246 - Séries de FOURIER. Exemples et applications

Notations : $C^0_{2\pi}$, $e_n = e^{int}$, $L^p_{2\pi}$. On a alors $C^\infty_{2\pi} \subset C^k_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$
Homotétie-translation -> intervalle $[0, 2\pi]$

1 Définition et premières propriétés

1.1 Séries trigonométriques

Définition 1. Polynôme trigonométrique. c_n, a_n, b_n.

Proposition 1. *Tout polynôme trigo est dans* $C^\infty_{2\pi}$.

Définition 2. Série trigo.

Proposition 2. *Si* $\sum |c_n|$ *cv, alors les sommes partielles cvn.*

Exemple. $\sum_{n\in\mathbf{Z}^*} 1/n^2 e_n$ converge.

Proposition 3. *Si* $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *et* $(c_{-n})_{n\in\mathbf{N}}$ *(resp.* (a_n) *et* (b_n)*) sont réelles décroissantes tendant vers 0, alors la ST cvs sur* $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ *et cvu sur tout compact de* $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$.

Exemple. $\sum 1/n \sin n$ cv.

Proposition 4. *Calcul de* c_n *(*a_n *et* b_n*) pour une ST.*

1.2 Séries de Fourier

Définition 3. Coeffs de Fourier pour $f \in L^1_{2\pi}$.

Remarque. Parité, imparité, symétrie...

Définition 4. Série de Fourier, $S_n(f)$.

Proposition 5. *TOC, ZQ*

Lemme 1 (Riemann-Lebesgue).

Exemple. La SF de $\frac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$ prolongé par parité est $\sum 1/n \sin nt$.

Proposition 6. *Pour tout* $f \in L^1_{2\pi}$*, on a* $f * e_n = c_n(f)e_n$*. Les* e_n *sont des vp des opérateurs de convolution.*

Proposition 7. *L'application* $L^1 \to C^0_0$ *est un morphisme d'algèbres injectif continu de norme 1 non surjectif (application ouverte et noyau de Dirichlet).*

1.3 Décroissance du signal ?

2 Noyaux et convergences

2.1 Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Définition 5. Noyau de Dirichlet.

Proposition 8. *Propriétés noyau de ZQ.*

Définition 6. $\sigma_n(f)$

Définition 7. Noyau de Féjer.

Proposition 9. *Propriétés noyau de ZQ (approximation de l'identité).*

2.2 Convergences de la SF

Théorème 1 (Féjer)**.** *Cf Beck.*

Application. Cf Beck.

Remarque. Phénomène de Gibbs.

Théorème 2 (taubérien)**.** *Cf Combes.*

Théorème 3. *Convergence de S_n, cf Beck.*

Théorème 4. *Convergences ponctuelle et normale.*

3 Cadre hilbertien

Proposition 10. *$S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $Vect(e_{-n}, \dots, e_n)$.* $\inf_{g \in Vect(e_{-n},\dots,e_n)} \|f-g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{-n}^{n} |c_k(f)|^2$.

Proposition 11. *(e_n) est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

Théorème 5 (Parseval)**.** *+ inverse de l'isométrie.*

Application. Calcul de $\sum 1/n^2$...

Application. Inégalité isopérimétrique.

4 Applications

Nombres de Bernoulli
Formule de Poisson
Poincaré Wirtinger (Gourdon p. 264)
Critère de Weyl
Inégalité isopérimétrique

Soit $P \in C[X]$ de degré n tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. Alors $\sup_{|z|=1} |P(z)| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$
Équation de la chaleur [Gou p. 348] / des ondes [Candelpergher].
Fonction continue nulle part dérivable [ZQ].

Références

Beck
Gourdon
Zuily Queffélec
J. Combes
Berger Gostiaux