $[0, 1/n]$, $-nx+2/n$ sur $[1/n, 2/n]$, 0 ailleurs cvs vers 0 sur $[0,1]$ compact, mais ne cvu pas, car $f_n(1/n) = 1$.

Théorème 2 (Ascoli)**.** *On suppose que X est un espace compact et considère une famille $\mathcal{A} \subset C^0(X, E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *$\mathcal{A}$ est relativement compacte (i.e. d'adhérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme.*
- *$\mathcal{A}$ est équicontinue en tout point de X et pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact.*

2 Passages à la limite

2.1 Convergence simple

Proposition 4. *Si les f_n sont croissantes/convexes/k-lipsch.et cvs vers f, alors f est croissante/convexe/k-lipsch.*

Exemple. La suite de polynômes vue supra est constituée de fonctions lipschitziennes et converge uniformément vers une fonction non lipschitzienne.

2.2 Continuité

Proposition 5. *On suppose que X est un espace topologique et que les $f_n : X \to E$ sont continues en $a \in X$. Si f_n cvs vers f et cvu vers f sur un voisinage de a, alors f est continue en a.*

Corollaire 1. *Si X est métrique, les f_n sont continues et (f_n) cvu sur tout compact de X vers f, alors f est continue.*

Exemple. Les fonctions $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0,1]$ mais tendent vers $\chi_{[0,1]}$ qui n'est pas continue.

Proposition 6 (Double limite)**.** *On suppose que X est un espace topologique, que E est un Banach, et que sur $A \subset E$, les f_n cvu vers f. Soit $a \in A$, on suppose que $\exists \lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$. Alors $\exists \lim_n b_n = b$ et $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$.*

Exemples ?

2.3 Dérivabilité

Théorème 3. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et (f_n) une suite de fontions dérivables de I dans $\mathbf{R}$ qui cvs vers f. Si f'_n cvu vers f' sur I, alors f est déravable et $f' = \lim f'_n$.*

Exemple. Prenons $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$ cvu vers 0 sur $\mathbf{R}$, mais f'_n ne converge pas.

Exemple. Posons $u_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$. Pour calculer $\sum u_n(t) = s(t)$ (qui converge sur $[-1, 1]$), on calcule $u'_n(t) = t^n$, $\sum u'_n(t)$ cvu sur tout segment $I \subset [-1, 1]$ vers $\frac{1}{1-t}$. Avec $\sum u_n(0) = 0$, on obtient $s(t) = \ln(\frac{1}{1-t})$.

2.4 Holomorphie

Théorème 4 (Weierstrass [Vinx]). *Soit (h_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}$. Si h_n cvu sur tout compact de Ω vers h, alors h est holomorphe sur Ω et toutes les dérivées successives de h_n cvu sur tout compact vers les dérivées successives de h.*

Exemple. Les séries entières sont holomorphes.

Théorème 5 (Familles normales de Montel). *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{H}(\Omega)$, bornée sur tout compact de Ω. Alors $\mathcal{F}$ est normale, i.e. toute suite de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite convergeant sur tout compact de Ω.*

3 DSE/DSF

4 Théorie de l'intégration

On suppose que X est un espace mesuré et que $E = \mathbf{R}$.

Définition 1. Convergence en norme L^p.

Théorème 6 (Cv monotone de Beppo Levi). *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.*

Exemple. $f_n = 1/n$ converge vers 0 mais $\int f_n = +\infty$ $\forall n$.

Théorème 7 (Fatou). *Soit f_n une suite de fonctions mesurables positives. Alors $\int \liminf\ f_n \leq \liminf\ \int f_n$.*

Exemple. Cf ZQ.

Théorème 8 (Convergence dominée de Lebesgue). *Si $f_n \to_n f$ p.p. et s'il existe g intégrable telle que $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x$, alors $\int f_n \to_n \int f$.*

Exemple. $\lim_n \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = 0$.

Théorème 9 (Riesz-Fisher)**.**

Corollaire 2 (Réciproque de la cvd)**.**

Théorème 10 (Egorov)**.** *Si X est un espace mesuré muni d'une mesure finie et (f_n) est une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$ cvs vers f alors il existe un ensemble A, dont le complémentaire a une mesure arbitrairement petite, sur lequel f_n cvu vers f.*

Corollaire 3 (Lusin)**.**

5 Applications

5.1 Théorème de Stone et applications

Définition 2. Soit (K, d) un espace métrique compact.
- Une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ est appelée un *treillis* si $\forall f, g \in S$, $\max(f, g)$, $\min(f, g) \in S$.
- On dit qu'une famille $S \subset C^0(K, \mathbf{R})$ *sépare les points* si $\forall x, y \in K$, $x \neq y$, $\exists f \in S : f(x) \neq f(y)$.

Théorème 11 (Stone-Weierstrass)**.** *Soit K un espace métrique compact ayant au moins deux éléments distincts et S une sous-algèbre unitaire de l'algèbre de Banach de $C^0(K, \mathbf{R})$. Alors S est dense si et seulement si S sépare les points.*

Corollaire 4.
- *Théorème de Weierstrass : densité des polynômes à coefficients réels.*
- *Théorème de Féjer (ou de Weierstrass trigonométrique) : densité des polynômes trigonométriques.*
- *Densité des TF [ZQ p. 536].*
- *Séparabilité de $C(X, \mathbf{R})$ (par le lemme d'Urisohn).*

5.2 Exponentielle matricielle

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On munit $M_n(\mathbf{K})$ de la norme d'algèbre subordonnée à la norme euclidienne (par exemple).

Définition 3. La série $\sum \frac{M^n}{n!}$ cvu sur tout borné de $M_n(\mathbf{K})$. On note $\exp(M)$ sa limite.

Proposition 7. *$t \mapsto \exp(tM)$ est l'unique morphisme continu de $\mathbf{R}$ vers $Gl_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 8. *Le problème de Cauchy $Y'(t) = AY(t) + B(t),\ Y(t_0) = Y_0$ admet une unique solution $Y(t) = \exp(tA)\left[Y_0 + \int_{t_0}^t \exp(-uA)B(u)du\right]$.*

5.3 Suites régularisantes

Définition 4. Une suite k_n de $C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ telle que pour tout n, $k_n \geq 0$, $\int k_n = 1$ et $supp(k_n) \subset B(0, 1/n)$ est dite *régularisante.*

Remarque. Il existe des suites régularisantes : prenant $k(x) = \exp(1/(\|x\|^2 - 1))\chi_{\|x\| \leq 1}$, la suite $k_n(x) = n^N k(nx)/\int k$ est régularisante.

Proposition 9. *Si $f \in C^0(\mathbf{R}^N)$, alors $k_n * f$ cvu vers f sur tout compact de $\mathbf{R}^N$.*
Si $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, alors $k_n * f$ cv vers f dans $L^p(\mathbf{R}^N)$.

Corollaire 5. *$C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $C^0(\mathbf{R}^N)$.*
$C_c^\infty(\mathbf{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Théorème 12 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.**

Théorème 13. *Noyau de Féjer approximation de l'identité.*

Corollaire 6. *Convergence en moyenne quadratique des SF.*

Références

Gourdon
Hauchecorne
Brézis
Combes
Beck
Rudin
RDO