Séance du 05/10/2013 du club de maths d'Orsay (à Paris) — Racines des polynômes, théorie et pratique

Le but de cette séance est d'avoir un aperçu de la théorie de la factorisation des polynômes. Ces objets jouent un rôle très important dans l'ensemble des mathématiques...

1 Définition et factorisation

Avant d'aborder le problème de factorisation des polynômes dans sa généralité, commençons par nous intéresser à quelques cas particuliers :

Exercice 1 (Un peu de factorisation, tome 1)
Factoriser les expressions suivantes :

1. $a^2 - b^2$ et $a^2 + 2ab + b^2$,
2. $x^3 - x$.

Exercice 2 (Un peu de factorisation, tome 2)
Montrer les égalités suivantes :

1. $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$, plus généralement
   $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$,
2. si n est impair, $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Exercice 3 (Identité de Lagrange)
Mais sans doute connue d'Euclide. (Perrin)

1. Factoriser $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.
2. En déduire que l'ensemble des sommes de deux carrés d'entiers est stable par multiplication.

Après ce petit échauffement, on peut en venir au sujet qui va nous intéresser aujourd'hui : les racines des polynômes.

Définition 1. Un *polynôme* est une fonction s'obtenant comme une *combinaison linéaire* de fonctions puissances ; autrement dit une fonction P est un polynôme s'il existe un entier n et des coefficients $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ tels qu'on ait

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Un polynôme peut être à coefficients entiers ($a_i \in \mathbf{Z}$ pour tout i), rationnels ($a_i \in \mathbf{Q}$), réels ($a_i \in \mathbf{R}$), complexes ($a_i \in \mathbf{C}$)... Dans ce cas on note respectivement $P \in \mathbf{Z}[X]$, $P \in \mathbf{Q}[X]$, $P \in \mathbf{R}[X]$, $P \in \mathbf{C}[X]$...

Une *racine* d'un polynôme est un nombre x tel que $P(x) = 0$.

2 Division euclidienne

Le but de cette partie est de voir le lien entre les problèmes de recherche de racines et de factorisation des polynômes (exercice 6).

Définition 2. Le *degré* d'un polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est le plus grand entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $a_k \neq 0$. Si $P = 0$, par convention, son degré est $-\infty$.

Exercice 4 (Le retour au primaire, version polynômes)
Voici quelques exemples de divisions euclidiennes des polynômes :

1. montrer que $x^3+3x^2+5x+1 = (x^2+2x+3)(x+1)-2$,
2. trouver un polynôme Q et un nombre a tels que $x^2 + x - 1 = (x-2)Q(x) + a$ (on pourra s'inspirer de l'exemple !),
3. trouver un polynôme Q et un polynôme R de degré inférieur à 1 tels que $x^3-x^2+1 = (x^2-1)Q(x)+R(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} & x^2 & -x & +1 & x+1 \\ \cline{5-5} - & x^2 & +x & & x-2 \\ \cline{2-4} & & -2x & +1 & \\ & - & -2x & -2 & \\ \cline{3-4} & & & 3 & \end{array}$$

Exemple de division euclidienne

Définition 3. On dit qu'un polynôme Q *divise* un polynôme P s'il existe un polynôme R tel que $P = QR$.

Exercice 5 (Division euclidienne : la théorie, *nécessite de savoir faire une récurrence !*)
Soient A et B deux polynômes, avec $B \neq 0$. Montrer par récurrence sur le degré de A qu'il existe deux polynômes Q et R tels que

$$A = BQ + R$$

et que le degré de R soit strictement inférieur à celui de B.

Cette opération est appelée la *division euclidienne* de A par B ; Q est appelé le *quotient* et R le *reste* de la division euclidienne.

Exercice 6
À l'aide de l'exercice précédent, montrer que $P(a) = 0$ — autrement dit que a est une racine de P — si et seulement si le polynôme $(x-a)$ divise le polynôme P.

Moment culturel

On verra à l'exercice 9 qu'il existe des polynômes de degré 2 qui n'ont aucune racine réelle. De tels polynômes n'ont donc aucun diviseur différent d'eux-mêmes ou de 1 (à une constante multiplicative près) ; ils sont dits *irréductibles*. Une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss (tout début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle) est que les seuls polynômes réels irréductibles sont de degré 1 ou 2.

Exercice 7 (Où on trouve des racines pour factoriser)
Factoriser le polynôme suivant : $x^3 - x^2 - x + 1$.

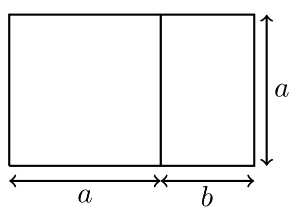
Exercice 8 (Encore de la division euclidienne)
Déterminer les paramètres a et b tels que le polynôme $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 2$ soit divisible par $x^2 + 2$. Quelle factorisation obtient-on alors ?

3 Factorisation des polynômes de petits degrés

Exercice 9 (Équation du second degré)
On considère trois réels a, b et c avec $a \neq 0$; on cherche à résoudre l'*équation du second degré*

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{$*$}$$

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 = a^2$?
2. Forme canonique : montrer que
$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$
3. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on suppose que $\Delta = 0$. Factoriser l'expression ($*$).
4. On suppose maintenant que $\Delta \geq 0$. Factoriser l'expression ($*$).
5. Enfin, on suppose que $\Delta < 0$. Montrer que l'équation ($*$) n'admet aucune solution réelle.
6. Application 1 : un imprimeur veut créer un modèle de feuille de papier rectangulaire telle que :
   – si on met côte à côte 20 de ces feuilles, on obtient une surface d'un mètre carré,
   – la longueur de la feuille vaut 5cm de plus que sa largeur.
   Quelles sont les dimensions de ces feuilles ?
7. Application 2 : encore une histoire de papier... On a une feuille de papier rectangulaire dont les longueurs des côtés sont notées respectivement a et b, avec $a > b$. On suppose que la feuille vérifie la propriété suivante : si on lui colle sur un côté de longueur a une feuille carrée, la feuille obtenue a les mêmes proportions que la feuille initiale. Que vaut le rapport $\frac{a}{b}$?



Moment culturel

On voit que si $\Delta < 0$, alors l'équation $(*)$ n'admet aucune solution réelle. On peut en fait contourner cette difficulté en définissant un nombre *imaginaire* i, tel que $i^2 = -1$. Lorsqu'on ajoute ce nombre à l'ensemble des nombres réels, autrement dit lorsqu'on considère les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels, tous les polynômes de degré 2 deviennent factorisables en un produit de deux polynômes de degrés 1.

Exercice 10 (Une utilisation de l'exercice précédent)
Quel est le reste de la division euclidienne de $(x+1)^n - x^n - 1$ par $x^2 - 3x + 2$?

Exercice 11 (Méthode de Cardan, cas facile)
La méthode de Cardan permet de calculer les racines des polynômes de degré 3. Soit donc trois réels a, b, c et d, avec $a \neq 0$; on cherche à résoudre l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

1. Montrer qu'il est possible de se ramener au cas $a = 0$.
2. En posant $y = x - x_0$, avec x_0 bien choisi, montrer qu'il est alors possible de se ramener au cas où $b = 0$. *Il suffit alors de résoudre les équations du type*

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (**)$$

pour deux paramètres réels p et q.
3. Posons $x = u + v$. Que devient l'équation $(**)$?
4. On impose la condition supplémentaire $3uv + p = 0$. Montrer que u et v sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= \frac{-p^3}{27} \end{cases}$$

5. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0.$$

6. Posons $\Delta = 4p^2 + 27q^2$. On suppose que $\Delta > 0$; trouver une racine réelle de $(**)$ qu'on exprimera en fonction de p et q.
7. Mise en pratique :
   - trouver une racine réelle de $x^3 - 6x + 9$,
   - trouver une racine réelle de $x^3 - 2x - 5$,
   - trouver une racine réelle de $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3$.

Remarque 4. En fait, on peut toujours trouver toutes les racines réelles de tout polynôme de degré 3 à l'aide de cette méthode, lorsqu'on utilise le nombre imaginaire i au cours des calculs.

Moment culturel

Le problème de la résolution des équations polynomiales est une longue histoire, qui débute vers 2000 avant J.C. chez les babyloniens. Après être passé entre les mains de mathématiciens grecs, indiens, arabes et européens, il aboutit à l'invention des nombres complexes au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, lorsque les mathématiciens trouvent des algorithmes permettant de factoriser tous les polynômes de degrés inférieurs à 4 : le troisième degré est résolu par Tartaglia et Jérôme Cardan (la pérennité de la résolution est sujette à controverses...), et le quatrième degré quelques années plus tard par Lodovico Ferrari. Il faut attendre le XIX$^{\text{ème}}$ siècle et les travaux de Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel et Évariste Galois pour avoir une preuve de l'inexistence d'un tel algorithme général (c'est-à-dire procédant par additions, soustractions, multiplications, divisions et extractions de racines n-ièmes) pour les équations polynomiales de degrés supérieurs ou égaux à 5.

4 Approximation numérique des racines : où les trouver, comment les approcher, guide initiatique

On vient de voir qu'il est impossible d'exprimer de manière algébrique toutes les racines de certains polynômes de degrés supérieurs à 5. Pour pallier ce problème, on recourt souvent à leur calcul approché. Les applications sont nombreuses : cela peut par exemple servir à résoudre des systèmes linéaires, qui eux-mêmes interviennent dans la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles...

Pour l'exercice suivant on pourra admettre le théorème suivant, « géométriquement évident » :

Théorème 5 (des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue, ainsi que $a < b$ deux réels tels que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$ (voir la figure 1).*

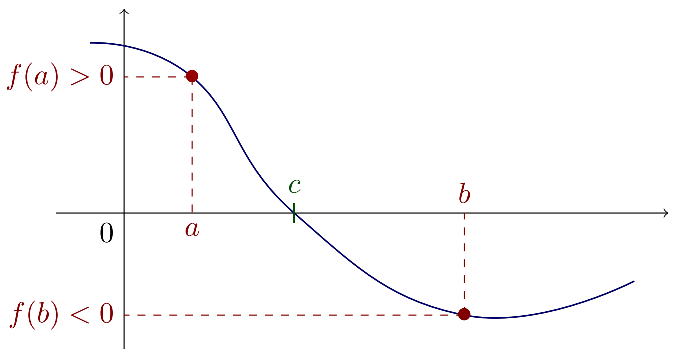


FIGURE 1 – Théorème des valeurs intermédiaires : si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$, alors il existe un nombre c entre a et b tel que $f(c) = 0$. En langage courant, si on veut passer d'un côté de l'axe des abscisses à l'autre sans lever le crayon, on est obligé de le croiser à un moment ou à un autre.

Exercice 12 (Méthode de la dichotomie)
Soit P un polynôme réel, et $a < b$ deux réels tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$. On définit

les deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et : si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$; sinon, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

1. Faire un dessin de tout ce bazar.
2. Montrer que $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$ (autrement dit la précision de l'encadrement de la racine double à chaque pas).
3. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune c qui vérifie $P(c) = 0$.

Néanmoins, il y a plus rapide que la dichotomie, comme la méthode de Newton, illustrée ici sur le calcul de racine carrée : calculer la racine carrée de a, c'est trouver la racine positive du polynôme $x^2 - a$.

Exercice 13 (Méthode de Newton pour la racine carrée)
Soit $a > 0$; on définit la suite x_n par récurrence : on choisit $x_0 > 0$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

1. Montrer que $x_1 > \sqrt{a}$.
2. En déduire que pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{a} \leq x_{n+1} \leq x_n$.
3. Montrer que la suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$ (nécessite quelques connaissances en analyse).
4. Posons $v_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$. Montrer que $v_{n+1} = v_n^2$. En déduire que $v_n = (v_0)^{2^n}$.
5. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n_0} < 3\sqrt{a}$. Montrer que pour $n \geq n_0$, on a
$$0 < x_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\frac{x_{n_0} - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-n_0}},$$
et que par conséquent on a une convergence *quadratique* de x_n vers $\sqrt{a}$, en particulier bien plus rapide qu'avec le méthode de la dichotomie.

Bien souvent, les algorithmes utilisés pour trouver une valeur approchée des racines d'un polynôme, tels que ceux décrits par les deux exercices précédents, ont besoin de débuter avec une valeur qui n'est « pas trop loin » d'une racine ; on doit donc savoir a priori où se trouvent à peu près ces racines. Pour cela, il existe un grand nombre de propriétés de localisation des racines ; l'exercice (assez difficile) suivant en donne un des exemples les plus simples.

Exercice 14 (Théorème d'Eneström-Kakeya)
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ des nombres strictement positifs et P le polynôme défini par $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

1. Montrer que si $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$, alors toutes les racines de P sont de valeur absolue supérieure ou égale à 1.
2. Dans le cas général, montrer que si x est une racine de P, alors on a l'inégalité
$$\min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |x| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$