

Systemes dynamiques

Pierre-Antoine Guihéneuf

6 octobre 2026

Table des matieres

I	Quelques exemples representatifs	3
1	Rotations	3
2	Billards et flots lineaires	4
2.1	Section de Poincaré	4
3	Echanges d'intervalles	5
4	Décalages	5
5	Endomorphismes du cercle et de l'intervalle	6
5.1	Endomorphismes de $\mathbb{R}$	6
5.2	Degré	7
5.3	Application tente	7
5.4	Famille logistique	8
5.5	Langues d'Arnold	9
5.6	Degré plus grand	10
6	Application de Gauss	11
7	Automorphismes lineaires	12
II	Dynamique topologique	12
8	Conjugaison	12
9	Réurrence	13
10	Transitivité	14
11	Mélange topologique	15

12 Minimalité	16
13 Applications à la théorie de Ramsey	17
III Dynamique mesurée	18
14 Système dynamique mesuré	18
15 Mesures invariantes pour systèmes dynamiques topologiques	21
15.1 Exemples	21
15.2 Préliminaires d'analyse fonctionnelle	22
15.3 Existence de mesures invariantes	22
16 Ergodicité	23
17 Structure des mesures invariantes	26
18 Théorème ergodiques	27
18.1 Théorème ergodique de Von Neumann	27
18.2 Théorème ergodique de Birkhoff	30
19 Mélange	33
20 Décomposition ergodique	36
21 Application de Gauss	38
IV L'entropie	38
22 Entropie topologique	39
23 Entropie mesurée	39
24 Principe variationnel	39
V Dynamique en dimension 1	39
25 Nombre de rotation	39
26 Échanges d'intervalles	39
27 Groupes d'homéomorphismes du cercle	39

Première partie

Quelques exemples représentatifs

Définition 0.1. Un *système dynamique à temps discret* est un couple (X, f) , où X est un ensemble et $f : X \rightarrow X$ une application. L'ensemble X est appelé *espace des paramètres* ou parfois *espace des phases* du système, l'application f est la *loi d'évolution* ou la *dynamique*.

L'*orbite positive* de $x \in X$ est

$$\text{orb}^+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Si f est inversible, on peut définir l'*orbite* de $x \in X$ comme

$$\text{orb}(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

On dit que l'orbite de x est *périodique* s'il existe $n > 0$ tel que $f^n(x) = x$. La *période* de cette orbite est $\min\{n > 0 \mid f^n(x) = x\}$.

Remarque 0.2. Un système dynamique à temps discret peut être vu comme une action du monoïde $\mathbb{N}$ sur X (ou du groupe $\mathbb{Z}$ si f est bijective). Un système dynamique à temps continu est une action du monoïde $\mathbb{R}_+$ sur X , ou du groupe $\mathbb{R}$; une telle action est souvent notée $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$. L'étude plus générale des actions de groupes topologiques est, dans certains cas, elle aussi considérée comme relevant des systèmes dynamiques (suivant le point de vue adopté).

1 Rotations

On note $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle, qui est de ce fait de longueur 1 (on compte les angles en tours) et, pour $n \geq 1$, on note $\mathbb{T}^n := (\mathbb{S}^1)^n$ le tore de dimension n .

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbb{T}^n &\longrightarrow \mathbb{T}^n \\ x &\longmapsto x + \alpha \end{aligned}$$

la rotation (ou translation, en fonction de notre point de vue préféré) d'angle α . L'application R_α ne dépend que de la classe de α modulo $\mathbb{Z}^n$. Notons que cela se généralise naturellement en remplaçant $\mathbb{T}^n$ par un groupe quelconque et α par un élément de ce groupe.

Proposition 1.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La rotation R_α possède une orbite périodique ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$, auquel cas toutes les orbites sont périodiques. Dans le cas contraire, toutes les orbites sont denses.*

Exemple 1.2. Prenons $n = 2$ et $\alpha = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Alors les orbites de la rotation R_α ne sont ni périodiques ni denses. L'adhérence de chaque orbite est une translation du sous-groupe $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{S}^1\} < \mathbb{T}^2$.

Exercice 1.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une CNS portant sur α pour que toutes les orbites de R_α soient périodiques.
2. Déterminer une CNS portant sur α pour que toutes les orbites de R_α soient denses.

2 Billards et flots linéaires

On se place exceptionnellement dans le cas d'un système dynamique à temps continu.

On joue au billard dans un rectangle R identifié à $[0, a] \times [0, b]$: la boule est un point se déplaçant en ligne droite dans l'intérieur du rectangle, et rebondissant sur ses bords en suivant les lois de la réflexion (on dit *spéculaire* pour faire savant). La vitesse (numérique) de la boule est constante, normalisée à 1.

On obtient alors un système à temps continu dont l'espace des paramètres est T^1R le fibré unitaire tangent du rectangle (il faut faire un peu attention à la définition de T^1R en les points du bord ∂R et ne considérer que les vecteurs rentrants). Les orbites sont notées $(\phi^t((x, v)))_{t \in \mathbb{R}_+}$ (on peut aussi, si on veut, définir les orbites en temps négatif).

On remarque facilement qu'il y a au plus 4 angles possibles pour le vecteur $\phi^t((x, v))$ à v fixé, qui sont les réflexions de v selon les axes de coordonnées. Ces 4 angles permettent de « déplier » le rectangle R par un revêtement d'ordre 4 qui est un tore plat $\mathbb{R}/(2a\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}/(2b\mathbb{Z})$. La dynamique sur ce tore est un flot linéaire $\psi^t((x, v)) = x + tv$ (on considère bien sûr la classe d'équivalence). Quitte à conjuguer par une application linéaire diagonale, on peut supposer que $a = b = 1$.

2.1 Section de Poincaré

On peut se ramener à un système à temps discret en dimension 1 en utilisant une *section de Poincaré* : on suppose que v n'est pas vertical et on pose $S = \{0 \bmod \mathbb{Z}\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour $x \in S$ et v non vertical, on pose

$$\tau_v(x) = \inf\{t > 0 \mid \pi_{\mathbb{T}^2}(\psi^t(x, v)) \in S\} \quad \text{et} \quad f_v(x) = \pi_{\mathbb{T}^2}(\psi^{\tau_v(x)}(x, v)).$$

τ_v est le *temps de premier retour* de x sur S et f_v est l'*application de premier retour* sur S .

Lemme 2.1. *Dans le cas du flot linéaire sur le tore, l'application de premier retour est une rotation d'angle $\tan \theta$, où θ est l'angle entre le vecteur v et l'horizontale.*

On en déduit assez facilement que les orbites périodiques de ψ sont exactement celles des vecteurs dont la pente est rationnelle. Le même résultat vaut pour ϕ .

On peut bien sûr s'amuser à définir des billards ou des flots de translation sur des tables plus compliquées : surfaces dites plates, tables de billard à bord lisse, convexes ou concaves, analytiques par morceaux...

Theorème 2.2 (Forni 2026, [For26]). *Dans tout polygone ayant un nombre fini de côtés, le flot de billard possède au moins une orbite périodique.*

3 Échanges d'intervalles

Donnons-nous I un segment. Une *échange d'intervalles* est une bijection T de son domaine $D_T \subset I$ sur son image $I_T \subset I$ telle que :

- $I \setminus D_T$ et $I \setminus I_T$ sont des ensembles finis de même cardinal ;
- la restriction de T à chaque intervalle de D_T est une translation.

Ainsi, l'image des points de D_T n'est pas définie : les orbites infinies sont bien définies seulement en dehors d'un ensemble au plus dénombrable.

Remarque 3.1. Un échange de deux intervalles est une rotation.

Une des justifications de leur étude est le fait que les applications de premier retour sur des intervalles pour les flots linéaires sur les surfaces plates sont des échanges d'intervalles.

4 Décalages

On le verra plus tard, on peut parfois ramener l'étude de certaines dynamiques sur des variétés à celle de dynamiques sur des espaces discrets.

Exercice 4.1. Soit X un ensemble fini et $f : X \rightarrow X$. Montrer que toute orbite est pré-périodique (on dit aussi ultimement périodique) : pour tout $x \in X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x)$ appartienne à une orbite périodique.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini non vide (un alphabet) et $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. On définit l'application de décalage (en anglais : *shift*) sur X par

$$\begin{aligned} \sigma : X &\longrightarrow X \\ (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}} &\longmapsto (\omega_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Une telle application est appelée *décalage complet* ou *bilatère*.

On peut aussi définir l'application de décalage sur $X = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ avec la même formule, avec la différence que cette application-ci n'est pas inversible. Une telle application est appelée *décalage positif*.

Topologie, métrique

On peut munir l'ensemble X de la topologie produit qui en fait un espace compact. Une base d'ouverts¹ de cette topologie est formée des ensembles appelés *cylindres* : pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{-n \leq i \leq n}$, on définit

$$C_x := \{\omega \in X \mid \forall i \in \llbracket -n, n \rrbracket, \omega_i = x_i\}$$

On peut même définir une métrique compatible avec cette topologie : pour $\omega, \omega' \in X$, on pose

$$d(\omega, \omega') := 2^{-\max\{n \in \mathbb{N} \mid \forall i \in \llbracket -n, n \rrbracket, \omega_i = \omega'_i\}} \quad (1)$$

(c'est une distance ultramétrique sur X). Le fait que cette métrique engendre la topologie sus-nommée vient du fait que les boules pour cette métrique sont exactement les cylindres.

Proposition 4.2. *L'ensemble X muni de cette topologie est homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.*

La preuve de cette proposition est équivalente à celle d'un théorème de Brouwer : tous les espaces métriques parfaits, non vides, compacts et totalement discontinus sont homéomorphes. Elle ne sera pas traitée ici.

5 Endomorphismes du cercle et de l'intervalle

5.1 Endomorphismes de $\mathbb{R}$

On définit l'ordre suivant sur les entiers :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & 3 & < & 5 & < & 7 & < & 9 & < & 11 & < \dots < & (2n+1) \cdot 2^0 & < \dots \\ < & 3 \cdot 2 & < & 5 \cdot 2 & < & 7 \cdot 2 & < & 9 \cdot 2 & < & 11 \cdot 2 & < \dots < & (2n+1) \cdot 2^1 & < \dots \\ < & 3 \cdot 2^2 & < & 5 \cdot 2^2 & < & 7 \cdot 2^2 & < & 9 \cdot 2^2 & < & 11 \cdot 2^2 & < \dots < & (2n+1) \cdot 2^2 & < \dots \\ < & 3 \cdot 2^3 & < & 5 \cdot 2^3 & < & 7 \cdot 2^3 & < & 9 \cdot 2^3 & < & 11 \cdot 2^3 & < \dots < & (2n+1) \cdot 2^3 & < \dots \\ & \vdots & & & & & & & & & & & & \\ \dots < & 2^n & < \dots < & 2^4 & < & 2^3 & < & 2^2 & < & 2 & < & 1. \end{array}$$

(image honteusement pompée sur Wikipedia)

Théorème 5.1 (Sharkowski, 1964). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}^*$. Si f possède un point périodique de période n , alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \triangleleft m$, f possède un point périodique de période m .*

[Applications de Sharkowski sur des exemples concrets.](#)

1. Un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert s'écrive comme la réunion d'éléments de cet ensemble.

5.2 Degré

Soit $f = \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ une application continue. Celle-ci se relève en une application $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unique à translation par un nombre entier près (étant donné un relevé $\tilde{f}$, tous les autres sont de la forme $\tilde{f} + n$, avec $n \in \mathbb{Z}$, et toutes les applications de cette forme sont des relevés).

Il existe alors un entier $d \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, on ait $\tilde{f}(\tilde{x} + 1) = \tilde{f}(\tilde{x}) + d$. Ce nombre est indépendant du choix du relevé et appelé le *degré* de l'endomorphisme du cercle f .

5.3 Application tente

Posons

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1/2 \\ -2x + 2 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Cette application peut être vue comme une application $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ par passage au quotient, elle devient un endomorphisme de degré 0 du cercle. Elle est appelée « application tente ».

Codage Posons

$$I_0 = [0, 1/2] \quad \text{et} \quad I_1 =]1/2, 1].$$

A chaque $x \in [0, 1]$ on associe $h(x) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \geq 0$ on ait $f^n(x) \in I_{h(x)_n}$ (c'est la suite des numéros des intervalles dans lesquels les itérés de x tombent). La suite $h(x)$ est le *codage* de x . Réciproquement, pour toute suite $(\omega_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, il existe un unique point $x_\omega \in [0, 1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $f^n(x_\omega) \in I_{\omega_n}$ (à n fixé, l'ensemble des y tels que pour tout $i \leq n$ on ait $f^i(y) \in I_{\omega_i}$ est un intervalle de longueur $1/2^n$, l'ensemble des points qui nous intéresse peut donc être vu comme une intersection décroissante de compacts non vides dont le diamètre tend vers 0). L'application h n'est pas continue, en revanche $\omega \mapsto x_\omega$ l'est (mais n'est pas injective : il y a le même type de bugs que pour la représentation décimale des réels).

On obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f} & [0, 1] \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \{0, 1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \end{array}$$

On peut ainsi comprendre la dynamique de f en étudiant celle de σ .

5.4 Famille logistique

Pour $\lambda > 0$, on pose

$$\begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda x(1 - x). \end{aligned}$$

Cette famille d'applications $(f_\lambda)_{\lambda>0}$ est appelée *famille logistique* ou *quadratique*, elle est dite *unimodale* (les éléments sont croissants puis décroissants).

L'étude de cette famille permet en fait de comprendre la dynamique de tous les polynômes réels de degré 2, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 5.2. *Soit P un polynôme réel de degré 2. Alors :*

- *soit P ne possède pas de point fixe, auquel cas toutes les orbites de P sont propres (tendent vers $\pm\infty$) ;*
- *soit P est affinement conjugué à $x \mapsto x^2$;*
- *soit P est affinement conjugué à un élément de la famille logistique.*

Démonstration. Exercice ! □

En particulier, toute application de la forme $x \mapsto x^2 + c$ est conjuguée à un élément de la famille logistique. C'est parfois cette dernière qui est étudiée préférentiellement.

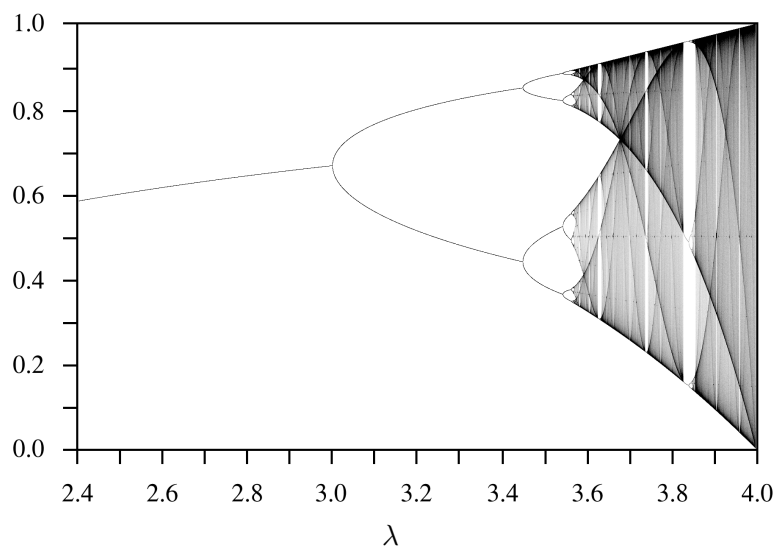
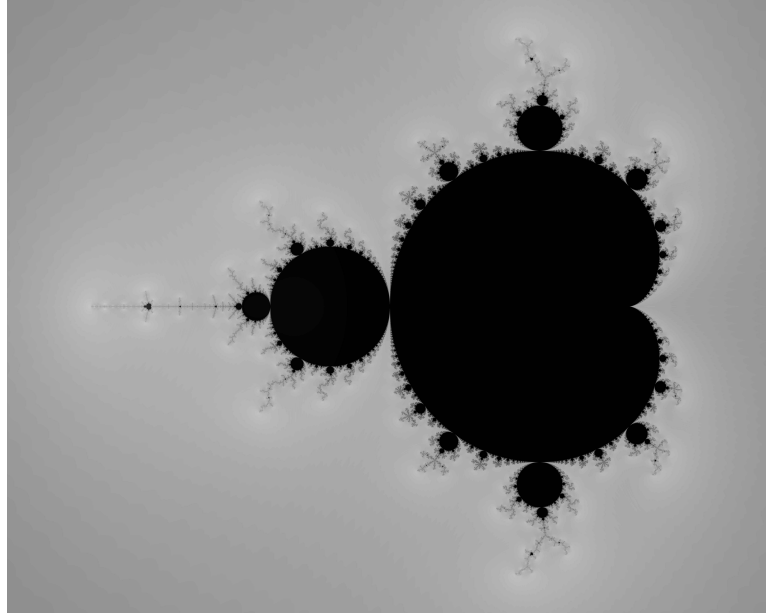


FIGURE 1 – Le diagramme de bifurcation de la famille logistique

On peut complexifier cette famille en considérant $z \mapsto z^2 + c$ pour $c \in \mathbb{C}$.



λ

FIGURE 2 – L'ensemble de Mandelbrot

Définition 5.3. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que la suite définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$ est bornée.

Théorème 5.4 (Douady, Hubbard, 1985). L'ensemble de Mandelbrot est connexe.

Conjecture 5.5 (« MLC »). L'ensemble de Mandelbrot est-il localement connexe² ?

L'étude de ces dynamiques est le terrain de chasse favori des spécialistes de *renormalisation* de la dynamique.

[Théorème de Koppel](#)

5.5 Langues d'Arnold

On considère $\theta \in \mathbb{R}$ et $K > 0$, et on pose

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\theta,K} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \theta + K \sin(2\pi x). \end{aligned}$$

Cette application passe au quotient par $\mathbb{Z}$ pour donner un endomorphisme $f_{\theta,K}$ du cercle. Il est de degré 1, et c'est un homéomorphisme si $|K| \leq 1/(2\pi)$.

2. Il possède une base d'ouverts connexes.

5.6 Degré plus grand

Définition 5.6. Un endomorphisme f de $\mathbb{S}^1$ est dit *dilatant* s'il est dérivable et si sa dérivée est partout > 1 en valeur absolue.

Exemple 5.7. Pour $d \geq 2$, l'application $x \mapsto dx \pmod{1}$. Notons qu'on peut découper $[0, 1[$ en les intervalles $[i/d, (i+1)/d[$, le codage de l'orbite de x suivant cette partition donne la suite des décimales de x en base d .

Lemme 5.8. *Un tel endomorphisme est un homéomorphisme local (chaque point possède un voisinage en restriction duquel f est un homéo sur son image) de degré d avec $|d| \geq 2$.*

Démonstration. On relève f en $\tilde{f}$ (c'est d'ailleurs comme ça qu'on définit la dérivée). Par propriété des valeurs intermédiaires de la dérivée (Darboux), celle-ci est soit partout < -1 , soit partout > 1 . L'inégalité sur le degré découle alors de l'inégalité des accroissements finis. $\square$

Les applications dilatantes du cercle constituent l'exemple le plus simple d'applications dites *hyperboliques*.

Proposition 5.9. *Une application dilatante du cercle de degré d est topologiquement conjuguée à $x \mapsto dx \pmod{1}$.*

En particulier, les applications dilatantes de même degré sont toutes conjuguées.

Démonstration. Soit f une application dilatante de degré d , on suppose $d \geq 2$. Une telle application possède un point fixe (par TVI), on peut choisir l'origine de la paramétrisation du cercle en ce point, si bien que $f(0) = 0$. On note $0 = x_1, x_2, \dots, x_d$ les pré-images de 0 par f , dont on note $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_d$ les relevés à $\mathbb{R}$ dans $[0, 1[$. Les points $0, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_d, 1$ délimitent des intervalles fermés-ouverts $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_d$, qu'on range par ordre croissant, et qui forment une partition de $[0, 1[$. La projection de ces intervalles sur $\mathbb{S}^1$ en fournit une partition $I_1, \dots, I_d$. On a une application $g : [0, 1] \rightarrow \llbracket 1, d \rrbracket^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f^n(x) \in I_{g(x)_n}$. Posons

$$h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$x \longmapsto \sum_{i \geq 0} \frac{g(x)_i}{d^{i+1}}$$

(on a allègrement confondu $\mathbb{S}^1$ avec $[0, 1]$ dans lequel on identifie 0 et 1). On vérifie alors que h est une application bijective et continue (c'est la même preuve que celle de l'écriture d'un nombre en base d), qui est donc un homéomorphisme ($\mathbb{S}^1$ est compact), et qui conjugue f à $x \mapsto dx \pmod{1}$. $\square$

6 Application de Gauss

On considère l'application suivante :

$$G : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1/x \mod 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Choisissons $\alpha \in [0, 1[$. Alors

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor + G(\alpha)}.$$

Posons $\alpha_0 = \alpha$ et définissons (α_n) par récurrence par $\alpha_{n+1} = G(\alpha_n)$. Posons aussi $a_n = \lfloor \frac{1}{\alpha_{n-1}} \rfloor$ (défini seulement si $\alpha_{n-1} \neq 0$). On a alors (si c'est bien défini)

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \alpha_1} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \alpha_2}} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Cette écriture donne la *fraction continue* associée à α . Cette fraction est associée aux propriétés – dites *diophantiennes* – d'approximation de α par des nombres rationnels. Déjà, la décomposition est bien définie pour tout n si et seulement si α est irrationnel (remarquer que l'algorithme de fraction continue correspond dans le cas d'un rationnel p/q à l'algorithme d'Euclide appliqué à p et q). Dans le cas contraire, on écrit

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}} = [a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$

et les fractions p_n/q_n sont appelées les *réduites* du nombre α . On a une autre caractérisation des nombres q_n , qu'on démontrera plus tard

Proposition 6.1. q_n est la suite des temps de retour le plus proche de 0 de la rotation d'angle α modulo 1 :

$$q_{n+1} = \min\{q > q_n \mid \|q\alpha\| < \|q_n\alpha\|\}$$

(on note $\|\cdot\|$ la distance à l'entier le plus proche).

Prenons $0 < q < q_n$ et $p \in \mathbb{N}$, alors par la proposition

$$|q\alpha - p| > |q_n\alpha - p_n|,$$

donc

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{|q_n\alpha - p_n|}{q} > \frac{|q_n\alpha - p_n|}{q_n} = \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|,$$

autrement dit les réduites sont les meilleurs approximations de α par des rationnels.

7 Automorphismes linéaires

Choisissons $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ (bien sûr, on peut plus généralement remplacer 2 par un entier $n \geq 2$). L'application $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ passe au quotient par $\mathbb{Z}^2$ et donne

$$f_A : \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$$

un endomorphisme du tore. On vérifie que $f_A f_{A^{-1}} = \text{Id}$, si bien que f_A est bijective et est appelée *automorphisme linéaire du tore* $\mathbb{T}^2$.

[Classification en fonction de la trace](#)

[Partition de Markov ?](#)

Deuxième partie

Dynamique topologique

Définition 7.1. Un système dynamique (X, f) est dit *topologique* si X est un espace topologique et f est continue.

Dans la suite de cette partie, tous les systèmes rencontrés seront topologiques.

8 Conjugaison

Définition 8.1. Deux systèmes dynamiques (X, f) et (Y, g) sont dits *conjugués* s'il existe une bijection $h : X \rightarrow Y$ telle que $g \circ h = h \circ f$.

Ils sont dits *topologiquement conjugués* s'il existe une telle bijection h qui est un homéomorphisme.

Une propriété sera dite *dynamique* (au sens topologique) si elle est préservée par conjugaison topologique.

[Exercice 8.2.](#) Montrer que deux rotations du cercle sont topologiquement conjuguées si et seulement si ce sont les mêmes.

Exemple 8.3. L'application tente et l'application f_4 de la famille logistique sont conjuguées sur $[0, 1]$ via l'homéomorphisme $x \mapsto \sin^2(\pi x/2)$.

Définition 8.4. Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques. On dit que (Y, g) est (topologiquement) *semi-conjugué* à (X, f) , ou que (Y, g) est un *facteur* de (X, f) , ou que (X, f) est une *extension* de (Y, g) , s'il existe une application (continue) surjective $h : X \rightarrow Y$ telle que $g \circ h = h \circ f$.

Exemple 8.5. — Soit $\alpha \in \mathbb{S}^1$. Alors la rotation R_α est un facteur de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}^2 &\longrightarrow \mathbb{T}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + \alpha, x + y) \end{aligned}$$

via la projection sur la première coordonnée.

— L'application

$$\begin{aligned} f_0 : \{0\} &\longrightarrow \{0\} \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

est un facteur universel.

Lemme 8.6. *Si (Y, g) est un facteur de (X, f) , et si f possède un point périodique de période p , alors g possède un point périodique de période divisant p .*

Démonstration. On suppose que $f^p(x) = x$. Alors $h(f^p(x)) = h(x)$, donc $g^p(h(x)) = h(x)$, autrement dit $h(x)$ est un point fixe de g^p , qui est donc un point périodique de g de période divisant p . $\square$

9 Récurrence

Définition 9.1 (α et ω limites). On appelle ω -*limite* de $x \in X$ l'ensemble d'accumulation de l'orbite positive de x :

$$\omega(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) \mid k \geq n\}}.$$

Si f est inversible, on appelle α -*limite* de $x \in X$ l'ensemble d'accumulation de l'orbite négative de x :

$$\alpha(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^{-k}(x) \mid k \geq n\}}.$$

Bien sûr, les α et ω -limites dépendent de la dynamique f , on écrira donc parfois, quand il est nécessaire de le préciser, $\omega_f(x)$ ou $\alpha_f(x)$. Ces ensembles sont non vides lorsque X est compact.

Définition 9.2 (Récurrence). On dit que $x \in X$ est (positivement) *récurrent* si $x \in \omega(x)$. L'ensemble des points positivement récurrents sera noté $\text{Rec}^+(f)$.

Autrement dit x est récurrent s'il existe une suite (n_k) tendant vers $+\infty$ telle que $\lim_k f^{n_k}(x) = x$.

Exemple 9.3. Pour une rotation du tore, tous les points sont récurrents.

Définition 9.4 (Point errant, ensemble non errant). On dit que $x \in X$ est *errant* s'il existe un voisinage V de x disjoint de ses itérés $(f^n(V))_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'*ensemble non errant* de f est l'ensemble des points qui ne sont pas errants, il est noté $\Omega(f)$.

Exemple 9.5. Le point $1/2$ n'est pas récurrent pour l'application $x \mapsto 2x \bmod 1$, en revanche il est non errant.

Pour l'application $x \mapsto 2x - x^2$ sur $[0, 1]$, tous les points sont errants sauf 0 et 1.

Proposition 9.6. *On suppose que X est un espace polonais³, plus généralement de Baire⁴, à base dénombrable. Si $\Omega(f) = X$, alors l'ensemble des points récurrents est dense.*

Attention, en général l'ensemble des points récurrents n'est pas dense dans l'ensemble non errant (exemple de flot de surface)!

Démonstration. On se donne $(O_k)_k$ une base dénombrable d'ouverts de X , et considère

$$\bigcap_k \left\{ x \in X \mid x \in \overline{O_k} \implies \exists n > 0 : f^n(x) \in O_k \right\}.$$

On vérifie que cet ensemble est bien une intersection dénombrable d'ouverts denses, qui contient l'ensemble des points récurrents. $\square$

Proposition 9.7 (Récurrences et semi-conjugaison). *Si $h : X \rightarrow Y$ semi-conjugué (Y, g) à (X, f) , alors :*

- pour tout $x \in X$ on a $h(\omega_f(x)) \subset \omega_g(h(x))$;
- $h(\text{Rec}^+(f)) \subset \text{Rec}^+(g)$ et $h(\Omega(f)) \subset \Omega^+(g)$;
- si f et g sont des homéomorphismes, alors pour tout $x \in X$ on a $h(\alpha_f(x)) \subset \alpha_g(h(x))$;

Ouverture à la théorie de Conley ? Récurrence par chaînes ?

10 Transitivité

Définition 10.1. Un système dynamique (X, f) est dit *positivement transitif* si, pour tous ouverts non vides U, V , il existe $n \geq 0$ tel que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Si f est inversible, (X, f) est dit *transitif* si, pour tous ouverts non vides U, V , il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Attention, ces deux définitions ne sont pas équivalentes : l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

est transitif mais pas positivement transitif.

3. Polonais signifie métrisable avec une métrique complète.

4. De Baire signifie que le théorème de Baire y est vérifié.

Exercice 10.2. Soit f un homéomorphisme transitif d'un espace topologique séparé X sans point isolé.

1. Montrer qu'il n'y a pas de point errant ;
2. En déduire que pour tout ouvert V , les ensembles $W = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(V)$ et $f(W)$ ont la même adhérence.
3. Montrer que f est positivement transitif.

Exemple 10.3. L'application $x \mapsto 2x \bmod 1$ est transitive. Une rotation irrationnelle du cercle est transitive. Aucun homéo de $\mathbb{R}$ n'est transitif.

Proposition 10.4. *On suppose que X est un espace de Baire séparé à base dénombrable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est positivement transitive ;
- (ii) il existe $x \in X$ tel que $\omega(x) = X$;
- (iii) l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\omega(x) = X$ est un G_δ -dense ;
- (iv) les ouverts non vides négativement invariants sont denses.

Démonstration. L'implication (iii) $\implies$ (ii) vient du fait que X est de Baire. L'implication (ii) $\implies$ (i) est une simple vérification. Pour l'implication (i) $\implies$ (iii), on fixe une base dénombrable d'ouverts $(O_k)_k$ et considère l'intersection

$$\bigcap_{k,m} \bigcup_{n \geq m} f^{-n}(O_k),$$

on vérifie alors que c'est un G_δ dense dont l' ω -limite de tout élément vaut X (le point central étant de montrer que l'hypothèse « X séparé » implique que l'image réciproque d'un ouvert non vide est non vide).

L'équivalence (i) $\iff$ (iv) est directe : si f est positivement transitif et $f^{-1}(O) \subset O$, alors $O = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(O)$ est dense. Réciproquement, si tout ouvert non vide négativement invariant est dense, alors pour tout ouvert non vide V , l'ouvert $\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(V)$ est négativement invariant et donc dense. $\square$

Exemple 10.5. On considère $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ qui est la concaténation de tous les mots de $\mathcal{A}$. Alors $\omega(x) = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et donc le décalage sur $\mathcal{A}$ est positivement transitif.

Exercice 10.6. Existence d'une fonction holomorphe dont la suite des dérivées est dense (feuille 4 M1).

11 Mélange topologique

Définition 11.1. Une dynamique f est dite *topologiquement mélangeante* si pour tous ouverts non vides U, V , il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Remarque 11.2. Le mélange topologique implique la transitivité.

Exemple 11.3. L'Anosov linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est mélangeant. Pour cela, utiliser le fait que ses directions propres sont de pentes irrationnelles.

Exemple 11.4. Le décalage (positif ou complet) sur un alphabet fini $\mathcal{A}$ est mélangeant. On traite le cas du décalage bilatère : considérer deux cylindres C_x et C_y , avec x de longueur $2n + 1$ et y de longueur $2m + 1$. Alors pour tout $k \geq n + m + 1$, on a $C_x \cap \sigma^{-k}(C_y) \neq \emptyset$.

12 Minimalité

Définition 12.1. Une dynamique f est dite *minimale* si tout fermé non vide positivement invariant est soit vide soit égal à X .

Proposition 12.2. On suppose X compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est minimale ;
- (ii) pour tout $x \in X$, on a $\overline{\text{orb}^+(x)} = X$;
- (iii) pour tout $x \in X$, on a $\omega(x) = X$.

Démonstration. Montrons (iii) $\implies$ (i) : pour tout fermé invariant F non vide on peut choisir $x \in F$, et donc (puisque F est fermé) $X \subset \omega(x) \subset F$. Pour (i) $\implies$ (ii), si $x \in X$, alors $\overline{\text{orb}^+(x)}$ est un fermé non vide positivement f -invariant, qui vaut donc X . Enfin, pour démontrer (ii) $\implies$ (iii) on remarque que $\omega(x) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\text{orb}^+(f^n(x))} = \bigcap_{n \geq 0} X = X$. $\square$

Exemple 12.3. Les rotations irrationnelles sur le cercle sont minimales

En utilisant la méthode dite d'*Anosov-Katok*, on peut montrer le résultat suivant :

Théorème 12.4 (Fathi-Herman, 1977). Il existe un difféomorphisme C^∞ minimal sur le tore $\mathbb{T}^2$ qui n'est pas conjugué à une rotation.

Si S est le disque de dimension 2, la sphère de dimension 2 ou l'anneau $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$, il existe un difféomorphisme C^∞ transitif sur S .

Théorème 12.5. Si X est compact et f est continue, alors il existe un ensemble fermé minimal pour f .

Démonstration. La preuve se base sur le lemme de Zorn. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées positivement invariantes et non vides de X , qui est non vide car il contient X . Toute intersection d'éléments de $\mathcal{F}$ est dans $\mathcal{F}$, pour cela on utilise le fait que X est compact. On considère alors un élément minimal (pour l'inclusion) de $\mathcal{F}$, dont on vérifie facilement qu'il est f -minimal. $\square$

Corollaire 12.6. *Si X est compact, alors il existe des points positivement récurrents.*

On verra plus tard une preuve de ce résultat qui ne fait pas appel à l'axiome du choix (corollaire 15.5).

Démonstration. On considère un ensemble minimal F , alors tout $x \in F$ vérifie $\omega(x) = F$ et en particulier $x \in \omega(x)$. $\square$

13 Applications à la théorie de Ramsey

Le but de cette section sera de démontrer le théorème suivant.

Theorème 13.1 (Van der Waerden, 1927). *Soit $\mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^N C_i$ une partition des entiers en un nombre fini d'ensembles. Alors l'un des C_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Il a depuis connu des généralisations frappantes, utilisant à des degrés divers la théorie ergodique.

Theorème 13.2 (Szemerédi, 1975). *Un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ de densité positive contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Theorème 13.3 (Green-Tao, 2008). *L'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Voir par exemple la présentation Bourbaki [Hos06].

On obtiendra le théorème de Van der Waerden comme corollaire à un résultat de récurrence « multiple ».

Theorème 13.4 (Furstenberg-Weiss, 1978). *Soit (X, f) un système dynamique topologique, avec f un homéo. Alors pour tout $\ell \geq 1$, il existe $x \in X$ et une suite $(n_k)_k$ tendant vers $+\infty$ telle que pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ on ait $f^{jn_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} x$.*

Pour une preuve de ce théorème, voir le poly de Cyril Houdayer [Hou26] (sans doute inspiré d'un post de Yuri Lima sur le blog de Carlos Matheus).

Voyons pourquoi ce théorème implique celui de Van der Waerden.

Démonstration du théorème 13.1. L'idée est d'appliquer le théorème 13.4 à un décalage approprié.

Premièrement, remarquons qu'il suffit de traiter le cas de partitions finies de $\mathbb{Z}$: une partition finie de $\mathbb{N}$ en ℓ ensembles donne une partition finie de $\mathbb{Z}$ en $2N + 1$ ensembles (par symétrie, et en ajoutant/retranchant l'atome $\{0\}$ pour éviter que 0 ne se retrouve dans 2 ensembles).

Soit $\ell \geq 1$ et $\mathbb{Z} = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} C_i$. On pose $\mathcal{A} = \llbracket 1, N \rrbracket$ et on munit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de l'application de décalage σ . Posons $y \in X$ tel que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on ait $i \in C_{y_i}$. On pose alors $X = \overline{\text{orb}(y)} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, qui est un ensemble compact en restriction duquel σ est un homéo.

Le théorème 13.4 assure l'existence de $x \in X$ et de $(n_k)_k$ tendant vers $+\infty$ tels que pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ on ait $d(\sigma^{jn_k}(x), x) \rightarrow_k 0$ (voir la définition (1) de la distance). En particulier, il existe $k_0 > 0$ tel que $d(\sigma^{jn_{k_0}}(x), x) < 1$, autrement dit que $x_{jn_{k_0}} = x_0$ (toujours pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$).

Or $x \in \overline{\text{orb}(y)}$, donc il existe des itérés de y arbitrairement proches de x , en particulier il existe $m_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, \ell n_{k_0} \rrbracket$ on ait $y_{i+m_0} = x_i$. Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, on a

$$x_0 = y_{m_0} = y_{jn_{k_0}+m_0}.$$

Cela exhibe une progression arithmétique de longueur ℓ et donc démontre le théorème. $\square$

Troisième partie

Dynamique mesurée

14 Système dynamique mesuré

On se fixe, pour cette section, un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$, tel que la mesure μ est σ -finie.

Définition 14.1 (Mesure invariante). Soit $f : X \rightarrow X$ une application mesurable. On dit que la mesure μ est *f-invariante* si pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$, on a $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Dans ce cas, le quadruplet $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ est appelé *système dynamique mesuré*.

Définition 14.2. Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ et $(Y, \mathcal{B}', \nu, g)$ deux systèmes dynamiques mesurés. Une bijection bi-mesurable $h : X \rightarrow Y$ est appelée une *conjugaison mesurée* si elle vérifie $h \circ f = g \circ h$ et si elle envoie μ sur ν .

Les propriétés dynamiques mesurées que l'on verra sont invariantes par conjugaison mesurée.

Exemple 14.3. La preuve de la proposition 5.9 implique que l'application $E_d : x \mapsto dx \bmod 1$ est mesurablement conjuguée au décalage sur $\llbracket 1, d \rrbracket^{\mathbb{N}}$.

Proposition 14.4. *Soit $f : X \rightarrow X$ une application mesurable. Alors μ est f -invariante si et seulement si pour toute fonction $\varphi \in L^1(X, \mu)$, on a*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \circ f \, d\mu. \quad (2)$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que μ est f -invariante. Cette hypothèse entraîne que l'équation (2) est valable pour les indicatrices. Par linéarité, (2) est donc valable pour les fonctions étagées. Étant donnée une fonction intégrable φ générale, on choisit une suite $(e_n)_n$ de fonctions étagées convergeant simplement vers φ et satisfaisant $|e_n| \leq |\varphi|$. Le théorème de convergence dominée (appliqué deux fois) affirme alors que

$$\int_X \varphi \, d\mu = \lim_n \int_X e_n \, d\mu = \lim_n \int_X e_n \circ f \, d\mu = \int_X \varphi \circ f \, d\mu,$$

ce qui démontre (2).

Pour l'autre implication, on utilise le fait que μ est σ -finie : pour tout mesurable $A \in \mathcal{B}$, il existe une suite $(A_n)_n$, croissante pour l'inclusion, de mesurables de mesure finie tels que $A = \bigcup_n A_n$. On a alors, par convergence monotone (Beppo-Levi) :

$$\mu(f^{-1}(A)) = \int_X \mathbf{1}_A \circ f \, d\mu = \lim_n \int_X \mathbf{1}_{A_n} \circ f \, d\mu = \lim_n \int_X \mathbf{1}_{A_n} \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A \, d\mu = \mu(A).$$

□

À partir de maintenant, toutes les mesures seront supposées de probabilité.

Théorème 14.5 (Récurrence de Poincaré). *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ un système dynamique mesuré, avec μ finie. Soit $A \in \mathcal{B}$ un ensemble mesurable de mesure positive. Alors pour μ -presque tout $x \in A$ il existe un nombre infini de temps $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \in A$.*

Démonstration. Soit A_0 l'ensemble des $x \in A$ qui ne reviennent jamais dans A (tels que pour tout $n > 0$, on a $f^n(x) \notin A$). Montrons que $\mu(A_0) = 0$. Pour cela, on montre que $f^{-i}(A_0)$ sont deux-à-deux disjoints : si $i < j$, on a $f^{-i}(A_0) \cap f^{-j}(A_0) = f^{-i}(A_0 \cap f^{i-j}(A_0))$. Or, pour $k > 0$, si $x \in f^{-k}(A_0)$, alors $f^k(x) \in A$ si bien que $x \notin A_0$. Ainsi, $f^{-i}(A_0) \cap f^{-j}(A_0) = \emptyset$. On vient de montrer que les $f^{-i}(A_0)$ sont deux-à-deux disjoints ; ils sont également tous de même mesure par préservation de celle-ci. Puisque μ est finie, ils sont tous de mesure nulle, en particulier $\mu(A_0) = 0$. Mais cela implique également que

$$\mu \left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(A_0) \right) = 0,$$

or cet ensemble est exactement celui des points qui ne reviennent qu'un nombre fini de fois dans A . $\square$

La version suivante, topologique, du théorème précédent, justifie l'appellation de théorème de *réurrence*.

Théorème 14.6 (Réurrence de Poincaré, version topologique). *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ un système dynamique mesuré, avec μ finie. On suppose de plus que X est un espace topologique à base dénombrable et que la mesure μ est borélienne. Alors μ presque tout point est récurrent.*

Démonstration. Notons $(U_k)_k$ une base dénombrable de la topologie. Pour tout k , on note U_k^0 l'ensemble des points de U_k qui ne reviennent jamais dans U_k , plus formellement $U_k^0 = U_k \setminus \bigcup_n f^{-n}(U_k)$. Posons

$$\tilde{X} = \bigcup_k U_k^0$$

Par le théorème de réurrence de Poincaré (théorème 14.5), on a $\mu(\tilde{X}) = 0$. Il reste maintenant à montrer que tout point qui n'est pas dans $\tilde{X}$ est récurrent. En effet, pour tout voisinage U de x il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_k \subset U$. Mais $x \notin U_k^0$, si bien qu'il existe $n > 0$ tel que $f^n(x) \in U_k \subset U$. $\square$

Donnons enfin une version plus quantitative du théorème de réurrence. Pour $A \in \mathcal{B}$ et $x \in A$, on pose $\tau_A(x) = \min\{n \geq 1 \mid f^n(x) \in A\}$ le temps de premier retour dans A (on pose $\tau_A(x) = \infty$ si le point ne revient pas dans A). Notre but est de calculer la moyenne de τ_A . On définit

$$X_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A) = \{x \in X \mid \exists n \geq 0 : f^n(x) \in A\}$$

l'ensemble de points dont l'orbite positive rencontre A .

Théorème 14.7 (Kač). *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ un système dynamique mesuré, avec μ finie. Soit $A \in \mathcal{B}$ un ensemble mesurable de mesure positive. Alors la fonction τ_A est intégrable et de plus*

$$\int_A \tau_A d\mu = \mu(X_A).$$

Autrement dit, la moyenne de τ_A est égale au rapport entre la quantité de points de X_A et celle de A .

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\begin{aligned} A_n &= \tau_A^{-1}(n), \\ A_n^* &= \{x \in X \mid \min\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \in A\} = n\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \in A \mid \forall n \geq 1, f^n(x) \notin A\}, \\ A_0^* &= \{x \in X \mid \forall n \geq 0, f^n(x) \notin A\}, \end{aligned}$$

Notons que ces ensembles sont mesurables et que cela justifie la mesurabilité de τ_A . On a une partition de X en :

$$X = A \sqcup (X \setminus A) = \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{n \geq 0} A_n^* \right),$$

par conséquent (en utilisant le théorème de récurrence de Poincaré)

$$\mu(X) = \sum_{n \geq 0} (\mu(E_n) + \mu(E_n^*)) = \mu(E_0^*) + \sum_{n \geq 1} (\mu(E_n) + \mu(E_n^*)). \quad (3)$$

Or on a $f^{-1}(A_n^*) = A_{n+1} \sqcup A_{n+1}^*$ (faire une dichotomie selon que le point choisi est dans A ou non), donc par invariance de la mesure μ : $\mu(A_n^*) = \mu(A_{n+1}) + \mu(A_{n+1}^*)$. Une récurrence directe montre que pour $m > n$ on a $\mu(A_n^*) = \mu(A_m^*) + \sum_{i=n+1}^m \mu(A_i)$. Or l'équation (3) implique que $\mu(A_m^*) \rightarrow_m 0$, si bien que $\mu(A_n^*) = \sum_{i \geq n+1} \mu(A_i)$. En injectant cette égalité dans (3), une petite manipulation sur les sommes donne que

$$\mu(X) - \mu(A_0^*) = \sum_{n \geq 1} n\mu(A_n),$$

autrement dit la conclusion du théorème. $\square$

15 Mesures invariantes pour systèmes dynamiques topologiques

Dans cette partie, on fixe un espace métrique compact X , muni d'une application continue $f : X \rightarrow X$. On note $\mathcal{B}$ la tribu borélienne sur X .

15.1 Exemples

- Si x est f -périodique de période p , alors la mesure uniforme sur son orbite $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \delta_{f^k(x)}$ est f -invariante.
- La mesure de Lebesgue est invariante par les rotations. Plus généralement, la mesure de Haar sur un groupe localement compact est invariante par l'action par translation (à gauche).
- La mesure uniforme sur $T^1 R$ est invariante par le flot de billard sur R .
- La mesure de Lebesgue est invariante pour tout échange d'intervalle.

- Si μ est la mesure uniforme sur l'alphabet $\mathcal{A}$, alors la mesure produit $\mu^{\otimes \mathbb{Z}}$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est invariante par le décalage.
- Pour $d \in \mathbb{Z}^*$, la mesure de Lebesgue est invariante par $x \mapsto dx \pmod{1}$.
- La mesure de densité $\frac{1}{\ln(2)(1+x)}$ est invariante par l'application de Gauss G sur $[0, 1]$.
- La mesure de Lebesgue est invariante par tout automorphisme linéaire f_A de $\mathbb{T}^2$.

15.2 Préliminaires d'analyse fonctionnelle

Définition 15.1. L'ensemble des mesures de probabilités béréliennes sur X est muni de la *topologie faible-** : on a $\mu_n \rightharpoonup_{n \rightarrow +\infty} \mu$ si pour toute fonction continue $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\int_X \varphi d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi d\mu.$$

Voilà une caractérisation classique et souvent utile de cette convergence.

Theorème 15.2 (Portemanteau). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\mu_n \rightharpoonup_{n \rightarrow +\infty} \mu$;
- pour tout fermé F de X on a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$;
- pour tout borélien $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Terminons ces courts préliminaires avec un résultat de compacité

Theorème 15.3 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *Toute suite de mesures de probabilités boréliennes sur X possède une sous-suite convergente pour la topologie faible-**.

15.3 Existence de mesures invariantes

Revenons aux systèmes dynamiques. Le résultat suivant indique que la section précédente peut être appliquée à tout système dynamique topologique.

Theorème 15.4 (Krylov-Bogolyubov). *Un système dynamique topologique (avec X compact métrisable) possède au moins une mesure de probabilité borélienne invariante.*

Il est important de se souvenir de sa preuve qui est utilisée un peu partout en théorie ergodique.

Démonstration. Soit (X, f) un système dynamique topologique et $x \in X$. On note

$$\mu_x^n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}$$

la mesure uniforme sur le segment d'orbite de x de longueur n . Par le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, on peut en trouver une sous suite qui converge vers une mesure (de proba) μ . Montrons que celle-ci est f -invariante. Par la proposition 14.4, il suffit de montrer que pour toute fonction continue φ sur X (« observable »), on a $\int_X (\varphi - \varphi \circ f) d\mu = 0$. Or

$$\begin{aligned} \int_X (\varphi - \varphi \circ f) d\mu_x^n &= \int_X (\varphi - \varphi \circ f) d\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{k+1}(x)) \\ &= \frac{1}{n} (\varphi(x) - \varphi(f^{n+1}(x))) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left| \int_X (\varphi - \varphi \circ f) d\mu_x^n \right| \leq \frac{2\|\varphi\|_\infty}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est en particulier vrai pour la sous-suite le long de laquelle μ_x^n tend vers μ , ce qui montre (par définition de la topologie faible-*) que $\int_X (\varphi - \varphi \circ f) d\mu = 0$. $\square$

On en déduit, comme promis, une version du corollaire 12.6 qui n'utilise pas Zorn.

Corollaire 15.5. *Si X est compact, alors il existe des points positivement récurrents.*

Démonstration. Par Krylov-Bogolyubov il existe une mesure de proba f -invariante. Par le théorème de récurrence de Poincaré, version topologique (théorème 14.6), μ -presque tout point est récurrent, a fortiori au moins un point est récurrent. $\square$

Définition 15.6. On note $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité invariantes par f .

16 Ergodicité

À partir de maintenant, sauf mention contraire, toutes les mesures seront supposées boréliennes et de probabilité.

Définition 16.1 (Ergodicité). On dit qu'une mesure f -invariante μ est *ergodique* si tout borélien f -invariant (*i.e.* un borélien A qui vérifie $f^{-1}(A) = A$) est de mesure 0 ou 1.

Quand on parlera de mesure ergodique, on voudra dire « mesure de probabilité borélienne f -invariante et ergodique ».

Exemple 16.2. Une rotation irrationnelle du cercle est ergodique (pour la mesure de Lebesgue sur le cercle, autrement dit la mesure de Haar).

Démonstration. On verra plus tard une preuve rapide utilisant la théorie de Fourier, voyons une preuve utilisant le théorème de densité de Lebesgue.

Soit $A \subset \mathbb{S}^1$ un borélien R_α -invariant, avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et $\text{Leb}(A) > 0$. Par le théorème de densité de Lebesgue, pour Leb-presque tout $x \in A$ on a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Leb}(A \cap [x - r, x + r])}{2r} = 1.$$

C'est vrai pour un certain $x_0 \in A$ que l'on fixe. Supposons que $\mu(A) < 1$, on peut alors appliquer le théorème de densité de Lebesgue à $\mathbb{S}^1 \setminus A$: il existe $y_0 \in \mathbb{S}^1$ tel que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Leb}(A \cap [y_0 - r, y_0 + r])}{2r} = 0.$$

Donc pour un certain $r_0 > 0$ assez petit, on a

$$\text{Leb}(A \cap [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) < \frac{r_0}{2} < \frac{3r_0}{2} < \text{Leb}(A \cap [x_0 - r_0, x_0 + r_0]).$$

Mais la rotation est minimale : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|R_\alpha^n(x_0) - y_0\| \leq \frac{r_0}{10}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Leb}(A \cap [x_0 - r_0, x_0 + r_0]) &= \text{Leb}(R_\alpha^n(A) \cap [R_\alpha^n(x_0) - r_0, R_\alpha^n(x_0) + r_0]) \\ &= \text{Leb}(A \cap [R_\alpha^n(x_0) - r_0, R_\alpha^n(x_0) + r_0]) \\ &\leq \text{Leb}(A \cap [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) \\ &\quad + \text{Leb}([R_\alpha^n(x_0) - r_0, R_\alpha^n(x_0) + r_0] \triangle [y_0 - r_0, y_0 + r_0]) \\ &\leq \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{5} < \frac{3r_0}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. □

Proposition 16.3. Soit $p \in [1, +\infty]$. Une mesure μ qui est f -invariante est ergodique si et seulement si toute fonction dans $L^p(\mu)$ et f -invariante (*i.e.* $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\varphi \circ f = \varphi$ μ -p.p.) est constante p.p.

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'une mesure μ est f -invariante et ergodique. Soit $\varphi \in L^p(\mu)$ qui vérifie $\varphi \circ f = \varphi$ μ -p.p. Alors tout ensemble de niveau

$$B_c := \varphi^{-1}([-\infty, c])$$

est f -invariant (à un ensemble négligeable près). Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\mu(B_c) \in \{0, 1\}$. Par conséquent, puisque $c \mapsto \mu(B_c)$ est croissante, il existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(B_c) = 0$ pour $c < c_0$ et $\mu(B_c) = 1$ pour $c > c_0$. Ainsi, pour tout $c > c_0$, on a $\mu(\varphi^{-1}([c_0, c])) = 1$ ce qui implique, en prenant une intersection sur c , que $\mu(\varphi^{-1}(\{c_0\})) = 1$.

L'autre implication est triviale puisque, la mesure μ étant de proba, toute indicatrice d'ensemble est dans $L^p(\mu)$. $\square$

Exemple 16.4. Cela donne une autre preuve de l'ergodicité des rotations irrationnelles sur le cercle.

Démonstration. On peut même faire la preuve dans le tore. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées forment une famille $\mathbb{Q}$ -libre (avec 1). Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^n)$ que l'on développe en série de Fourier : $\varphi = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e_{\mathbf{k}}$. Alors, pour $x \in \mathbb{T}^n$,

$$\varphi(R_{\alpha}(x)) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{k}} e^{2i\pi \langle \mathbf{k}, x \rangle} e^{2i\pi \langle \mathbf{k}, \alpha \rangle}.$$

L'invariance de φ par R_{α} et l'unicité du développement en série de Fourier impliquent que pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, on a $c_{\mathbf{k}}(e^{2i\pi \langle \mathbf{k}, \alpha \rangle} - 1) = 0$. Mais pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, le produit scalaire $\langle \mathbf{k}, \alpha \rangle$ n'est pas entier, ce qui fait que $e^{2i\pi \langle \mathbf{k}, \alpha \rangle} \neq 1$. Par conséquent, pour tout $\mathbf{k}$ non nul on a $c_{\mathbf{k}} = 0$, autrement dit φ est constante. $\square$

Exemple 16.5. Pour $d \geq 2$, l'application $E_d \ll dx \bmod 1 \gg$ est ergodique pour Leb. On en déduit, par l'exemple 14.3, que le décalage sur $\llbracket 1, d \rrbracket^{\mathbb{N}}$ est ergodique.

Démonstration. On ne change pas une méthode qui marche : on réutilise Fourier. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$ que l'on suppose E_d -invariante et que l'on développe en série de Fourier : $\varphi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$. Alors, pour $x \in \mathbb{S}^1$,

$$\varphi(E_d(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi k d x} = \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2i\pi k x},$$

si bien que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $c_k = c_{dk}$. Ainsi, s'il existait $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $c_k \neq 0$, alors on aurait $c_{d^n k} = c_k$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredirait le fait que les coefficients tendent vers 0. On en déduit que φ est constante. $\square$

Lemme 16.6. *Si un système dynamique topologique possède une mesure ergodique de support total, alors il est transitif.*

Démonstration. On appelle (X, f) un tel système dynamique topologique, et μ la mesure ergodique de support total.

Considérons un ouvert non vide f -invariant. Puisque μ est de support total, il est de μ -mesure positive. Par ergodicité, il est de μ -mesure totale. Puisque μ est de support total, il est dense. $\square$

17 Structure des mesures invariantes

On se place de nouveau dans le cas où X est un compact métrisable.

Définition 17.1. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de proba boréliennes sur X , $\mathcal{M}_f(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(X)$ constitué des mesures f -invariantes, et $\mathcal{M}_f^{\text{erg}}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_f(X)$ constitué des mesures f -ergodiques.

Lemme 17.2. *Les ensembles $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}_f(X)$ sont convexes, compacts et non vides.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{M}(X)$ est convexe est trivial, sa compacité est le théorème 15.3. Le fait que $\mathcal{M}_f(X)$ est convexe est une simple vérification, tout comme le fait que c'est un ensemble fermé. Le fait qu'il est non vide est le théorème 15.4. $\square$

Lemme 17.3. *Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_f(X)$ sont telles que ν est ergodique et μ est absolument continue par rapport à ν . Alors $\mu = \nu$.*

Autrement dit, les mesures ergodiques sont minimales pour la relation d'ordre « absolument continue par rapport à » dans l'ensemble $\mathcal{M}_f(X)$.

Démonstration. Par le théorème de Radon-Nikodym, pour tout borélien A on a $\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$. Puisque les deux mesures μ et ν sont f -invariantes, on en déduit que la fonction $\frac{d\nu}{d\mu}$ est elle aussi f -invariante. Par ergodicité, elle est donc constante presque partout et puisque ν est de proba cette constante ne peut être que 1. En d'autres termes $\mu = \nu$. $\square$

Proposition 17.4. *Les mesures ergodiques sont les points extrémaux de $\mathcal{M}_f(X)$.*

On verra plus tard un résultat plus fort qui montre que toute mesure invariante s'écrit comme une « combinaison convexe » de mesures ergodiques.

Démonstration. Supposons d'abord que μ est ergodique et montrons que c'est un point extrémal de $\mathcal{M}_f(X)$. Écrivons donc $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$, avec $t \in]0, 1[$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_f(X)$. Remarquons que la condition $\mu(A) = 0$ implique que $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$, autrement dit μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à μ . Par le lemme 17.3, ça implique que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Supposons maintenant que μ n'est pas ergodique : il existe un borélien A qui est f -invariant et vérifie $\mu(A) = t \in]0, 1[$. On note μ_1 la mesure $\mu|_A$ normalisée, et μ_2 la mesure $\mu|_{X \setminus A}$ normalisée, ce qui donne $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$. $\square$

Corollaire 17.5. *Un système dynamique topologique sur un espace compact possède toujours une mesure ergodique.*

Démonstration. Il « suffit » de trouver un point extrémal au convexe compact, qui est non vide par théorème 15.4 de Krylov-Bogolyubov. On se donne une famille dense $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $C^0(X, \mathbb{R})$. On pose $M_0 = \mathcal{M}_f(X)$ et, pour $n \geq 0$,

$$M_{n+1} = \left\{ \mu \in M_n \mid \int_X \varphi_{n+1} d\mu = \sup_{\nu \in M_n} \int_X \varphi_{n+1} d\nu \right\}.$$

On montre que $\bigcap_{n \geq 0} M_n$ est non vide (c'est une intersection décroissante de compacts) et réduit à un point (deux mesures ayant les mêmes valeurs contre les φ_n sont identiques), qui se trouve être extrémal (vérification directe). $\square$

Définition 17.6 (Unique ergodicité). On dit qu'un système dynamique topologique (X, f) est *uniquement ergodique* s'il possède une unique mesure invariante.

Le faire en TD ?

18 Théorème ergodiques

Les théorèmes ergodiques se proposent d'étudier le comportement asymptotique des *sommes de Birkhoff*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

ou des *moyennes de Birkhoff*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(f^i(x))$$

pour des observables φ .

18.1 Théorème ergodique de Von Neumann

Commençons par un résultat général sur les isométries d'espaces de Hilbert.

Théorème 18.1 (Von Neumann). Soit U une isométrie d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et p la projection orthogonale sur $\text{fix}(U)$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(v).$$

Les élèves attentifs objecteront que cet énoncé n'a pas vraiment de rapport avec la dynamique sur des espaces compacts, ils ont provisoirement raison.

Commençons par un lemme. On note $C(U) = \text{Im}(U - \text{Id})$ l'ensemble des *cobords* associés à U . Notons que $\text{fix}(U) = \text{Ker}(U - \text{Id})$. Il se trouve que lorsque U est une isométrie, ces deux espaces sont en somme directe orthogonale.

Lemme 18.2. *Si U est une isométrie de $\mathcal{H}$, alors*

$$\text{fix}(U) = C(U)^\perp.$$

Démonstration. Soit $v \in \text{fix}(U)$, et $w \in C(U)$. C'est un résultat classique que lorsque U est une isométrie, alors $\text{fix}(U) = \text{fix}(U^*)$, ce qui implique que $U^*v = v$. Alors

$$\langle v, Uw - w \rangle = \langle U^*v, w \rangle - \langle v, w \rangle = 0$$

On vient de montrer que $\text{fix}(U) \subset C(U)^\perp$.

Soit maintenant $v \in C(U)^\perp$. Alors pour tout $w \in \mathcal{H}$ on a $\langle v, Uw - w \rangle = 0$, autrement dit $0 = \langle U^*v, w \rangle - \langle v, w \rangle = \langle U^*v - v, w \rangle$. Puisque c'est vrai pour tout w on en déduit que $v \in \text{fix}(U^*) = \text{fix}(U)$. On vient de montrer que $\text{fix}(U) \supset C(U)^\perp$. $\square$

Démonstration du théorème 18.1. Puisque $\text{fix}(U)$ est fermé, le lemme 18.2 implique que

$$\mathcal{H} = \text{fix}(U) \oplus \text{fix}(U)^\perp = \text{fix}(U) \oplus (C(U)^\perp)^\perp = \text{fix}(U) \oplus \overline{C(U)}.$$

Or les sommes de Birkhoff se comportent particulièrement bien dans les sous-espaces $\text{fix}(U)$ et $\overline{C(U)}$. En effet, si $v \in \text{fix}(U)$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i v = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v = v.$$

D'autre part, si $w \in C(U)$, alors w s'écrit $w = Uu - u$, si bien que la somme devient télescopique :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i w = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^{i+1} u - U^i u = \frac{1}{n} (U^n u - u),$$

par conséquent

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i w \right\| \leq \frac{1}{n} (\|U^n u\| + \|u\|) = \frac{2}{n} \|u\|.$$

Plus généralement, si $w \in \overline{C(U)}$, alors $w = \lim v_k$ avec $v_k \in C(u)$, si bien qu'à partir d'un certain rang $\|v_k\| \leq \|w\| + 1$; on en déduit que

$$\overline{\lim}_n \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i w \right\| = \overline{\lim}_n \lim_k \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i v_k \right\| \leq \overline{\lim}_n \lim_k \frac{2}{n} \|v_k\| \leq \overline{\lim}_n \frac{2}{n} (\|w\| + 1) = 0.$$

On a tous nos ingrédients : pour $v \in \mathcal{H}$, on décompose $v = p(v) + (v - p(v))$, avec $p(v) \in \text{fix}(U)$ et $w = v - p(v) \in \overline{C(U)}$. Ainsi,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i v = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i p(v) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i w \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(v).$$

□

C'est le moment de faire le lien avec la dynamique.

Définition 18.3. Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré. L'opérateur de Koopman associé est

$$\begin{aligned} U_f : L^2(\mu) &\longrightarrow L^2(\mu) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f. \end{aligned}$$

La condition de préservation de la mesure (de proba) (lemme 14.4) implique que U_f est une isométrie (pas forcément surjective!). Cela implique le résultat suivant de convergence L^2 des moyennes de Birkhoff.

Théorème 18.4 (Von Neumann, version dynamique). Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré. Pour $\varphi \in L^2(\mu)$, on note $\tilde{\varphi}$ la projection orthogonale de φ sur l'ensemble des fonctions f -invariantes. Alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(\mu)} \tilde{\varphi}. \quad (4)$$

Si de plus f est inversible, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^{-i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(\mu)} \tilde{\varphi}.$$

Enfin, si μ est ergodique, alors $\tilde{\varphi} = \int_X \varphi d\mu$.

Démonstration. La première assertion est juste le théorème 18.4 appliqué à l'opérateur de Koopman U_f .

Pour la seconde assertion, il suffit de remarquer que $\text{fix}(U_f) = \text{fix}(U_{f^{-1}})$.

Enfin, $\tilde{\varphi}$ est f -invariante par définition. On en déduit que si μ est ergodique, alors $\tilde{\varphi}$ est constante p.p. La valeur de cette constante se calcule ensuite en intégrant à gauche et à droite dans (4). □

Corollaire 18.5. Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré. Celui-ci est ergodique ssi pour tous $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A \cap f^{-i}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Démonstration. Si μ est ergodique, alors le théorème de Von Neumann appliqué à $\mathbf{1}_B$ implique que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B \circ f^i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(\mu)} \mu(B),$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \mathbf{1}_A, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{1}_B \circ f^i \right\rangle_{L^2(\mu)} = \langle \mathbf{1}_A, \mu(B) \rangle_{L^2(\mu)},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Réciproquement, si μ n'est pas ergodique, alors il existe $B \in \mathcal{B}$ qui est f -invariant et vérifie $\mu(B) \in]0, 1[$. Posons $A = X \setminus B$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $\mu(A \cap f^{-i}(B)) = 0$, alors que $\mu(A)\mu(B) > 0$. $\square$

18.2 Théorème ergodique de Birkhoff

La convergence L^2 c'est bien, mais on peut faire mieux ! Le théorème de Birkhoff donne une convergence presque sûre.

Theorème 18.6 (Birkhoff). Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré. Alors pour $\varphi \in L^1(\mu)$, il existe $\tilde{\varphi} \in L^1(\mu)$ qui est f -invariante et telle que :

(i) pour μ presque tout $x \in X$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tilde{\varphi}(x); \quad (5)$$

(ii) on a également

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^1(\mu)} \tilde{\varphi}$$

et $\|\tilde{\varphi}\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1}$ ainsi que $\int_X \tilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu$;

(iii) si f est inversible, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^{-i}(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tilde{\varphi}(x);$$

(iv) une mesure μ est ergodique ssi pour toute fonction intégrable φ , la fonction $\tilde{\varphi}$ est constante égale à $\int_X \varphi d\mu$.

Notez que la conclusion du théorème correspond au fait que μ -presque tout point satisfait la loi des grands nombres.

Exemple 18.7. Appliquons ce théorème à la multiplication par d modulo 1 et à Lebesgue (voir l'exemple 16.5). Soit $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ et choisissons $\varphi = \mathbf{1}_{[k/d, (k+1)/d[}$. Remarquons que $\varphi(E_d^n(x)) = 1$ ssi le $n+1$ -ième chiffre de x en écriture en base d est k . Ainsi, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(E_d^i(x))$ est la proportion de chiffres k parmi les n premières décimales de x en base d . Par le théorème de Birkhoff, pour un x typique cette proportion tend vers $\int \varphi d\text{Leb} = 1/d$. Ainsi, presque tout nombre a ses décimales équiréparties (dans toutes les bases d).

Démonstration. Posons

$$S_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i,$$

et commençons par montrer que ces fonctions convergent p.p. À cette fin on pose

$$\overline{\varphi} = \overline{\lim}_n S_n(\varphi) \quad \text{et} \quad \underline{\varphi} = \underline{\lim}_n S_n(\varphi)$$

(à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), on veut donc montrer que $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$ p.p. On pose également

$$E_{\alpha, \beta} = \{x \in X \mid \underline{\varphi}(x) < \alpha < \beta < \overline{\varphi}(x)\}.$$

On veut montrer que les ensembles $E_{\alpha, \beta}$ sont tous de mesure nulle, ce qui impliquera que $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$ p.p. Pour cela, l'étape cruciale de notre preuve est le *lemme ergodique maximal*.

Lemme 18.8. *Posant*

$$\widehat{\varphi} = \sup_{n \geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i,$$

on a

$$\int_{\widehat{\varphi} > 0} \varphi d\mu \geq 0.$$

Démonstration. Posons

$$\varphi_m = \max\left(0, \sup_{1 \leq n \leq m} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_m > 0} \varphi d\mu &= \int_{\varphi_m > 0} \varphi_m - \varphi_{m-1} \circ T d\mu \\ &\geq \int_X \varphi_m - \varphi_{m-1} \circ T d\mu \\ &= \int_X \varphi_m - \varphi_{m-1} d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{\varphi}$ est la limite croissante des φ_m , on en déduit le lemme. $\square$

Remarquons que les ensembles $E_{\alpha,\beta}$ sont f -invariants, puisque les fonctions $\overline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}$ sont elles-mêmes f -invariantes.

Appliquons le lemme 18.8 à $f|_{E_{\alpha,\beta}}$ et $\varphi - \beta$. Notons que sur $E_{\alpha,\beta}$ on a $\overline{\varphi} > \beta$ si bien que $\widehat{\varphi} > \beta$, donc que $\widehat{\varphi - \beta} > 0$. Ainsi, la conclusion du lemme se traduit dans ce cas par $\int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi - \beta \, d\mu \geq 0$. De même, en appliquant le lemme à $\alpha - \varphi$, on obtient $\int_{E_{\alpha,\beta}} \alpha - \varphi \, d\mu \geq 0$. En d'autres termes,

$$\alpha \mu(E_{\alpha,\beta}) \leq \int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi \, d\mu \leq \beta \mu(E_{\alpha,\beta}),$$

ce qui est impossible dès que $\mu(E_{\alpha,\beta}) > 0$. Ainsi $\overline{\varphi} = \underline{\varphi}$ p.p., ce qui implique le point (i) du théorème.

Montrons le point (ii). Commençons par montrer l'inégalité $\|\tilde{\phi}\|_{L^1} \leq \|\phi\|_{L^1}$. Remarquons que $\|S_n(\varphi)\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1}$, si bien que par Fatou

$$\|\tilde{\varphi}\|_{L^1} = \int_X \liminf_n |S_n(\varphi)| \, d\mu \leq \liminf_n \int_X |S_n(\varphi)| \, d\mu = \|\phi\|_{L^1}.$$

Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |S_n \varphi - \tilde{\varphi}| \, d\mu = 0$. Si φ est bornée c'est une conséquence de la convergence dominée. Dans le cas contraire, on décompose φ en $\varphi = \varphi_b + \varphi_r$ avec φ_b bornée et le reste φ_r qui est petit : $\|\varphi_r\|_{L^1} \leq \varepsilon$. Alors, par le paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_n \|\varphi - S_n \varphi\|_{L^1} &\leq \overline{\lim}_n \|\varphi_b - S_n \varphi_b\|_{L^1} + \overline{\lim}_n \|\varphi_r - S_n \varphi_r\|_{L^1} \\ &\leq 0 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

L'arbitraire sur ε implique la convergence L^1 . L'égalité des intégrales de φ et $\tilde{\varphi}$ découle de cette convergence.

Montrons maintenant le point (iii). On peut appliquer le point (i) à f^{-1} pour obtenir une fonction limite $\tilde{\varphi}'$, on veut montrer que $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$ p.p. Par symétrie des rôles, il suffit de montrer que $\tilde{\varphi} \leq \tilde{\varphi}'$ p.p. Pour cela, on reprend la preuve du point (i) et on pose $F_{\alpha,\beta} = \{\tilde{\varphi}' < \alpha < \beta < \tilde{\varphi}\}$. Les mêmes arguments qu'au point (i) amènent alors à $\tilde{\varphi} \leq \tilde{\varphi}'$ p.p.

Enfin, le point (iv) est direct. En effet, d'une part si μ est ergodique, puisque $\tilde{\varphi}$ est f -invariante et μ ergodique, $\tilde{\varphi}$ est constante p.p. et on conclut par la dernière égalité de (ii). D'autre part, si μ n'est pas ergodique, alors il existe un mesurable A f -invariant de mesure non triviale, ce qui implique que la fonction $\widetilde{\mathbf{1}_A} = \mathbf{1}_A$ n'est pas constante p.p. $\square$

Théorème sous-additif de Kingman et Oseledets en TD ?

19 Mélange

Définition 19.1. Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré.

— On dit qu'il est *faiblement mélangeant* si pour tous $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} |\mu(A \cap f^{-i}(B)) - \mu(A)\mu(B)| = 0;$$

— on dit qu'il est *mélangeant* si pour tous $A, B \in \mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A \cap f^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

Le corollaire 18.5 ainsi que le lemme de Cesàro impliquent la propriété suivante :

Proposition 19.2. *Si un système est mélangeant, alors il est faiblement mélangeant. Si un système est fortement mélangeant, alors il est ergodique. De plus, si un système dynamique topologique est muni d'une mesure invariante et mélangeante de support total, alors il est topologiquement mélangeant.*

Exemple 19.3. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de proba. Alors le décalage σ sur $(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ – ou sur $(X^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$ – est mélangeant.

Démonstration. On fait la preuve pour $X^{\mathbb{N}}$, la preuve pour $X^{\mathbb{Z}}$ est identique.

Soient $A, B \in \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}$. Un résultat « classique » assure que A et B sont approchés par ensembles du type $A' = A_0 \times X^{\mathbb{N}}$ et $B' = B_0 \times X^{\mathbb{N}}$, avec $A_0, B_0 \in \mathcal{B}^{\otimes m}$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe A', B' de tels ensembles que $\mu^{\otimes \mathbb{N}}(A \triangle A') < \varepsilon$ et $\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B \triangle B') < \varepsilon$ (utiliser l'astuce classique consistant à montrer que les A vérifiant la conclusion forment une tribu). Remarquons que $\sigma^{-i}B' = X^i \times B_0 \times X^{\mathbb{N}}$, si bien que si $i > m$, alors

$$A' \cap \sigma^{-i}(B') = A_0 \times X^{i-m} \times B_0 \times X^{\mathbb{N}}.$$

Par conséquent,

$$\mu^{\otimes \mathbb{N}}(A' \cap \sigma^{-i}(B')) = \mu^{\otimes m}(A_0)\mu^{\otimes m}(B_0) = \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A')\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B'),$$

et donc, toujours si $i > m$,

$$\begin{aligned} & \left| \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A \cap \sigma^{-i}(B)) - \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A)\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B) \right| \\ & \leq \left| \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A \cap \sigma^{-i}(B)) - \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A' \cap \sigma^{-i}(B')) \right| \\ & \quad + \left| \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A' \cap \sigma^{-i}(B')) - \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A')\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B') \right| \\ & \quad + \left| \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A')\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B') - \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A)\mu^{\otimes \mathbb{N}}(B) \right| \\ & \leq \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A \triangle A') + \mu^{\otimes \mathbb{N}}(B \triangle B') + 0 + \mu^{\otimes \mathbb{N}}(A \triangle A') + \mu^{\otimes \mathbb{N}}(B \triangle B') \\ & \leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Corollaire 19.4 (Loi forte des grands nombres). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de V.A.R. i.i.d. Alors on a p.s.*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_1).$$

Démonstration. On pose μ la mesure de proba sur $\mathbb{R}$ définie par $\mu(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A)$, et on considère l'espace $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure produit $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$ et du décalage σ . Le système dynamique mesuré (X, μ, σ) est ergodique (par l'exemple 19.3 et la proposition 19.2); on lui applique le théorème de Birkhoff (théorème 18.6), avec pour observable $\varphi((\omega_i)_{i \geq 0}) = \omega_0$: pour $\mu^{\otimes \mathbb{N}}$ -presque tout $(\omega_i)_{i \geq 0}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \omega \, d\mu(\omega),$$

ce qui n'est rien d'autre qu'une autre formulation de la conclusion du théorème. $\square$

Proposition 19.5. *Soit $(X, \mathcal{B}, f, \mu)$ un système dynamique mesuré.*

— *Il est faiblement mélangeant ssi pour toutes $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_X \varphi \cdot (\psi \circ f^i) \, d\mu - \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) \left(\int_X \psi \, d\mu \right) \right| = 0;$$

— *il est mélangeant ssi pour toutes $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi \cdot (\psi \circ f^n) \, d\mu = \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) \left(\int_X \psi \, d\mu \right).$$

Démonstration. On démontre le second point, la preuve du premier est similaire.

Tout d'abord, la propriété sur les fonctions L^2 implique le mélange puisque toute indicatrice de mesurable est elle-même dans L^2 .

Ensuite, supposons le système mélangeant. Fixons un mesurable $A \in \mathcal{B}$ et considérons l'ensemble des $\psi \in L^2(\mu)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \mathbf{1}_A \cdot (\psi \circ f^n) \, d\mu = \mu(A) \left(\int_X \psi \, d\mu \right).$$

Cet ensemble contient les indicatrices et est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mu)$; par densité il coïncide avec $L^2(\mu)$. Fixons $\psi \in L^2(\mu)$ et considérons l'ensemble des $\varphi \in L^2(\mu)$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X \varphi \cdot (\psi \circ f^n) \, d\mu = \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) \left(\int_X \psi \, d\mu \right).$$

Lui aussi est un sous-espace vectoriel fermé qui contient les indicatrices et vaut donc $L^2(\mu)$ tout entier. $\square$

Critère de mélange faible comme produit ergodique en TD ?

Theorème 19.6 (Katok, Avila-Forni). *Les IET typiques sont faiblement mélangeants mais pas mélangeants.*

Proposition 19.7. *Les automorphismes linéaires non réductibles du tore sont mélangeants pour la mesure de Lebesgue.*

Preuve avec Fourier en TD ?

Démonstration. On utilise dans cette preuve l'argument dit de *Hopf*, qui sert dans beaucoup d'autres contextes hyperboliques.

On suppose donc que $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec $|\text{tr}(A)| \geq 2$. On note $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ les valeurs propres de A , et v_1, v_2 des vecteurs propres associés. Un calcul simple permet de montrer que les pentes de v_1 et v_2 sont irrationnelles.

On veut montrer que pour tous A, B mesurables on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Leb}(A \cap f_A^{-n}(B)) = \text{Leb}(A)\text{Leb}(B).$$

Remarquons qu'il suffit de montrer cette égalité pour des ensembles A, B dans une partie engendrant la tribu des mesurables. On va donc montrer cette limite pour les rectangles dont les côtés sont parallèles à v_1 et v_2 (et qui sont de diamètre $\leq 1/10$).

On relève B à un ensemble $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $n \geq 0$, l'ensemble $A^{-n}(\tilde{B})$ est lui aussi un rectangle dont les côtés sont parallèles à v_1 et v_2 , avec la propriété supplémentaire que la longueur de sa projection sur v_1 (et donc sur l'axe horizontal) tend vers l'infini. Considérons le cercle vertical C du tore qui est la projection de l'axe des ordonnées. Quitte à translater C horizontalement on peut supposer qu'il ne croise pas A . Quitte à enlever une petite portion de $f_A^{-n}(B)$, on peut remplacer ce dernier par un ensemble B' qui est fait d'un nombre fini de parallélogrammes dont deux des côtés H_i et H'_i sont des bouts de C , les deux autres sont parallèles à v_1 , et ne croisent pas C ; on peut également supposer que l'intérieur de ces parallélogrammes ne contiennent pas de côté de A parallèle à v_1 . On note J l'image du premier retour de A sur C dans le passé. On note $\alpha > 0$ la proportion d'un segment parallèle à v_1 reliant C à C et contenant un bord de A qui est couverte par le bord de A .

On voit alors que

$$\text{Leb}(B' \cap A) = \alpha \text{Leb}_C \left(\bigcup_i H_i \cap J \right).$$

Mais la mesure de Lebesgue ci-dessus tend vers le produit $\text{Leb}_C(\bigcup_i H_i) \text{Leb}_C(J)$ quand n est assez grand, par unique ergodicité de la rotation d'angle θ sur le cercle, où θ est la pente de v_1 . Cela démontre le caractère mélangeant. $\square$

20 Décomposition ergodique

On suppose ici que X est un espace topologique localement compact et séparable. Commençons par une remarque sur le théorème ergodique de Birkhoff. À x fixé, l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}(x)$ est linéaire. Par le théorème de représentation de Riesz, en utilisant le fait que l'espace des observables φ est séparable, pour μ -presque tout $x \in X$ il existe une mesure borélienne μ_x telle que

$$\int_X \varphi d\mu_x = \tilde{\varphi}(x), \quad (6)$$

autrement dit

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_{f^i(x)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_x.$$

On vérifie sans peine que cette mesure μ_x est invariante et de probabilité.

Proposition 20.1. *Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré. Alors pour μ -presque tout $x \in X$ la mesure μ_x est ergodique.*

Démonstration. On utilise le (iv) du théorème 18.6 : on veut montrer que pour toute observable φ et μ -presque tout $x \in X$, la fonction $\tilde{\varphi}$ est constante μ_x -p.p., autrement dit que l'égalité $\tilde{\varphi}(y) \stackrel{(iv)}{=} \int_X \varphi d\mu_x \stackrel{\text{def.}}{=} \tilde{\varphi}(x)$ est vraie pour μ_x -presque tout $y \in X$. Cela équivaut au fait que $\int_X (\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x))^2 d\mu_x(y) = 0$ (toujours pour μ -presque tout x). Mais

$$\begin{aligned} \int_X (\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x))^2 d\mu_x(y) &= \lim_n \int_X (S_n \varphi(y) - S_n \varphi(x))^2 d\mu_x(y) \\ &= \lim_{n,k} S_k((S_n \varphi - S_n \varphi(x))^2)(x) \\ &= \lim_{n,k} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (S_n \varphi(f^i(x)) - S_n \varphi(x))^2, \end{aligned}$$

si bien que (en utilisant l'invariance de μ)

$$\begin{aligned} &\int_X \left(\int_X (\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x))^2 d\mu_x(y) \right) d\mu(x) \\ &= \lim_n \lim_k \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \|S_n \varphi \circ f^i - S_n \varphi\|_2^2 \\ &= \lim_n \lim_k \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \|S_n \varphi \circ f^i - S_n \varphi\|_2^2 \\ &= \lim_n \lim_k 2\|S_n \varphi\|_2^2 - 2 \left\langle \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} S_n \varphi \circ f^i, S_n \varphi \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_n \lim_k 2\|S_n \varphi\|_2^2 - 2 \langle S_k(S_n \varphi), S_n \varphi \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Mais par le théorème ergodique de Von Neumann, puis par f -invariance de $\tilde{\varphi}$ (on a pensé à vérifier que les deux fonctions limites des théorèmes de Birkhoff et Von Neumann coïncident p.p.), on a

$$\lim_k S_k(S_n \varphi) = \widetilde{S_n \varphi} = \tilde{\varphi},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_X \left(\int_X (\tilde{\varphi}(y) - \tilde{\varphi}(x))^2 d\mu_x(y) \right) d\mu(x) \\ = \lim_n 2 \|S_n \varphi\|_2^2 - 2 \langle \tilde{\varphi}, S_n \varphi \rangle_{L^2} \\ = 2 \|\tilde{\varphi}\|_2^2 - 2 \|\tilde{\varphi}\|_2^2 = 0. \end{aligned}$$

□

En intégrant à gauche et à droite dans (6) et en utilisant le (ii) du théorème 18.6, on obtient

$$\int_X \left(\int_X \varphi d\mu_x \right) d\mu(x) = \int_X \tilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d\mu,$$

Ou si on préfère les ensembles mesurables :

$$\mu(A) = \int_X \mu_x(A) d\mu(x), \quad (7)$$

ou en abusant de notation

$$\mu = \int_X \mu_x d\mu(x).$$

Ainsi, on vient d'écrire la mesure μ comme une combinaison convexe des mesures μ_x qui sont (presque) toutes ergodiques par la proposition 20.1. Posons

$$\begin{aligned} \Phi : X &\longrightarrow \mathcal{M}_f^{\text{erg}}(X) \\ x &\longmapsto \mu_x, \end{aligned}$$

qui est définie presque partout. Cela permet de poser ν_μ une mesure sur $\mathcal{M}_f^{\text{erg}}(X)$ par $\lambda_\mu = \Phi_*(\mu)$. Comme conséquence de (7), on en déduit le résultat suivant.

Théorème 20.2 (Décomposition ergodique). *Soit (X, f, μ) un système dynamique mesuré. Alors il existe une mesure λ_μ sur $\mathcal{M}_f^{\text{erg}}(X)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a*

$$\mu(A) = \int_{\mathcal{M}_f^{\text{erg}}(X)} \nu(A) d\lambda_\mu(\nu).$$

21 Application de Gauss

Reprenons la discussion sur l'application de Gauss $G(x) = 1/x \pmod{1}$ initiée à la section 6.

Proposition 21.1. *La mesure de densité $1/(\ln(2)(1+x))$ est invariante et mélangeante pour l'application de Gauss.*

Pour montrer l'invariance on commence par un lemme général.

Lemme 21.2. *Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application, $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable, et une collection (I_k) d'intervalles tels que :*

1. *l'union disjointe $\sqcup_k I_k$ est de mesure de Lebesgue totale ;*
2. *la restriction f_k de f à chaque I_k est une bijection sur $]0, 1[$ qui est dérivable ;*
3. *pour presque tout $x \in [0, 1]$ on a*

$$\rho(x) = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \frac{\rho(y)}{|f'(y)|}.$$

Alors la mesure $\mu = \rho dx$ est f -invariante.

Démonstration. Soit $\varphi \in L^1(\mu)$. Pour tout k , un changement de variables donne

$$\int_{I_k} \varphi(f(y))\rho(y) dy = \int_0^1 \varphi(x)\rho(f_k^{-1}(x))|(f_k^{-1})'(x)| dx,$$

et donc

$$\int_0^1 \varphi(f(y))\rho(y) dy = \sum_k \int_0^1 \varphi(x) \frac{\rho(f_k^{-1}(x))}{|f'_k(f_k^{-1}(x))|} dx;$$

par théorème de convergence monotone, en utilisant l'hypothèse du théorème,

$$\int_0^1 \varphi(f(y))\rho(y) dy = \int_0^1 \varphi(x) \sum_k \frac{\rho(f_k^{-1}(x))}{|f'_k(f_k^{-1}(x))|} dx = \int_0^1 \varphi(x)\rho(x) dx.$$

□

Cela permet de démontrer l'invariance de la mesure de Gauss pour G (exercice!).

Application aux asymptotiques des développements en fraction continue.
Certains résultats en TD ?

Quatrième partie

L'entropie

22 Entropie topologique

23 Entropie mesurée

24 Principe variationnel

Cinquième partie

Dynamique en dimension 1

25 Nombre de rotation

Classification de Poincaré. Denjoy ?

26 Échanges d'intervalles

Renormalisation de Rauzy-Veech et théorème de Keane.

27 Groupes d'homéomorphismes du cercle

Alternative de Tits par Margulis.

Références

- [ALM00] Lluís Alsedà, Jaume Llibre, and Michał Misiurewicz, *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one.*, 2nd ed. ed., Adv. Ser. Nonlinear Dyn., vol. 5, Singapore : World Scientific, 2000 (English).
- [For26] Giovanni Forni, *Existence of a periodic orbit for billiards in polygons*, 2026.
- [Hos06] Bernard Host, *Arithmetic progressions in prime numbers (after B. Green and T. Tao)*, Séminaire Bourbaki. Volume 2004/2005. Exposés 938–951, Paris : Société Mathématique de France, 2006, pp. 229–246, ex (French).
- [Hou26] Cyril Houdayer, *Dynamical systems*, École normale supérieure, 2023-2026.

- [KH97] Anatole Katok and Boris Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza*, Encycl. Math. Appl., vol. 54, Cambridge : Cambridge University Press, 1997 (English).
- [VO16] Marcelo Viana and Krerley Oliveira, *Foundations of ergodic theory*, Camb. Stud. Adv. Math., vol. 151, Cambridge : Cambridge University Press, 2016 (English).