

245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbf{C} . Exemples et applications.

Par la suite on se donne Ω un ouvert de \mathbf{C} .

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Holomorphie

Définition 1. Holomorphie, $\mathcal{H}(\Omega)$, fonction entière.

Exemple. Polynômes, inverse.

Proposition 1. $\mathcal{H}(\Omega)$ est une \mathbf{C} -algèbre. *TOC.*

1.2 Conditions de Cauchy-Riemann [Vinx]

Proposition 2. Holomorphe en un point ssi différentiable et Cauchy-Riemann ssi jacobienne similitude.

Exemple. $z \mapsto \bar{z}$ n'est holomorphe nulle part.

$x + iy \mapsto \sqrt{|xy|}$ vérifie les conditions de C-R mais n'est pas \mathbf{C} -différentiable en 0.

Application. Si $f' = 0$ sur un connexe, alors f est constante.

1.3 Fonctions analytiques [Vinx]

Définition 2. Fonction analytique.

Proposition 3. Analytique \implies holomorphe.

Réciproque !

Proposition 4. f analytique $\implies f^{(n)}$ aussi.

1.4 La fonction exponentielle [Rud]

Définition, dérivée, morphisme, dessin app conforme. THRON ?

2 Formule de Cauchy et conséquences

2.1 Intégrale, indice

Définition 3. Intégrale le long d'un chemin.

Exemple. Param du cercle.

Définition 4 ([Rud p. 247]). Indice.

Exemple. Cercle parcouru n fois.

Proposition 5. Dans \mathbf{Z} , invariance par homotopie, constance sur les composantes connexes et nullité à l'infini, morphisme du π_1 dans \mathbf{C} .

Application. \mathbf{S}^1 n'est pas simplement connexe.

Application. Brouwer en dim 2.

2.2 Théorème de Cauchy [Vogel]

Théorème 1 (Cauchy). Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins homotopes, on a $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ pour $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$.

Goursat.

Application. Primitive complexe sur un ouvert simplement connexe.

Attention à l'hypothèse, cf logarithme complexe.

Application. Détermination du log, des puissances.

2.3 Formule de Cauchy et premières conséquences

Théorème 2. Formule de Cauchy.

Exemple. Spécialisation en un cercle.

Application. Formule de la moyenne.

Application. Calcul de $\int \frac{\sin t}{t}$ [Bass, cours de mathématiques II, p.786].

Proposition 6. Calcul de la dérivée n -ième.

2.4 Analyticité des fonctions holomorphes et applications

Théorème 3. Analyticité sur une boule de rayon maximal.

Corollaire 1. $f \in \mathcal{H}(\Omega) \implies f' \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Corollaire 2. Toute SE est analytique.

Lemme 1. Factorisation [Vinx p. 52]

Théorème 4. Ppe des zéros isolés, prolongement analytique.

Exemple. Prolongement de ζ [Amar-Matheron].

Application (Serre). La série $\sum 1/p$ diverge. Équivalent de $\sum 1/p^k$.

Théorème 5. *Inversion globale holomorphe.*

Théorème 6 (Liouville). *Cas polynôme.*

Application (D'Alembert-Gauss).

Théorème 7. *Ppe du maximum.*

Corollaire 3 (Lemme de Schwarz, [Rud p. 298]).

Théorème 8. *Automorphismes du disque unité.*

2.5 Théorème de Morera et applications

Théorème 9 (Morera).

Réciproque de Goursat

Application. $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap C(\Omega)$ est holomorphe.

Théorème 10. *Holomorphie sous le signe somme.*

Application ([Gou]). $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $Re z > 0$.
Équation fonctionnelle, application au prolongement à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}_-$.

3 Suites de fonctions holomorphes, [Vinx], [Rud]

Définition 5. Topologie.

Théorème 11 (Weierstrass). *Stabilité par passage à la limite.*

Théorème 12 (Familles normales).

Application. La topologie n'est pas normable (par Riesz).

Théorème 13 (Cartan). $[Z-Q]$.

Théorème 14 (Représentation conforme).

4 Méromorphie et théorème des résidus

Théorème 15 ([Rud p. 253]). *Comportement au voisinage d'une singularité.*

Application. Les automorphismes du plan !

Définition 6. Méromorphie.

Définition 7. Résidu.

Théorème 16 (Résidus).

Corollaire 4 (Rouché, [Vinx]).

Proposition 7. *Calculs d'intégrales, cf Cartan.*

Exemple. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

Exemple ([Cand]). $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

TF gaussienne ?

Exemple. Pac Man.

Application (Formule des compléments).

Harmonicité ?

Références

Beck
Rudin
Rouvière
Gourdon
Vogel
Amar-Mathereon
Cartan
Bass