Séance du 09/02/2013 du club de maths d'Orsay – Relations d'équivalence

Le but de cette séance est de bien compredre ce qu'est une relation d'équivalence et d'avoir un aperçu des nombreuses applications de cette notion.

1 Échauffement

On commence par une définition de théorie des ensembles.

Définition 1. Soient E et F deux ensembles. L'*ensemble produit cartésien* de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples de points (e, f), où $e \in E$ et $f \in F$. On note $E^2 = E \times E$, $E^3 = E \times E \times E$ etc.

La définition suivante explique ce qu'est une relation entre des objets : par exemple, quel est l'objet mathématique qui est associé à la relation entre l'ensemble des français et l'ensemble des allemands définie par "le français f connaît l'allemand a". La bonne notion est en fait celle de sous ensemble d'un produit cartésien.

Définition 2. Soient E et F deux ensembles. Une *relation binaire* R entre E et F est un sous-ensemble de $E \times F$. On dit que $e \in E$ et $f \in F$ sont en *relation*, et on note (abusivement) eRf, si $(e, f) \in R$.

Pour l'exemple précédent, le français f connaitra l'allemand a si et seulement si le couple (f, a) appartient à R. Les autres couples (f, a) correspondent à des couples français-allemand qui ne se connaissent pas.

Exercice 1
Parmi ces objets, dire lesquels sont des relations binaires :
- La relation "$=$" sur $\mathbf{R}$.
- La relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbf{R}$.
- La relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$ (définie par xRy si x divise y).
- Le graphe d'une fonction f.
- L'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$.
- L'ensemble $\mathbf{Q}$.

Définition 3. Soit E un ensemble et R une relation binaire entre E et E. On dit que R est une *relation d'équivalence* sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in E$, xRx (réflexité).
2. Pour tout $(x, y) \in E^2$, si xRy, alors yRx (symétrie).
3. Pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si xRy et yRz, alors xRz (transitivité).

Exercice 2
Parmi ces relations binaires, dire lesquelles sont des relations d'équivalence :
- La relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbf{R}$.
- La relation "$=$" sur $\mathbf{R}$.
- La relation "$<$" sur $\{0, 1\}$.

- La relation de divisibilité sur $\mathbf{N}$.
- Le graphe d'une fonction f.
- La relation définie sur $\mathbf{N}^2$ par $(n_1, n_2)R(m_1, m_2)$ si $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$.
- La relation définie sur $\mathbf{R}$ par xRy si $|x - y| \leq 1$.
- La relation définie sur $\mathbf{C}$ par xRy si $|x| = |y|$.
- Les relations définies sur l'ensemble des droites du plan définie par "être parallèle à" et "être perpendiculaire à ".
- La relation définie sur l'ensemble des chaussettes par "les deux chaussettes appartiennent à la même paire".

2 Classes d'équivalence et ensemble quotient

Définition 4. Soit R une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence* de x le sous-ensemble $C(x)$ de E des éléments en relation avec x :

$$C(x) = \{y \in E \mid yRx\}.$$

L'application qui à $x \in E$ associe $C(x)$ est appelée *surjection canonique.*

Exercice 3
Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que soit $C(x) = C(y)$, soit $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

Exercice 4
Pour les relations de l'exercice 2 qui sont des relations d'équivalence, donner les classes d'équivalence.

Exercice 5
Soit E un ensemble de cardinal n et R une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence. Soit m le cardinal du graphe de R (i.e. du sous-ensemble de E^2 associé à la relation binaire R).

1. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de réels positifs. Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \leq k \sum_{i=1}^{k} a_i^2.$$

   On pourra s'intéresser au signe du trinôme $P(t) = \sum_{i=1}^{k}(a_i + t)^2$.
2. Montrer que $n^2 \leq km$.

Définition 5. Soit R une relation d'équivalence sur E. On appelle *ensemble quotient* de E sur R, noté E/R, l'ensemble des classes d'équivalences de la relation R sur E.

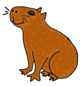
Exercice 6
Montrer que si $E \neq \emptyset$, l'ensemble quotient E/R forme une *partition* de E, i.e. que :

(i) $\emptyset \notin E/R$,
(ii) $\forall C, C' \in E/R$, soit $C = C'$, soit $C \cap C' = \emptyset$,
(iii) $\bigcup_{C \in E/R} C = E$.

En particulier, si E est un ensemble fini, alors $\mathrm{Card}(E) = \sum_{C \in E/R} \mathrm{Card}(C)$.

Exercice 7 (Un peu de topologie...)
On définit la relation R sur $\mathbf{R}$ par xRy si $x - y \in \mathbf{Z}$; on note alors l'ensemble quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (voir la partie sur les groupes pour une justification de cette notation). Montrer qu'il existe une bijection f de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans le cercle unité $\mathcal{U}$ telle que :

– f est continue : pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note $\overline{x}$ la classe de x dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$; si x et y sont deux points de $\mathbf{R}$ qui sont proches, alors $f(\overline{x})$ et $f(\overline{y})$ sont proches.
– f est d'inverse continue : si z et z' sont deux points de $\mathcal{U}$ qui sont proches, alors il existe deux points x et y de $\mathbf{R}$ qui sont proches et tels que $f(\overline{x}) = z$ et $f(\overline{y}) = z'$.


Moment culturel

Dans ce cas, on dit que $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et $\mathcal{U}$ sont *homéomorphes*.

Exercice 8 (Construction de $\mathbf{Q}$)
Soit $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$. On définit la relation R sur E par $(a, b)R(c, d)$ si $ad = bc$. On munit E d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ par

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) \qquad \text{et} \qquad (a, b) \times (c, d) = (ac, bd).$$

Montrer que $+$ et $\times$ sont des lois internes commutatives et associatives sur E. On pose $\mathbf{Q} = E/R$. Montrer que $+$ et $\times$ définissent des lois sur $\mathbf{Q}$ "comme dans la vraie vie" (commutativité, associativité, élément neutre, inverses, distributivité).

3 Factorisation

Exercice 9
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Soit R une relation d'équivalence sur E et $\pi : E \to E/R$ la surjection canonique. On suppose que si xRy, alors $f(x) = f(y)$.

1. Montrer qu'il existe une unique application $h : E/R \to F$ telle que $f = h \circ \pi$.
2. Montrer que h est surjective si et seulement si f est surjective.
3. Montrer que h est injective si et seulement si xRy équivalent à $f(x) = f(y)$.
4. Application (nécessite l'exercice 7) : montrer qu'une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-périodique induit une application $h : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ et qu'une application f telle que pour tout $x \in R$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a $f(x + n) = f(x) + n$ induit une application $h : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ E/R \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Exercice 10
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Montrer que la relation R_f définie par $xR_f\, y$ si $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.
2. Soit G une ensemble et $g : E \to G$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ est que pour tout $(x, y) \in E^2$ tels que $xR_f\, y$, on a $xR_g\, y$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & F \\ G \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

4 Relations d'équivalence et groupes

Définition 6. On appelle *groupe* tout ensemble G muni d'une loi de composition interne associative $*$ tel que :

(i) il existe un élément neutre e (i.e. tel que pour tout $x \in G$, on ait $x * e = e * x = x$),
(ii) tout élément $x \in G$ possède un inverse $y \in G$ (i.e. tel que $x * y = y * x = e$), que l'on notera x^{-1}.

On appelle *sous-groupe* d'un groupe G tout sous-ensemble H de G stable par la loi $*$ qui est lui-même un groupe pour le loi $*$. Bien souvent, le produit de x par y sera noté xy au lieu de $x * y$.

Exercice 11
Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $x^2 = e$. *On pourra considérer la relation d'équivalence xRy si $x = y$ ou $x = y^{-1}$.* En déduire tous les groupes d'ordre 4 (difficile !).

Exercice 12
Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que la relation R définie sur G par xRy si $x^{-1}y \in H$ est une relation d'équivalence. L'ensemble quotient G/R sera noté G/H.

Exercice 13
Soit R la relation d'équivalence de l'exercice précédent.

1. Montrer que pour tout $x \in G$, la classe de x dans G/H est égal à l'ensemble $xH = \{xh \mid h \in h\}$.
2. En déduire que si G est un groupe de cardinal fini et H un sous-groupe de G, alors on a l'égalité
$$\mathrm{Card}(G) = \mathrm{Card}(H)\,\mathrm{Card}(G/H).$$
En particulier, le cardinal de H divise celui de G. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Lagrange ; c'est le théorème de base pour l'étude des groupes finis.

Moment culturel

3. En déduire que si G est un groupe fini de cardinal n et $x \in G$, alors $x^n = e$.

Exercice 14 (Application du théorème de Lagrange)
Soient G et G' deux groupes et φ une application de G dans G' qui est un *morphisme de groupes*, c'est à dire que pour tout $(f, g) \in G^2$, on a $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $\varphi(H)$ est un sous-groupe de G'.
2. On suppose que G et G' sont finis de cardinaux premiers entre eux. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $\varphi(g) = e$.

Exercice 15
Soit n un entier supérieur à 2. On considère l'ensemble quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (où $n\mathbf{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs multiples de n). Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$, $x' \in \overline{x}$ et $y' \in \overline{y}$.

1. Montrer que $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$ et que $\overline{xy} = \overline{x'y'}$.
2. En déduire que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ peut être muni de deux loi de composition internes $+$ et $\times$ héritées de l'addition et la multiplication sur $\mathbf{Z}$.
3. Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}^*, \times)$ (où $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}^*$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ inversibles pour le loi $\times$) sont des groupes.
4. Déduire de la question précédente et de l'exercice 13 le (petit) théorème de Fermat : si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est un multiple de p (nécessite le théorème de Bézout).