# 247 - Exemples de problèmes d'interversion de limites.

## 1 Premiers contre-exemples

- $\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\mathbf{1}_{x\geq y}=0$, $\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\mathbf{1}_{x\geq y}=1$.
- Soit $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+^*$, $(x,y)\mapsto\frac{x}{x+y}$. Alors $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=1$ et $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$.
- Soit $f_n=x^n$ sur $[0,1]$. Alors $\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ et $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1}f_n(x)=1$.
- Soit $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\frac{1}{n}\sin(nx)$. Alors $f_n\to 0$ alors que $f_n'\not\to 0$.
- Contre ex cvd alors que cvs : tente vers 0.

Un peu plus pêchu : la phénomène de Gibbs [Gou p. 267]

## 2 Limites de suites et séries

### 2.1 Séries numériques

**Théorème 1** (Sommation des équivalents)**.**

*Exemple.* Développement asymptotique de la série harmonique.

**Théorème 2** (Fubini)**.**

*Exemple.* $\sum_{q\geq 2}\sum_{p\geq 2}\frac{(-1)^q}{p^q}=\frac{1}{2}$.

**Théorème 3** (Produit de Cauchy)**.**

**Dessin et exemple !**

*Exemple.* $\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}\frac{1}{4^n}=2$ + dessin.

**Théorème 4** (Taubérien de Hardy)**.** *Combes.*

### 2.2 Suites et séries de fonctions

**Théorème 5.** *Passage de la continuité à la limite uniforme.*

**$x\mapsto x^n$ montre que la cvs ne suffit pas.**

*Exemple.* exp est continue sur $\mathbf{C}$.

**Proposition 1.** *Critère de cv uniforme (FGN p. 169).*

**Théorème 6.** *Dérivation et limite uniforme.*

*Exemple.* Dérivée des séries entières classiques.

**Contre ex du début.**

*Application.* Formule sommatoire de Poisson, [Gou p. 271].

**Théorème 7** (Holomorphie d'une limite)**.**

*Remarque.* Pas besoin d'avoir la cvu des dérivées : on peut appliquer le th de Morera.

### 2.3 Cas des séries entières, comportement au voisinage du bord du disque de convergence

**Proposition 2.** *Holomorphie dans le disque ouvert de convergence, calcul de la dérivée.*

**Théorème 8** (Abel, [Gou p. 252])**.**

**Réciproque :**

**Théorème 9** (Taubérien d'Hardy-Littlewood)**.**

*Exemple.* C'est moche, mais calcul de $\ln 2$.

**Théorème 10** (Étude aasymptotique)**.** *FGN p. 212*

### 2.4 Séries de Fourier

Convergence ponctuelle, convergence uniforme, utilisation du théorème taubérien.

## 3 Liens avec l'intégration

### 3.1 Échange de limites et d'intégrales

*Remarque.* Une intégrale est une limite !

**Théorème 11** (Convergence monotone)**.**

**Théorème 12** (Convergence dominée)**.**

*Exemple.* Contre exemple !

*Exemple.* Trancature.

*Exemple.* Cayley-Hamilton (Fun !), [FGN alg. 2 p. 229].

**Théorème 13** (Fubini).

*Exemple.* Bateau, calcul de l'intégrale de Gauss.

**Théorème 14** (Sommation des relations de comparaison).

*Exemple.* $\sum_{n\geq 0} x^{2^n} \sim_{x\to 1} -\frac{\ln(1-x)}{\ln 2}$. [FGN p. 210]

**Théorème 15** (Méthode de Laplace).

Cf leçon intégrales à paramètres.

### 3.2 Intégrales généralisées

**Définition 1.** Intégrale généralisée.

**Théorème 16** (Critère d'Abel).

*Exemple.* Intégrale de Fresnel.

*Exemple* ([Cand p. 30/135]). Calcul de $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

## 4 Calcul différentiel

**Théorème 17** (Schwarz).

**Corollaire 1.** *La hessienne en un point est une fbs.*

*Exemple.* Hauchecorne...