253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

1 Inégalités classiques

Inégalité arithmético-géométrico harmonique [+ Gou p. 113 ?].
FGN p. 285. Lemme ellipsoïde de John.
Hölder, Minkowski avec applications aux L^p et ℓ^p.

2 Parties convexes

2.1 Généralités

Définition.
Premiers exemples : parties convexes de $\mathbf{R}$, demi-espaces fermés [Vinx p.26], ensembles de niveau, intersection de convexes, épigraphe.
Définition de l'enveloppe convexe
Théorème de Carathéodory, application à la (pré) compacité
IAF
Théorème de Gauss-Lucas [FGN]
Théorèmes de Brouwer et de Schauder. Champ rentrant dans une sphère, équa diff [Pommelet, qui se viande bien comme il faut].

2.2 Projection sur un convexe fermé

Théorème 1. *Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert et C un cvx fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe $p \in C$ tq $\|x_p\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$. C'est la projection de x sur C. Si on note p_C l'application qui à x associe sa projection sur C, celle-ci est l'unique élément de C tel que $Re(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \langle) \leq 0$ pour tout $y \in C$. De plus, l'aplication p_C est 1-lipsch.*

Corollaire 1. *Soit F un sev fermé de H Hilbert. Pour tout $x \in H$, $p_F(x)$ est l'unique $p \in H$ tq $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$. De plus, l'application $p_F : H \to F$ est linéaire, continue et surjective, et H se décompose en somme directe orthogonale $H = F \oplus F^\perp$. En particulier, un sev F est dense ssi $F^\perp = \{0\}$.*

Proposition 1. *Expression de la projection sur un sev défini par une de ses bases.*

Application. Müntz.

2.3 Théorème de Hahn-Banach

Jauge d'un convexe [Brezis, Rouvière]
Énoncés.
Existence hyperplan tangent.
Tout convexe fermé est intersection des demi-espaces qui le contiennent.
Tout sev est intersection d'hyperplans .
Dense ssi orthogonal (dans le dual) est vide.
Enveloppe convexe de O_n [ZQ].

3 Optimisation

3.1 Théorie [Roberts]

Minimum local implique minimum global.
Théorème d'Euler [Vinx].
Théorèmes A, B, C, D [Roberts].
Ppe du maximum [Gou].
Ellipsoïde de John.

3.2 Analyse numérique

Méthode de Newton pour les convexes (insister sur le fait que si x extremum alors $f'(x) = 0$).
Méthode de la trichotomie [C-L].
Gradient à pas optimal [Allaire].

Références

FGN
Alessandri
Roberts
Beck
Rouvière
Chambert-Loir
Allaire