243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

On adoptera la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$ dans $\overline{\mathbf{R}_+}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1. On appelle *série entière* toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $z \in \mathbf{C}$. La *somme* de la série entière, lorsqu'elle est bien définie, sera notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Lemme 1 (Abel)**.** *Soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tq $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée, alors $\forall r \in [0, |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ cvn sur $B(0, r)$.*

Définition 2. Le *rayon de convergence* de la série $\sum a_n Z^n$ est $R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ bornée}\} \in \overline{R_+}$.

Exemple. $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1. Sur le disque ouvert de convergence sa somme est égale à $\frac{1}{1-z}$.

Proposition 1.
- *$\forall z \in \mathbf{C}$, $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument,*
- *$\forall z \in \mathbf{C}$, $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement,*
- *$\forall r < R$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $B(0, r)$.*

Remarque. Par contre on ne sait rien à priori sur la convergence en un point du cercle, comme le montrent les exemples $\sum n z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$, de RCV toutes deux 1.

Par la suite $\sum a_n z^n$ (resp $\sum b_n z^n$) désignera une série entière de RCV R_a (R_b). Le disque ouvert de convergence sera noté D_a (D_b) et la somme f_a (f_b).

1.2 Calcul du rayon de convergence

Remarque. Si $\sum a_n z_0^n$ est semi convergente, ou diverge non grossièrement, alors $R = |z_0|$.

Proposition 2 (Règle de d'Alembert). *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. S'il existe* $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \in \overline{\mathbf{R}_+}$, *alors* $R_a = \frac{1}{l}$.

Remarque. Méfiance des séries à trous !

Exemple.
- Pour $P \in \mathbf{C}[X]$, $\sum P(n) z^n$ a pour RCV 1.
- La série exponentielle $\sum z^n/n!$ a pour RCV $+\infty$.

Proposition 3 (Formule d'Hadamard). $R_a = \left(\overline{\lim}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$.

Exemple. Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, $\sum a_n z^n$, $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même RCV. En particulier pour $\sum n a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$.

Exemple. La série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^n z^n$ a un RCV égal à $+\infty$ tandis que la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^n z^n$ a un RCV égal à 1.

Proposition 4.
- *Si* $a_n = O(b_n)$, *alors* $R_a \leq R_b$.
- *Si* $a_n \sim b_n$, *alors* $R_a = R_b$.

Exemple. $\sum \ln(1+1/n) z^n$ a pour RCV 1.

1.3 Opérations sur les séries entières

Proposition 5. *La série* $\sum (a_n + b_n) z^n$ *a un RCV* $\geq \min(R_a, R_b)$. *De plus, pour tout* $z_0 \in D_a \cap D_b$, *on a* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n$.

Remarque. Si $R_a \neq R_b$, alors le RCV est exactement $\min(R_a, R_b)$.

Proposition 6. *On pose* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Alors la série* $\sum c_n z^n$ *a un RCV* $\geq \min(R_a, R_b)$. *De plus, pour tout* $z_0 \in D_a \cap D_b$, *on a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n\right)$. *La série* $\sum c_n z^n$ *est appelée* produit de Cauchy *des deux séries initiales.*

Exemple. Nombre de partitions...

1.4 Régularité de la somme sur le disque ouvert de convergence

Proposition 7. f_a *est holomorphe sur le disque ouvert de convergence et on a* $f_a^{(p)}(z) = \sum \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$.

Exemple. $\exp' = \exp$.

Application. Calcul de sommes classiques [Gou p. 244].

Corollaire 1. *La somme de la série* $\sum a_n z^n$ *admet la somme de* $\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ *comme primitive s'annulant en 0.*

Corollaire 2. *On a* $a_n = f_a^{(n)}(0)/n!$. *Ainsi si* $R_a > 0$, *alors il existe une unique suite* $(b_n)_n$ *telle que* $f_a(x) = \sum b_n x^n$ *au voisinage de 0 dans* $\mathbf{R}$, *à savoir la suite* $(a_n)_n$.

2 Fonctions développables en série entière

On prend Ω un ouvert de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, $x_0 \in \Omega$ et $g : \Omega \to \mathbf{C}$.

Définition 3. On dit que g est *développable en série entière* au voisinage de x_0 s'il existe $r > 0$ tq $B(x_0, r) \subset \Omega$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de RCV $R > r$ tq $g(z + x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sur $B(0, r)$. La suite $(a_n)_n$ est unique, les a_n sont appelés les *coefficients* du DSE de g au voisinage de x_0. Si g est DSE au voisinage de tout point de Ω, elle est dite *analytique.*

Exemple. Pour $z_0 \in \mathbf{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$ est analytique sur $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.
Remarque. Par les propriétés des séries entières vues supra, l'ensemble des fonctions développables en série entière autour d'un point est stable par somme, produit, intégration, dérivation.

Proposition 8. *Inverse d'une série entière [Gou p. 251].*

Application. DSE d'une solution d'une EDO.

2.1 Cas complexe, fonctions holomorphes

On se donne Ω un ouvert de $\mathbf{C}$.

Théorème 1. *Si $f \in H(\Omega)$, alors g est DSE au voisinage de tout $x_0 \in \Omega$. Ce DSE est valable sur le plus grand disque D centré en x_0 et contenu dans Ω ; de plus pour $a \in D$ $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty}(a - x_0)^n \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i}$. Réciproquement, toute fonction analytique est holomorphe.*

Conséquences de l'analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 2. *Inégalité de Cauchy.*

Proposition 9. $f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$.

Théorème 3 (Morera)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Alors $f \in H(\Omega)$ ssi pour tout triangle plein T inclus dans Ω, $\int_{\partial T} f = 0$.*

Application. Holomorphie et intégrale à paramètre.

Proposition 10 (Principe des zéros isolés)**.** *Si l'ensemble des zéros de $f \in H(\Omega)$ possède un point d'accumulation dans Ω, alors f est nulle.*

Application (Principe du maximum). Soit $f \in H(\Omega)$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante sur la composante connexe de z_0 dans Ω.

Proposition 11. *Si $f \in H(\Omega)$ est non nulle et telle que pour un $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0$, alors il existe $p \in \mathbf{N}^*$ minimal tq $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage v de z_0 dans Ω, et $h \in H(V)$, tq $h(z_0) \neq 0$ et $g(z) = (z - z_0)^p h(z)$.*

Application. Inversion locale holomorphe.

Applications de l'analyse complexe aux DSE

Proposition 12. *La somme d'une série entière est DSE au voisinage de chacun des points du disque ouvert de convergence.*

Théorème 4 (Liouville)**.** *Toute série entière bornée de RCV infini est constante.*

Application. Théorème de d'Alembert-Gauss.

2.2 Cas réel

Proposition 13. *g est DSE sur le voisinage $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0 ssi g est C^∞ sur V et $\forall x \in V$, $R_n(x) = g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} g^{(k)}(x_0) \to_n 0$. En particulier, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, il suffit que les $\|g^{(k)}\|_\infty$ soient bornés uniformément en p sur V.*

Remarque. Attention, il ne suffit pas que g soit C^∞ et que la série entière $\sum g^{(n)}(x_0) z^n$ ait un RCV>0. Cf notre fonction plateau préférée.

Corollaire 3 ([FGN p. 231])**.** *g est DSE sur Ω ssi il existe $C > 0$ tq $\|g^{(k)}\|_\infty \leq C^{n+1} n!$.*

Théorème 5 (Bernstein,[Gou, p.250])**.** *Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$ de classe C^∞ tq $\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in]-a, a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$. Alors f est DSE sur $]-a, a[$.*

Application (DSE usuels).
- Par application de la proposition précédente, on obtient les DSE en 0 de exp, sh, ch, cos, sin et en 1 de ln, x^α.
- Par primitivation on obtient ceux de arctan et argth
- Par utilisation d'equa diffs, par exemple on obtient le DSE en 0 de $(\arcsin x)^2$ ([Gou, p.245]).

Application. $\int_0^1 x^x dx$.

3 Comportement au bord du disque de convergence

3.1 Convergence en un point du bord

Théorème 6 (Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série de RCV=1 telle que $\sum a_n$ converge. On se donne $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D_a \mid \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0] : z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. Alors $\lim_{z \to 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, et on a convergence uniforme sur tout fermé de Δ_{θ_0}.*

Application. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ si $0 < t < 2\pi$ [Z-Q].

Théorème 7 (Taubérien fort de Hardy-littlewood)**.** *Si $a_n = O(1/n)$ et si $f_a(z) \to_{z \to 1, z \in [0,1[} l$, alors $\sum a_n$ converge de somme l.*

3.2 Convergence uniforme sur le disque fermé

Théorème 8 (Gutzmer ? [Z-Q p. 47]). *La cvu de $\sum a_n z^n$ sur D_a est équivalente à celle sur ∂D_a. Si ces conditions sont remplies, alors la somme g de la série vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta)|^2 d\theta$.*

Théorème 9. *Il existe une série entière convergeant uniformément sur $\overline{D_a}$ mais pas normalement sur $\overline{D_a}$.*

3.3 Points réguliers, singuliers

Définition 4. $z \in \partial D_a$ est dit *régulier* si f_a se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de z. Sinon, z est dit *singulier*.

Théorème 10. *$\sum a_n z^n$ admet au moins un point singulier.*

Proposition 14 ([Z-Q]). *a est régulier ssi $\sum \frac{f^{(n)}(a/2)}{n!} z^n$ possède un RCV>1/2.*

Théorème 11 ([Z-Q]). *Si les a_n sont positifs, alors 1 est un point singulier.*

Théorème 12 (des lacunes d'Hadamard,[ZQ]). *Si la série est lacunaire, alors Γ est une coupure.*

Étude asymptotique au bors du disque de cv FGN2 p. 212 ?