

Pierre-Antoine Guihéneuf

THÉORIE DE LA ROTATION SUR LES SURFACES

Pierre-Antoine Guihéneuf

8 mars 2026

THÉORIE DE LA ROTATION SUR LES SURFACES

Pierre-Antoine Guihéneuf

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Partie I. Définition des ensembles de rotation pour les surfaces	3
1. Une première définition	4
1.1. Courbes et surfaces, etc.....	4
1.2. Ensemble de rotation.....	4
2. Premiers exemples pour le tore	9
2.1. Les rotations.....	9
2.2. Les rotations fibrées.....	9
2.3. Un fer à cheval rotationnel.....	9
3. Propriétés de base découlant de la compacité	12
4. Intermède : quelques détails sur le nombre d'intersection algébrique	16
5. Ensemble de rotation des mesures et des mesures ergodiques	18
6. Un peu d'algèbre : des définitions équivalentes d'ensemble ou vecteur de rotation .	23
6.1. En refermant les segments d'orbites de l'isotopie.....	23
6.2. Par les différents domaines fondamentaux visités par l'orbite sous $\tilde{f}$ et la réduction de $\mathcal{G}$ en homologie.....	26
6.3. Par la dualité homologie/cohomologie.....	28
6.4. Via un ouvert de carte et l'application de premier retour (cas d'une mesure).....	30
Partie II. Le cas du tore	32
7. L'essentiel sur l'ensemble de rotation dans le tore	33
7.1. Convexité de l'ensemble de rotation, et une caractérisation équivalente de plus .	33
7.2. Album de famille : quelques autres exemples de base.....	37
8. Sur des problèmes de réalisation	41
9. Gros ensembles de rotation	43
9.1. L'entropie topologique.....	43
9.2. Le retour de la réalisation.....	44
9.3. Transitivité.....	44
9.4. La torsion.....	45
9.5. Une preuve de la positivité de l'entropie par le forçage.....	45

10. Déviations bornées et semi-conjugaisons	47
10.1. Quelques énoncés	47
10.2. Exemples d'homéos à déviations non bornées	49
10.3. Applications	52
10.4. Quelques preuves	55
11. Un autre sens à la réalisation : un problème de forme	58
11.1. L'intérieur vide	58
11.2. L'intérieur non vide	59
11.3. Quelques remarques numériques	61
12. L'ensemble de rotation vu comme application	63
13. Ce dont je ne parlerai pas, même si j'aurais peut-être dû	65
Partie III. La théorie du genre au moins 2	67
14. Deux exemples fondamentaux et leurs cousins	68
14.1. Le temps 1 d'un flot	68
14.2. Utilisation de fers à cheval rotationnels	72
15. Une première génération de résultats	75
16. Un long détour par l'homotopie	77
16.1. Quelques préliminaires sur les surfaces de genre ≥ 2 et leurs homéos	77
16.2. La théorie d'Anosov-Weil pour les flots de surfaces	78
16.3. Vecteurs de rotation homotopiques	79
16.4. Des résultats partiels à saveur convexe	82
16.5. Réalisation	83
16.6. De l'utilisation de revêtements pertinents	84
16.7. Une halte : les fers à cheval rotationnels	84
16.8. Géodésiques fermées non simples et obtention de fers à cheval rotationnels	87
16.9. Deux géodésiques fermées qui se croisent : plein de points périodiques	88
17. Suite du détour par l'homotopie : la théorie ergodique à la rescousse	90
17.1. Ensemble traçant	90
17.2. Géodésiques traçantes simples	93
17.3. Quelques résultats élémentaires	93
17.4. Intersections de géodésiques traçantes	95
18. Ensembles de rotation ergodiques	100
18.1. Énoncés et commentaires	100
18.2. Éléments de preuve	106
18.3. Des surfaces associées aux classes	107
18.4. Une astuce utile de revêtement	109
18.5. Des problèmes de réalisation	111
19. Intermède ludique : le graphe des courbes fin et la classification de ses isométries	114
19.1. Qui est le graphe des courbes fin?	114
19.2. Qui sont les loxodromiques?	117
19.3. Qui sont les elliptiques?	120
20. Vers l'ensemble de rotation général : comment tournent les orbites non typiques?	123
20.1. Un premier exemple : le cas C^0 générique	123
20.2. Ensemble de rotation et déviations bornées	124

20.3. Classes de fers à cheval et gros ensembles de rotation.....	130
21. Classification des homéos conservatifs d'entropie nulle.....	141
21.1. Deux exemples paradigmatiques.....	141
21.2. Énoncés.....	143
21.3. Plus sur les anneaux.....	146
21.4. Plus sur les pièces mélangeantes.....	148
A. B.A. BA de théorie du forçage.....	150
A.1. Un cas d'école : la dimension 1.....	150
A.2. Prérequis : théorie de Brouwer et feuilletages.....	152
A.3. Apparition des fers à cheval.....	155
A.4. Conséquences pour les ensembles de rotation.....	160
Liste d'exemples.....	162
Index.....	163
Bibliographie.....	165

INTRODUCTION

La théorie de la rotation a vu le jour à la fin du XIX^{ème} siècle avec la définition par Poincaré du nombre de rotation pour les homéos du cercle. Poincaré ne se contente pas de définir cet invariant de conjugaison, qui a de plus le bon goût d'avoir une signification physique, mais il l'utilise pour classer les dynamiques possibles, avec à la clef son fameux résultat de semi-conjugaison, amélioré par Denjoy en plus grande régularité quelques dizaines d'années plus tard. Bien sûr, l'histoire ne s'arrête pas là et de magnifiques résultats de conjugaison lisse entrelacent analyse très fine, combinatoire et approximation diophantienne. voir le chapitre [dFG24] du livre d'Edson et Pablo.

Vu sa richesse et sa portée, il est bien sûr naturel de vouloir généraliser cette théorie à d'autres contextes. On se contentera ici de faire un saut d'une dimension : on veut mettre en place une théorie de la rotation sur les surfaces. Le premier obstacle est que la préservation de l'ordre cyclique par les homéos du cercle n'a en général pas de version en dimension supérieure. On surmonte celui-ci en collectant toutes les vitesses asymptotiques de rotation autour de la surface dans un gros ensemble (malgré tout compact), appelé *ensemble de rotation* de l'homéo. La question est ensuite de savoir ce que cet invariant peut nous dire de la dynamique de l'homéo.

La théorie a pris naissance à la toute fin des années 80 avec la définition de cet invariant pour le tore et les découvertes de ses premières propriétés, et n'a depuis cessé de vivre et de faire vivre la communauté de la dynamique topologique sur les surfaces.

La théorie est restée essentiellement cantonnée au cas du tore jusqu'à assez récemment, principalement à cause de l'absence d'outils assez forts pour se frotter aux surfaces de genre plus grand. L'avènement de la théorie du forçage de Le Calvez et Tal il y a une dizaine d'années a changé la donne et permis l'exploration de ces nouveaux écosystèmes foisonnants. Le but fixé par ce texte est d'amener le lecteur ou la lectrice volontaire des débuts de la théorie pour le tore jusqu'à l'exposition d'un paradigme qui a émergé récemment, endémique des surfaces hyperboliques, et qui me semble fondamental pour l'étude des homéos en genre au moins 2 : celui de l'ensemble traçant et des classes de mesures qu'il définit. Cet ensemble traçant forme le squelette des phénomènes rotationnels en genre plus grand, squelette qui était resté caché pour le tore (puisque dans ce cas il y a une unique classe de mesures) et qui s'est dévoilé progressivement ces dernières années sous les coups de pinceau des mathématiciens-archéologues. Cet invariant est plus fin que l'ensemble de rotation jusque-là utilisé — l'ensemble de rotation homologique — et cela sur deux plans : il est homotopique au lieu d'homologique, et ergodique au lieu de pour tous les points. Il peut être vu comme une version rotationnelle des composantes transitives par chaînes pour la

théorie de Conley, ou des classes homoclines en dynamique hyperbolique. On verra à la fin de ce texte un exemple de dévissage de la dynamique à l'aide de cet invariant, dans le cas des homéos à *gros ensemble de rotation*. Si on comprend désormais assez bien ce qui se passe dans ce monde « unif hyperbolique » des homéos à gros ensemble de rotation, il reste encore à explorer le cas général.

Je parlerai aussi d'une motivation exogène récente pour la théorie de la rotation sur les surfaces : les liens avec le graphe fin des courbes, qui devrait permettre, qui en fait permet déjà, de mieux comprendre le groupe des homéos d'une surface.

Au niveau des méthodes employées, la théorie du forçage sera en filigrane tout au long du texte. Le lecteur trouvera un résumé des épisodes précédents sous forme d'un cours accéléré en fin de texte ; sa mise en pratique se fera au fil de l'eau du texte. Ce mémoire a néanmoins été également pensé pour les lectrices ne voulant pas s'y frotter de trop près : ses quelques utilisations seront signalées par un panneau « feuilletage dangereux » comme ci-contre.



Les différents niveaux de lecture pensés pour ce mémoire se traduisent en pratique dans sa structuration en quatre parties aux buts indépendants :

- La première partie verra une mise à plat des différentes définitions d'ensemble de rotation et des preuves complètes de leurs équivalences, unifiant le cas du tore avec celui du genre plus grand. Les néophytes y trouveront leur compte à une lecture détaillée, la communauté passera peut-être son chemin en se souvenant que les détails y sont enfin réunis.
- La seconde partie sera un survol partiel de ce qui est connu à ce jour du cas du tore. Quelques preuves seront détaillées, avec pour but la mise en pratique de la théorie du forçage sur des problèmes « concrets » de dynamique rotationnelle ; la théorie peut être traitée de manière plus élémentaire, voir par exemple l'excellent cours [Bég07] de François. Les quelques plus spécialistes pourraient s'ennuyer un peu.
- La troisième partie, plus longue et touffue, traitera des surfaces fermées de genre plus grand. On y rentrera ensemble dans le détail des constructions les plus importantes. J'essaierai d'y montrer que la zoologie des phénomènes possibles y est beaucoup plus riche que dans le cas du tore (avec un bémol sur l'absence de pseudo-rotations irrationnelles).
- La dernière partie consistera en une adaptation pour le contexte qui nous intéresse d'un exposé introductif [Gui21] à la théorie du forçage.

Dans tous les cas, on s'attardera particulièrement sur de nombreux exemples, qui constituent ensemble la boussole justifiant les directions prises par la théorie, ainsi que les questions et conjectures qui jalonnent régulièrement ce texte.

PARTIE I

DÉFINITION DES ENSEMBLES DE ROTATION POUR LES SURFACES

CHAPITRE 1

UNE PREMIÈRE DÉFINITION

1.1. Courbes et surfaces, etc.

Dans tout ce texte, sauf mention contraire, toutes les surfaces seront supposées *fermées* (*i.e.* compactes, orientables, connexes et sans bord), une terminologie affreuse s'il en est mais classique. Ces surfaces S sont classifiées (au sens topologique) par leur genre $g \geq 0$, qui est défini comme étant le nombre maximal de lacets qu'on peut dessiner sur S sans la déconnecter : deux surfaces fermées sont homéomorphes si et seulement si elles ont le même genre, et pour tout $g \geq 0$ il existe une surface fermée de genre g (voir [Tho92]). La caractéristique d'Euler de S peut alors être définie comme $\chi(S) = 2 - 2g$. On jette une fois pour toutes le cas de la sphère : celle-ci est homotopiquement triviale, on ne saurait donc définir telles quelles des propriétés rotationnelles d'un homéo de la sphère⁽¹⁾.

Sur toute surface S on peut dessiner des *courbes*, qui seront pour nous des applications continues d'un segment dans S . On identifiera allègrement les courbes vues comme applications et leurs images vues comme ensembles. Une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ sera dite *fermée* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dans ce cas, cela passe au quotient par l'identification de a avec b et définit (à renormalisation près) une fonction $S^1 \rightarrow S$; de telles applications sont appelées des *lacets*. De la même manière, on pourra abuser le langage en confondant courbe fermée et lacet. Une courbe ou un lacet sera dit *simple* si l'application qui la définit est injective. Un lacet sera dit *essentiel* s'il n'est pas contractile.

Une surface fermée S_g de genre $g \geq 0$ est la somme connexe d'une sphère avec g tores T^2 ; si $g \geq 1$ elle peut également être obtenue par recollement à partir d'un polygone à $4g$ côtés dont les côtés sont recollés deux par deux (voir la figure 3 pour une illustration dans le cas du tore et la figure 4 pour un exemple dans le cas $g = 2$). Cela permet d'obtenir $2g$ courbes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ qui, comme dans le cas du tore, découpent la surface en disques topologiques⁽²⁾, et qui forment un système générateur de $\pi_1(S_g, x_0)$ (pour un certain point base x_0).

1.2. Ensemble de rotation

Le nombre de rotation joue un rôle fondamental dans la compréhension de la dynamique des homéomorphismes (ou homéos) du cercle. Il est donc naturel de se demander s'il existe

⁽¹⁾Même si on peut dans certains cas retirer des points fixes de l'homéo pour obtenir une surface de caractéristique d'Euler négative ou nulle.

⁽²⁾Un disque topologique est un ensemble homéomorphe à un disque ouvert de $\mathbb{C}$, ou de manière équivalente au plan $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de l'application conforme, il revient au même de demander que l'ensemble soit ouvert et simplement connexe.

un invariant similaire en dimension plus grande, et de commencer par s'intéresser au cas des surfaces : on cherche un objet qui permette de capturer les vitesses moyennes asymptotiques de rotation autour de la surface.

Commençons par le cas du tore $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{S}^1)^2$, qu'on identifie avec $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Une première remarque est que contrairement au cercle, il n'y a pas une seule direction de rotation autour du tore : on peut par exemple tourner autour du cercle $\{0\} \times \mathbf{S}^1$, mais aussi autour du cercle $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$. L'invariant rotationnel qu'on cherche sera donc (au moins) bi-dimensionnel.

On remarque également que la préservation de l'ordre, qui empêche les orbites de se doubler dans le cercle, n'a pas de raison d'être en dimension plus grande. Cela apparaît assez clairement sur l'exemple suivant : on se donne une fonction continue $\phi : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$, ce qui permet de définir l'homéo de $\mathbf{R}^2$

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_\phi : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + \phi(y) \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui passe au quotient par $\mathbf{Z}^2$ en une application $f_\phi : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ appelée *rotation fibrée* (voir la figure 1).

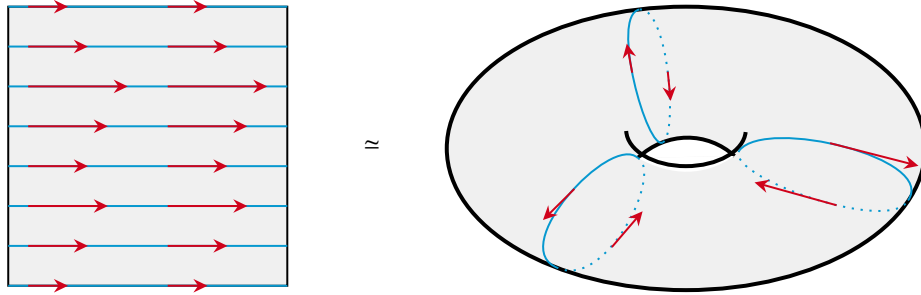


FIGURE 1. Une rotation fibrée sur le tore. Les longueurs des flèches rouges correspondent aux valeurs de ϕ . Notons que cet exemple est le temps 1 d'un flot sur le tore.

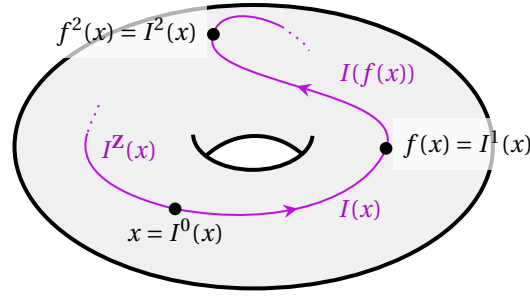
La dynamique de cet homéo f_ϕ se décrit très facilement : f_ϕ laisse invariante chaque feuille du feuilletage du tore en cercles horizontaux $\mathbf{S}^1 \times \{y\}$, et sur un tel cercle la restriction de f_ϕ est une rotation d'angle $\phi(y)$ (dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$). Il y a donc plusieurs vitesses de rotation différentes, du type $(\phi(y), 0)$ pour $y \in \mathbf{S}^1$, et on s'attend à ce que l'invariant rotationnel associé à f_ϕ les décrive toutes. Cet invariant sera donc *a priori* un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ composé de toutes les vitesses asymptotiques de rotation autour du tore.

Rappelons que dans le cas du cercle on se borne à étudier le nombre de rotation pour les homéos croissants (ou préservant l'orientation). Pour les surfaces, la généralisation de cette hypothèse est le fait d'être isotope à l'identité.

Pour une surface S donnée, notons $\text{Homeo}_0(S)$ l'ensemble des homéos de S qui sont *isotopes* à l'identité (ou, de manière équivalente ici, homotopes [Eps66]), c'est-à-dire que $f \in \text{Homeo}_0(S)$ s'il existe une application

$$\begin{aligned} I : [0, 1] &\longrightarrow \text{Homeo}(S) \\ t &\longmapsto I^t \end{aligned}$$

telle que $I^0 = \text{Id}_S$ et $I^1 = f$. En particulier, cela donne, pour tout $x \in S$, un chemin $(I^t(x))_{t \in [0, 1]}$ reliant x à $f(x)$. Remarquons que le chemin $(I^t(f^{-1}(x)))_{t \in [0, 1]}$ relie $f^{-1}(x)$ à

FIGURE 2. La construction de l'isotopie globale I^Z .

$f(x)$, $(I^t(f(x)))_{t \in [0,1]}$ relie $f(x)$ à $f^2(x)$, etc.; on peut donc concaténer ces chemins (voir la figure 2) pour obtenir une application

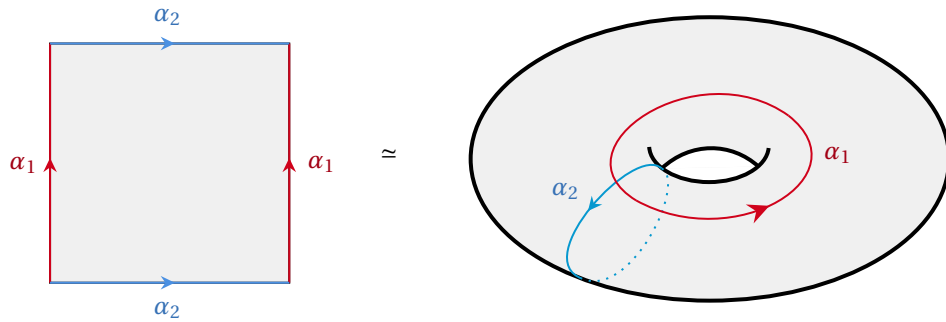
$$\begin{aligned} I^Z : \mathbf{R} &\longrightarrow \text{Homeo}(S) \\ t &\longmapsto I^t, \end{aligned}$$

telle que pour tout $m, n \in \mathbf{Z}$, avec $m \leq n$, le chemin $(I^t(x))_{t \in [m,n]}$ relie $f^m(x)$ à $f^n(x)$.

Revenons au cas du tore. Pour obtenir la vitesse rotationnelle d'une orbite, on va compter le nombre de tours qu'elle fait dans chacune des directions du tore — le premier $\mathbf{S}^1$ et le second $\mathbf{S}^1$ de $\mathbf{T}^2 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ — et diviser par le temps⁽³⁾. Le nombre de tours est mesuré à l'aide des deux courbes fermées orientées α_1 et α_2 (voir la figure 3); le nombre de tours horizontaux parcourus par l'orbite de x en temps n est le nombre d'intersection algébrique⁽⁴⁾⁽⁵⁾ $i(I^{[0,n]}(x), \alpha_1)$ et le nombre de tours verticaux est le nombre d'intersection algébrique $i(I^{[0,n]}(x), \alpha_2)$. Cela permet de définir

$$(2) \quad \Delta_I^n(x) = (i(I^{[0,n]}(x), \alpha_j))_{j=1,2} \in \mathbf{Z}^2$$

le déplacement rotationnel de l'orbite de x en temps n . Le vecteur $\Delta^n(x)/n$ désigne donc la vitesse moyenne rotationnelle de l'orbite de x en temps n .

FIGURE 3. Les courbes α_1 et α_2 du tore utilisées pour mesurer le nombre de tours parcourus par les orbites.

⁽³⁾Un peu comme, pour mesurer sa vitesse moyenne, un coureur va compter le nombre de tours de piste parcourus et diviser par son temps de course.

⁽⁴⁾Il faut bien considérer un nombre d'intersection algébrique ici : personne n' imagine compter un tour supplémentaire à un coureur qui passe la ligne d'arrivée en revenant sur ses pas.

⁽⁵⁾Il faut faire un choix si, pas de chance, x ou $f^n(x)$ tombe pile sur α_1 . On fait un choix une fois pour toutes et ce choix n'affectera pas la suite.

Pour obtenir l'ensemble de rotation de f , on va considérer l'ensemble d'accumulation de ces vitesses moyennes $\Delta_I^n(x)/n$. Il y a plusieurs façons de définir un tel ensemble d'accumulation : on peut faire tendre n vers $+\infty$ à x fixé et prendre l'union de ces ensembles sur tous les $x \in \mathbf{T}^2$, ou alors faire tendre n vers $+\infty$ en autorisant x à varier. Il s'avère que c'est ce dernier choix qui donne l'invariant dynamique le plus pratique (même si on reparlera du premier), et qu'on appelle *ensemble de rotation de Misiurewicz-Ziemian*, ou *ensemble de rotation* lorsqu'aucune confusion ne sera possible :

$$(3) \quad \text{rot}(I) = \overline{\lim_H}_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\Delta_I^n(x)}{n} \mid x \in \mathbf{T}^2 \right\},$$

où $\overline{\lim}_H$ est la limite sup au sens de Hausdorff, définie par :

$$\overline{\lim_H}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{N \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n}.$$

Exercice 1.1. — Vérifier que cet ensemble peut également s'écrire :

$$(4) \quad \text{rot}(I) = \left\{ r \in \mathbf{R}^2 \mid \exists (x_k) \in (\mathbf{T}^2)^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty : \frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r \right\}.$$

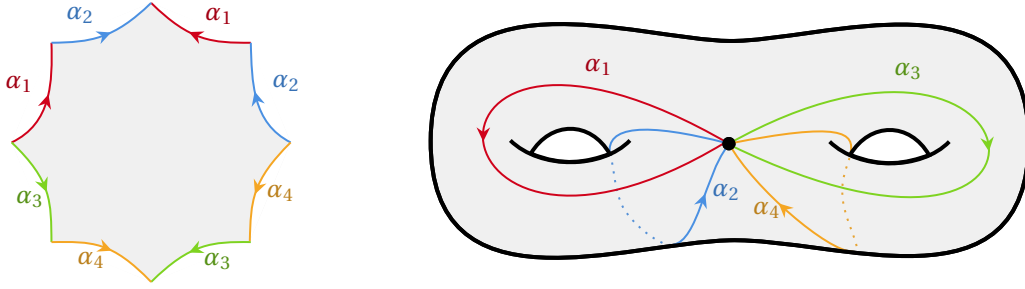


FIGURE 4. Les courbes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 4}$ de la surface de genre 2 utilisées pour mesurer le nombre de tours parcourus par les orbites (voir aussi la vidéo du projet *Analysis Situs* [dSG22].)

Voyons dès maintenant comment adapter cette définition au cas de toutes les surfaces fermées de genre $g \geq 1$. Comme pour le tore (2), les courbes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2g}$ peuvent être utilisées pour définir

$$(5) \quad \Delta_I^n(x) = (i(I^{[0,n]}(x), \alpha_j))_{1 \leq j \leq 2g} \in \mathbf{Z}^{2g},$$

puis comme dans (4) :

Définition 1.2. — L'ensemble de rotation $\text{rot}_{\text{MZ}}(I)$, noté aussi $\text{rot}(I)$, est défini par

$$\text{rot}(I) = \left\{ r \in \mathbf{R}^{2g} \mid \exists (x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty : \frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r \right\}.$$

Un élément de $\text{rot}_{\text{MZ}}(I)$ est appelé *vecteur de rotation*.

inclure les
note dans la
biblio

Cette définition est une adaptation d'une notion due à Poincaré, redécouverte par Schwarzman [Sch57] à la fin des années 50 et simplifiée par Misiurewicz et Ziemian [MZ90] dans le cadre du tore à la toute fin des années 80.

Notons que cette définition dépend du choix de l'isotopie I , on note donc $\text{rot}(I)$ et non $\text{rot}(f)$, on verra plus tard comment définir $\text{rot}(f)$. On verra également comment faire en sorte qu'elle ne dépende pas du choix des courbes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 2g}$.

Comme précédemment en (3), on vérifie immédiatement qu'on a aussi la formulation en terme de limsup :

$$(6) \quad \text{rot}(I) = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\Delta_I^n(x)}{n} \mid x \in S \right\}},$$

Celle-ci implique en particulier qu'un voisinage de l'ensemble de rotation contient tous les ensembles $\Delta_I^n(S)/n$ pour n assez grand. Plus précisément : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ et $x \in S$, alors $d((\Delta_I^n(x)/n, \text{rot}(I)) \leq \varepsilon$.

Définition 1.3. — Si la suite de vitesses moyennes

$$\left(\frac{\Delta_I^n(x)}{n} \right)_n$$

converge en $+\infty$ vers une quantité notée $\rho_I(x)$, on dit que $\rho_I(x)$ est le *vecteur de rotation* du point x .

Sinon, on définit $\rho_I(x)$ comme l'ensemble d'accumulation de la suite $(\Delta_I^n(x)/n)_n$ et on l'appelle *ensemble de rotation* de x .

Bien sûr, si x possède un vecteur de rotation, alors $\rho_I(x) \in \text{rot}(I)$. Sinon, on a toujours $\rho_I(x) \subset \text{rot}(I)$.

Définition 1.4. — Pour $f \in \text{Homeo}_0(S)$, on définit son *ensemble de rotation ponctuel* comme l'ensemble des vecteurs de rotation de points :

$$\text{rot}_{\text{pts}}(I) = \{r \in \mathbf{R}^{2g} \mid \exists x \in S : r = \rho_I(x)\}.$$

Bien sûr, on a $\text{rot}_{\text{pts}}(f) \subset \text{rot}(I)$.

On pourrait définir encore un ensemble de rotation en reprenant la définition d'ensemble de rotation ponctuel et en autorisant les itérés négatifs :

$$\text{rot}_{\text{pts}}^Z(I) = \left\{ r \in \mathbf{R}^{2g} \mid \exists x \in S, n_k, m_k \rightarrow +\infty : r = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_I^{n_k+m_k}(f^{-m_k}(x))}{n_k+m_k} \right\}.$$

Je ne connais aucun exemple pour lequel il est évident que $\text{rot}_{\text{pts}}^Z(I) \neq \text{rot}(I)$ (voir en particulier celui décrit à la figure 7, et le point 1. de la proposition 20.38), d'où la question :

Problème 1.5. — *A-t-on toujours $\text{rot}_{\text{pts}}^Z(I) = \text{rot}(I)$?*

CHAPITRE 2

PREMIERS EXEMPLES POUR LE TORE

2.1. Les rotations

L'exemple le plus simple d'homéo du tore ayant des propriétés rotationnelles non triviales est celui des rotations sur le tore : étant donné $\theta \in \mathbf{R}^2$, l'homéo $\tilde{R}_\theta$ de $\mathbf{R}^2$ donné par $\tilde{R}_\theta(\tilde{x}) = \tilde{x} + \theta$ passe au quotient par $\mathbf{Z}^2$ et donne un homéo R_θ du tore $\mathbf{T}^2$. Une isotopie est donnée par $I^t(x) = x + t\theta$; cette formule reste valable pour tout $t \in \mathbf{R}$ lorsqu'on étend l'isotopie. On vérifie facilement que (notant $x = (x_1, x_2)$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2)$)

$$\Delta_I^n(x) = \begin{pmatrix} \lfloor x_1 + n\theta_1 \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor \\ \lfloor x_2 + n\theta_2 \rfloor - \lfloor x_2 \rfloor \end{pmatrix};$$

ainsi Δ_I^n/n converge uniformément vers θ , ce qui implique, comme on pouvait l'imaginer, que $\text{rot}(I) = \{\theta\}$ (pour cela, utiliser au choix la définition 1.2 ou la caractérisation (6)).

2.2. Les rotations fibrées

Calculons également l'ensemble de rotation d'une rotation fibrée définie en (1) (voir aussi la figure 1). Une isotopie I est donnée par $I^t(x) = (x_1 + t\phi(x_2), x_2)$, et alors

$$\Delta_I^n(x) = \begin{pmatrix} \lfloor x_1 + n\phi(x_2) \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor \\ 0 \end{pmatrix};$$

ce qui implique que les fonctions Δ_I^n/n convergent uniformément vers la fonction $(x_1, x_2) \mapsto (\phi(x_2), 0)$. Ainsi (de nouveau en utilisant au choix la définition 1.2 ou la caractérisation (6)),

$$(7) \quad \text{rot}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbf{R} \right\} = [\min \phi, \max \phi] \times \{0\}$$

est un intervalle horizontal, qui est non trivial dès que ϕ est non constante.

2.3. Un fer à cheval rotationnel

On verra plus tard un exemple élémentaire d'homéo du tore ayant un ensemble de rotation d'intérieur non vide (voir la sous-section 7.2.2) mais l'étude de celui-ci nécessite d'avoir la convexité de l'ensemble de rotation dans le cas du tore.

On peut néanmoins dès à présent présenter un tel exemple, à l'aide de la notion de *fer à cheval rotationnel*. Cet exemple, décrit rapidement dans [Pol92, Exemple 4.2], est illustré sur la figure 5.

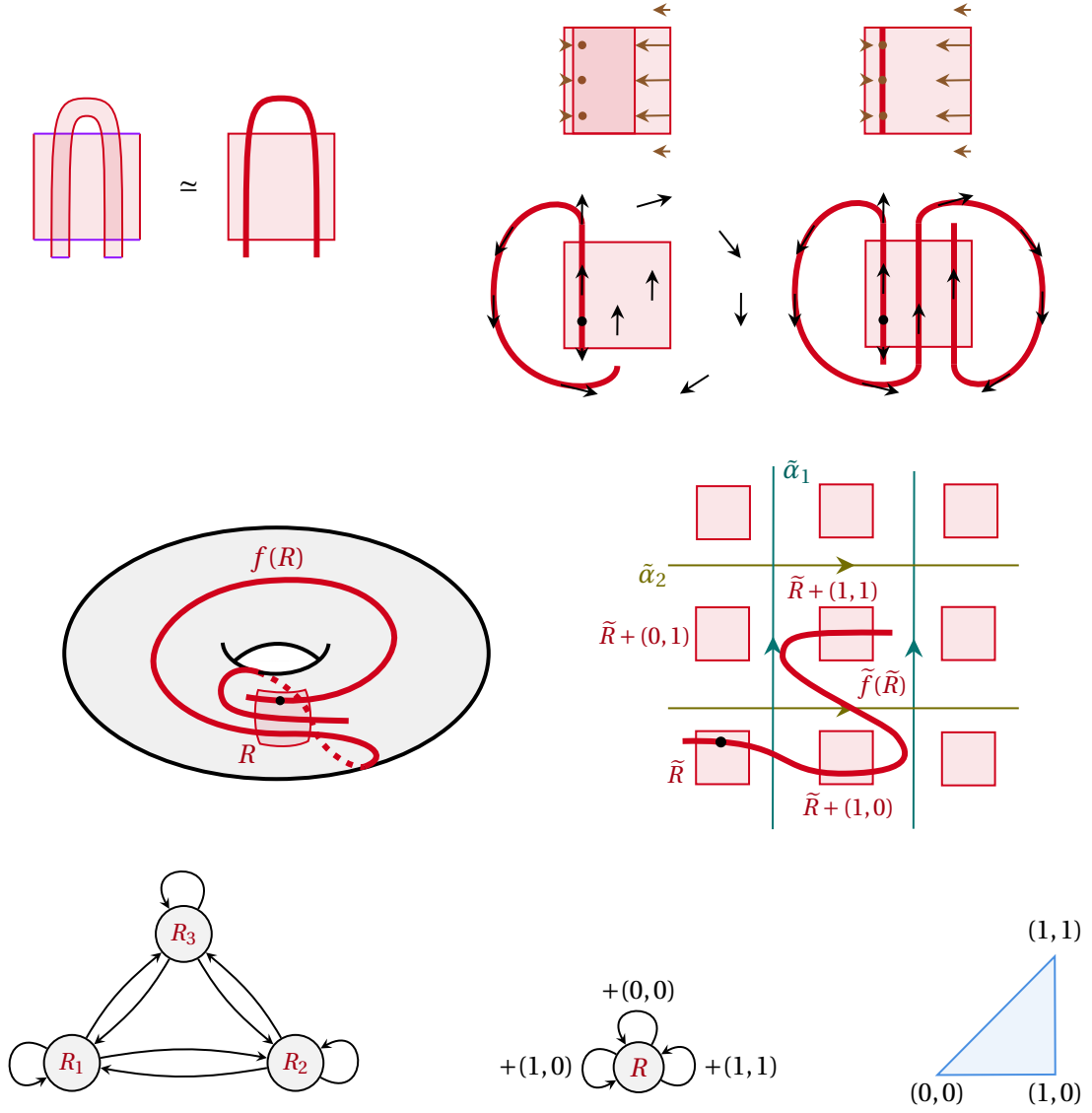


FIGURE 5. Un exemple d'homéo du tore ayant un ensemble de rotation d'intérieur non vide.

Comme suggéré en haut à gauche de la figure 5, on représente l'image d'un rectangle comme un trait épais. Le dessin en haut à droite de la figure 5 montre comment obtenir un fer à cheval à partir d'un champ de vecteurs non autonome : au début on applique le flot d'un champ de vecteurs (en marron) qui contracte le rectangle horizontalement (deux premières illustrations), puis le flot d'un champ de vecteurs (en noir) qui étire verticalement et déforme le rectangle fin ainsi obtenu (deux dernières illustrations). Les gros points sont des zéros des champs de vecteurs. Ce flot non autonome (ϕ^t) donne de fait une isotopie I entre l'identité et ϕ^1 (et ϕ^1 est de ce fait le produit de deux temps 1 de flots).

Ce fer à cheval en haut à droite de la figure 5 peut être plongé dans le tore $\mathbf{T}^2$ (dessin au milieu à gauche de la figure 5). On a donc un rectangle R sur le tore qui est envoyé par f sur l'ensemble $f(R)$ qui a 3 intersections markoviennes avec R (on verra des définitions précises à la section 16.7). Le point noir est un point fixe *contractile* de $\tilde{f}$, c'est-à-dire un point fixe de f dont les relevés sont fixes par $\tilde{f}$.

Un point de vue intéressant est de relever cette configuration au revêtement universel $\mathbf{R}^2$ de $\mathbf{T}^2$ (dessin au milieu à droite de la figure 5) : l'image $\tilde{f}(\tilde{R})$ intersecte de manière markovienne les rectangles $\tilde{R}$, $\tilde{R} + (1, 0)$ et $\tilde{R} + (1, 1)$. En particulier, cela force l'existence de trois points fixes p_1, p_2, p_3 de f : leurs relevés respectifs satisfont respectivement $\tilde{f}(\tilde{p}_1) = \tilde{p}_1$, $\tilde{f}(\tilde{p}_2) = \tilde{p}_2 + (1, 0)$ et $\tilde{f}(\tilde{p}_3) = \tilde{p}_3 + (1, 1)$.

Le graphe en bas à gauche de la figure 5 représente la dynamique discrète associée à ce fer à cheval rotationnel : les trois composantes connexes de $f(R) \cap R$ sont trois rectangles notés R_1, R_2 et R_3 . On sait que la dynamique de f en restriction à $K = \bigcap_{i \in \mathbf{Z}} f^i(R)$ est conjuguée au décalage sur un alphabet à 3 éléments $\{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}} \ni (\omega_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (\omega_{i+1})_{i \in \mathbf{Z}}$ via la conjugaison $x \mapsto (\omega_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ vérifiant $f^i(x) \in R_{\omega_i}$ pour tout i . On vérifie facilement (par récurrence) que si $x \in K$ et $\tilde{x} \in \tilde{R}$ est un relevé de x , alors

$$(8) \quad \tilde{f}^n(\tilde{x}) \in \tilde{R} + v_n,$$

où

$$v_n = \text{Card}\{0 \leq i < n \mid \omega_i = 2\} (1, 0) + \text{Card}\{0 \leq i < n \mid \omega_i = 3\} (1, 1) :$$

en effet si $\tilde{x} \in \tilde{R}$, et

- si $x \in R_1$, alors $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{R}$;
- si $x \in R_2$, alors $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{R} + (1, 0)$;
- si $x \in R_3$, alors $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{R} + (1, 1)$.

L'équation 8 et la configuration entre le rectangle et les courbes α_1 et α_2 implique directement que

$$\Delta_I^n(x) = v_n.$$

Remarquons que le vecteur v_n/n est un barycentre de $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. D'autre part, pour tout vecteur de probabilités (p_1, p_2, p_3) , il existe un mot infini dont la proportion de 1 vaut p_1 , de 2 vaut p_2 et de 3 vaut p_3 . Cela implique que pour tout point r du triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$ (en bas à droite de la figure 5), il existe un point $x \in R$ dont le vecteur de rotation est r . Cela signifie que l'ensemble de rotation de f contient le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$, et donc est d'intérieur non vide.

Un autre point de vue intéressant, qu'on adoptera plusieurs fois par la suite, est de construire un graphe de Markov avec seulement le rectangle R , mais en étiquetant les intersections markoviennes par des automorphismes de revêtement : on étiquette $R \xrightarrow{w} R$, avec $w \in \mathbf{Z}^2$, si l'intersection $\tilde{f}(\tilde{R}) \cap (\tilde{R} + w)$ est markovienne (en bas au milieu de la figure 5). Alors pour tout mot $(\omega_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbf{Z}}$, il existe $\tilde{x} \in \tilde{R}$ tel que pour tout $n \geq 0$, on a $\tilde{f}^n(\tilde{x}) \in \tilde{R} + \sum_{i=0}^{n-1} w_{\omega_i}$ et $\tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) \in \tilde{R} + \sum_{i=-n}^{-1} w_{\omega_i}$.

Cet exemple fournit également des points qui ne possèdent pas de vecteur de rotation. Choisissons un point $x \in K$ dont l'itinéraire dans la partition $K = (K \cap R_1) \sqcup (K \cap R_2) \sqcup (K \cap R_3)$ est le mot bi-infini

$$\omega = \dots \underbrace{11111}_{3!} \underbrace{00}_{2!} 1 0 1 \underbrace{00}_{2!} \underbrace{11111}_{3!} \underbrace{00000000000000000000}_{4!} \dots$$

On vérifie que pour ce mot, la suite v_n/n s'accumule à la fois sur $(0, 0)$ et sur $(1, 0)$, par conséquent la suite $\Delta_I^n(x)/n$ ne converge pas.

CHAPITRE 3

PROPRIÉTÉS DE BASE DÉCOULANT DE LA COMPACITÉ

Rappelons que le revêtement universel $\tilde{S}$ de toute surface S de genre $g \geq 1$ est homéomorphe au plan⁽¹⁾. On note $\mathcal{G}$ le groupe d'automorphismes du revêtement $\tilde{S} \rightarrow S$ (un élément de $\mathcal{G}$ est un homéo de $\tilde{S}$ qui se projette en Id_S).

Dans le cas du tore $S = \mathbf{T}^2 \simeq \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, on a une application naturelle $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ de passage au quotient, ce qui donne l'identification $\mathcal{G} \simeq \mathbf{Z}^2$.

Une conséquence importante de la compacité de la surface S est le fait que les déplacements (mesurés avec les courbes α_i) des orbites en temps 1 de l'isotopie sont bornés :

Lemme 3.1. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in S$, on a*

$$\|\Delta_I^1(x)\|_\infty \leq C.$$

Démonstration. — On peut relever l'isotopie I à $\tilde{S}$ en une isotopie $\tilde{I}$ entre $\text{Id}_{\tilde{S}}$; on note $\tilde{f} \in \text{Homeo}(\tilde{S})$ le relevé $\tilde{I}^1$ de f . Par construction, ce relevé commute aux transformations de revêtement : on a

$$\forall T \in \mathcal{G}, \forall \tilde{x} \in \tilde{S}, \tilde{f}(T\tilde{x}) = T\tilde{f}(\tilde{x}).$$

Considérons également $\tilde{D}$ le domaine fondamental de $\tilde{S}$ délimité par les courbes α_i des figures 3 et 4. Par la suite, on appellera *domaine fondamental* un compact connexe par arcs de $\tilde{S}$, avec les propriétés

$$\begin{aligned} \bigcup_{T \in \mathcal{G}} T\tilde{D} &= \tilde{S}, \\ \forall T \in \mathcal{G} \setminus \{0\}, \text{int } \tilde{D} \cap T \text{int } \tilde{D} &= \emptyset. \end{aligned}$$

La fonction $\tilde{I} - \text{Id}_{[0,1] \times \tilde{S}}$ est continue donc bornée sur le compact $\tilde{D}$; elle est également $\mathcal{G}$ -invariante, ce qui implique qu'elle est bornée sur $\tilde{S}$. Ainsi, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{S}$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $d_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{I}^t(\tilde{x})) \leq \|\tilde{I} - \text{Id}_{[0,1] \times \tilde{S}}\|_\infty$. En particulier (puisque l'action de $\mathcal{G}$ est proprement discontinue), il existe $C > 0$ tel que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{S}$, le nombre de domaines fondamentaux $T\tilde{D}$, avec $T \in \mathcal{G}$, rencontrés par la courbe $(\tilde{I}^t(\tilde{x}))_{t \in [0,1]}$ est inférieur à C . En particulier, pour tout $x \in S$, on a :

$$\|\Delta_I^1(x)\|_\infty \leq C.$$

□

⁽¹⁾ Si la surface est équipée d'une métrique de courbure constante, ce revêtement universel est le plan euclidien si $S = \mathbf{T}^2$ et le plan hyperbolique dans le cas d'une surface de genre $g \geq 2$.

Remarquons que l'application Δ est un cocycle : pour $x \in S$ et $m, n \in \mathbf{N}$, on a

$$(9) \quad \Delta_I^{m+n}(x) = \Delta_I^m(x) + \Delta_I^n(f^m(x)),$$

en particulier,

$$\Delta_I^n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_I^1(f^j(x))$$

et par conséquent, pour tout $x \in S$,

$$(10) \quad \left\| \frac{\Delta_I^n(x)}{n} \right\|_{\infty} \leq C.$$

Cela démontre que $\text{rot}(I)$ est borné. De plus, on voit très facilement qu'il est fermé (c'est un ensemble d'accumulation). On vient donc de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.2. — *L'ensemble $\text{rot}(I)$ est compact.*

L'ensemble de rotation est obtenu à partir de propriétés *asymptotiques* de f , c'est donc naturel que ce soit un invariant de conjugaison.

Soit donc $g \in \text{Homeo}_0(S)$. L'isotopie gIg^{-1} est définie pour $t \in [0, 1]$ par $(gIg^{-1})^t(x) = gI^t g^{-1}(x)$; on vérifie sans peine que quand on étend cette isotopie à $t \in \mathbf{R}$ par concaténation, la formule précédente $(gIg^{-1})^t(x) = gI^t g^{-1}(x)$ reste vraie.

Proposition 3.3. — *L'ensemble de rotation est un invariant dynamique : pour $g \in \text{Homeo}_0(S)$, on a*

$$\text{rot}(gIg^{-1}) = \text{rot}(I).$$

Démonstration. — Soit J une isotopie entre l'identité et g . Pour $x \in S$, le chemin $(gI^{[0,n]}g^{-1})(x)$ est homotope avec extrémités fixes à la concaténation des chemins $\bar{J}(x)$, $I^{[0,n]}(g^{-1}(x))$ et $J^{[0,1]}(f^n(g^{-1}(x)))$ (où $\bar{J}^t(x) = J^{1-t}(f^{-1}(x))$). Rappelons que le nombre d'intersection algébrique avec une courbe fermée est invariant par homotopie fixant les extrémités, par conséquent

$$\Delta_{gIg^{-1}}^n(x) = \Delta_{\bar{J}}^1(x) + \Delta_I^n(g^{-1}(x)) + \Delta_J^1(f^n(g^{-1}(x))).$$

Le lemme 3.1 implique alors qu'il existe une constante $C' > 0$ (dépendant de J mais pas de n) telle que pour tout $x \in S$,

$$(11) \quad \left\| \Delta_{gIg^{-1}}^n(x) - \Delta_I^n(g^{-1}(x)) \right\|_{\infty} \leq C'.$$

Ainsi, s'il existe $(x_k) \in S$, $n_k \rightarrow +\infty$ et $r \in \mathbf{R}^{2g}$ tels que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_I^{n_k}(x_k)/n_k = r$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_{gIg^{-1}}^{n_k}(g(x_k))/n_k = r$. Cela démontre que $\text{rot}(gIg^{-1}) \subset \text{rot}(I)$, et en appliquant le même raisonnement en échangeant I et gIg^{-1} on obtient que $\text{rot}(I) \subset \text{rot}(gIg^{-1})$. Cela démontre la proposition. $\square$

On verra plus tard ce qu'il se passe dans le cas où g n'est pas homotope à l'identité (proposition 6.3).

On a aussi un comportement agréable de l'ensemble de rotation vis-à-vis de l'itération :

Proposition 3.4. — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$, I une isotopie reliant Id_S à f , et $q \in \mathbf{N}$. Alors :*

- $\text{rot}(I^q) = q \text{rot}(I)$;
- $\text{rot}(\bar{I}) = -\text{rot}(I)$;

où I^q est la restriction de $I^{\mathbf{Z}}$ à $[0, q]$ et $\bar{I}$ est l'isotopie entre Id_S et f^{-1} induite naturellement par I : pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\bar{I}^t(x) = I^{1-t}(f^{-1}(x))$.

Démonstration. — L'idée centrale de la preuve de la première propriété est la division euclidienne.

Commençons par l'inclusion facile : soit $r \in \text{rot}(I^q)$. Alors il existe $(x_k) \in S$ et $n_k \rightarrow +\infty$ tels que

$$q \frac{\Delta_I^{qn_k}(x_k)}{qn_k} = \frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r.$$

On en déduit que $r/q \in \text{rot}(I)$.

Soit maintenant $r \in \text{rot}(I)$. Alors il existe $(x_k) \in S$ et $n_k \rightarrow +\infty$ tels que

$$\frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r.$$

Effectuons la division euclidienne de n_k par q : il existe $p_k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq m_k < q$ tels que $n_k = p_k q + m_k$. Par la propriété de cocycle (9), on a :

$$\Delta_I^{n_k}(x_k) = \Delta_I^{p_k q}(x_k) + \Delta_I^{m_k}(f^{p_k q}(x_k)),$$

combinée avec le caractère borné des vitesses moyennes (10) cette égalité implique que

$$\|\Delta_I^{n_k}(x_k) - \Delta_I^{p_k q}(x_k)\|_\infty \leq C m_k \leq C q.$$

Ainsi,

$$\frac{\Delta_I^{p_k q}(x_k)}{p_k} = \frac{n_k}{p_k} \frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} + \frac{1}{p_k} (\Delta_I^{p_k q}(x_k) - \Delta_I^{n_k}(x_k)).$$

Le premier terme tend vers qr , alors que le second est majoré en norme par $Cq/p_k \leq Cq^2(n_k - q)$. Cela montre que $qr \in \text{rot}(I^q)$ et termine la preuve de la seconde inclusion.

Le second point de la proposition découle facilement de la remarque suivante :

$$\frac{\Delta_I^{n_k}(x_k)}{n_k} = - \frac{\Delta_I^{n_k}(f^{n_k}(x_k))}{n_k}$$

(qui vient du fait que la trajectoire de $f^{n_k}(x_k)$ sous $\bar{I}$ en temps n_k est la trajectoire de x_k sous I en temps n parcourue à l'envers). $\square$

Proposition 3.5. — *L'ensemble de rotation $\text{rot}(I)$ est connexe.*

Avant la preuve, un petit rappel sur la distance de Hausdorff. La *distance de Hausdorff* est définie par : étant donnés deux compacts K_1, K_2 du plan, $d_H(K_1, K_2)$ est l'inf des $d > 0$ pour lesquels $K_1 \subset V_d(K_2)$ et $K_2 \subset V_d(K_1)$. Ici $V_d(K)$ désigne le d -voisinage de K , c'est-à-dire l'ensemble des points à distance $< d$ d'un point de K . La distance de Hausdorff est une distance (le seul point non trivial est l'inégalité triangulaire). Étant donnée une partie compacte C du plan, l'ensemble $\mathcal{K}(C)$ des parties compactes de C , muni de d_H , est compact. En particulier, pour montrer la convergence d'une suite d'éléments de $\mathcal{K}(C)$ il suffit de montrer que toutes ses valeurs d'adhérence sont égales.

Démonstration. — On raisonne par l'absurde : supposons que l'ensemble de rotation $\text{rot}(I)$ n'est pas connexe. Puisqu'il est compact (proposition 3.2), cela implique qu'il peut s'écrire comme l'union disjointe de deux compacts non vides K_1 et K_2 . Posons $d > 0$ la distance minimale entre un élément de K_1 et un élément de K_2 .

Montrons tout d'abord que

$$(12) \quad d_H \left(\frac{\Delta_I^n(S)}{n}, \frac{\Delta_I^{n+1}(S)}{n+1} \right) \leq 2 \frac{C}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(où d_H désigne la distance de Hausdorff et C la constante du lemme 3.1). Cela découle de la majoration suivante, conséquence du lemme 3.1 et de la propriété (9) de cocycle :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_I^n(x)}{n} - \frac{\Delta_I^{n+1}(x)}{n+1} \right| &\leq \left| \frac{\Delta_I^n(x) - \Delta_I^{n+1}(x)}{n} \right| + |\Delta_I^{n+1}(x)| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &\leq \left| \frac{\Delta_I^1(f^n(x))}{n} \right| + \frac{(n+1)C}{n(n+1)} \\ &\leq 2 \frac{C}{n}. \end{aligned}$$

Par la suite, on note $V_r(A) = \{y \in S \mid d(y, A) < r\}$. On a vu que par (6) il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geq N$, on a

$$\frac{\Delta_I^n(S)}{n} \subset V_{d/3}(\text{rot}(I)).$$

Or par la définition de d , l'union suivante est disjointe : $V_{d/3}(\text{rot}(I)) = V_{d/3}(K_1) \sqcup V_{d/3}(K_2)$, donc

$$(13) \quad \frac{\Delta_I^n(S)}{n} \subset V_{d/3}(K_1) \sqcup V_{d/3}(K_2),$$

et les deux ensembles de l'union sont à distance $\geq d/3$.

Remarquons que si $x, y \in S$, il existe un chemin γ reliant x à y . L'application $t \mapsto \Delta_I^n(\gamma(t))/n$ n'est pas continue, mais ses sauts de continuité sont majorés par $2g/n$ (ça vient du fait que $I^n(\gamma(t))$ ne peut pas croiser deux fois le même α_j au même moment t). Ainsi, en utilisant (13), si $2g/n < d/3$ et $n \geq N$, et si $i \in \{1, 2\}$ est tel que $\Delta_I^n(x)/n \in V_{d/3}(K_i)$, alors $\Delta_I^n(y)/n \in V_{d/3}(K_i)$. Autrement dit, il existe $i_n \in \{1, 2\}$ tel que $\Delta_I^n(S)/n \subset V_{d/3}(K_{i_n})$.

Ainsi, (12) montre que la distance de Hausdorff entre les ensembles $\Delta_I^n(S)/n$ et $\Delta_I^{n+1}(S)/(n+1)$ est inférieure à $d/3$ si n est assez grand. Puisque la distance minimale entre un point de $V_{d/3}(K_1)$ et un point de $V_{d/3}(K_2)$ est supérieure à $d/3$, on en déduit que si $\Delta_I^n(S)/n \subset V_{d/3}(K_{i_n})$, alors $\Delta_I^{n+1}(S)/(n+1) \subset V_{d/3}(K_{i_n})$, autrement dit que $i_{n+1} = i_n$. Ainsi, la suite (i_n) est constante à partir d'un certain rang; quitte à échanger K_1 et K_2 on peut supposer qu'elle est constante égale à 1. Cela implique que $\Delta_I^n(S)/n \cap V_{d/3}(K_2) = \emptyset$ pour tout n assez grand, ce qui contredit le fait que K_2 est non vide et inclus dans la limite supérieure des ensembles $\Delta_I^n(S)/n$. $\square$

CHAPITRE 4

INTERMÈDE : QUELQUES DÉTAILS SUR LE NOMBRE D'INTERSECTION ALGÈBRIQUE

Il y a plusieurs moyens de définir le nombre d'intersection algébrique $i(\alpha, \beta)$ entre une courbe fermée simple α sur S non séparante⁽¹⁾ et une autre courbe β .

La première est simplement de compter le nombre d'intersections entre α et β , mais il faut pour cela que ce nombre soit bien défini et fini, ce qui est le cas lorsque les deux courbes sont en *position transverse* (si $\alpha(t_1) = \beta(t_2)$, alors il existe un homéo h envoyant un voisinage de $\alpha(t_1)$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^2$, tel que $h(\alpha(t_1 + \varepsilon)) = (\varepsilon, 0)$ et $h(\beta(t_2 + \varepsilon)) = (0, \varepsilon)$ pour tout ε assez petit).

La seconde qu'on utilisera consiste à se placer dans un revêtement intermédiaire $\widehat{S}$ entre S et $\widetilde{S}$ défini par la courbe fermée non séparante α : il s'agit du revêtement associé au sous groupe engendré par la classe d'une courbe α_0 dans $\pi_1(S)$, où α_0 est une courbe fermée simple intersectant α en un unique point. Il y a une manière très visuelle de construire ce revêtement : on découpe la surface S le long de α puis recolle un nombre infini de copies de la surface obtenue le long du bord nouvellement créé, comme sur la figure 6.

Notons que dans le cas du tore $S = \mathbf{T}^2$, la surface obtenue est tout simplement l'anneau $\mathbf{R} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

Les relevés $\tilde{\alpha}_i$ de α à $\widehat{S}$ sont indexés par $\mathbf{Z}$; ils découpent $\widehat{S}$ en des domaines fondamentaux notés $(S_j)_{j \in \mathbf{Z}}$. On peut alors relever $\beta : [0, 1] \rightarrow S$ en $\widehat{\beta} : [0, 1] \rightarrow \widehat{S}$. Il est alors assez facile de vérifier que si $\beta(0) \in S_j$, alors $\beta(1) \in S_{j+i(\alpha, \beta)}$ (le nombre d'intersection, c'est la différence des indices des domaines fondamentaux auxquels appartiennent les extrémités de $\widehat{\beta}$).

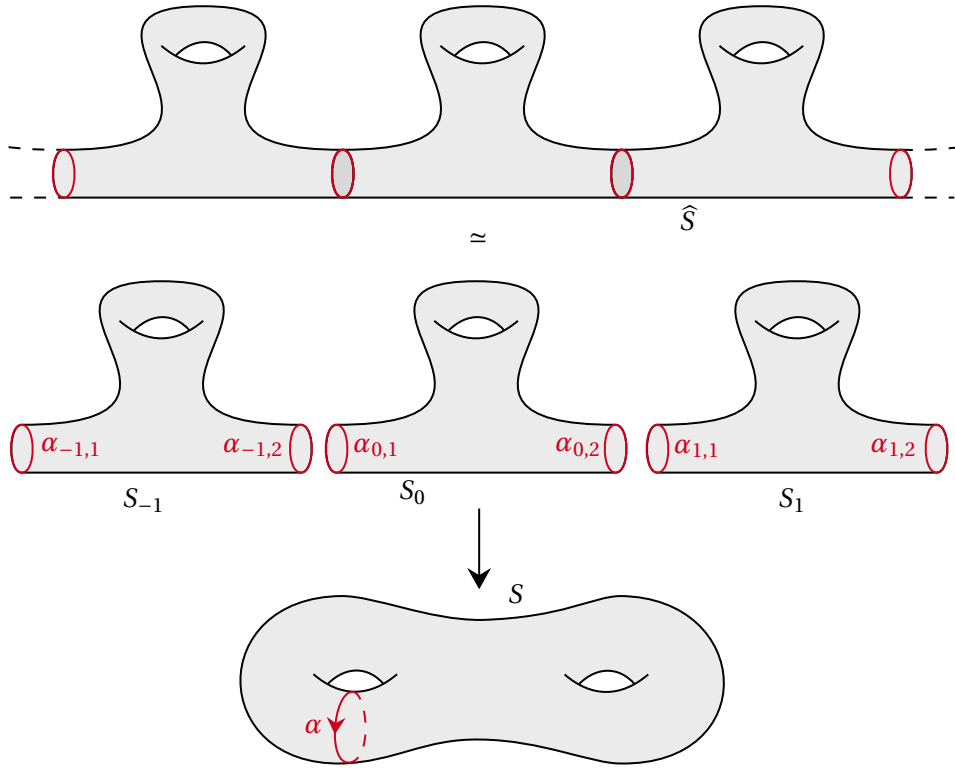
Ce point de vue permet de voir immédiatement que $i(\alpha, \beta)$ ne dépend que de la classe de β modulo homotopie fixant les extrémités. De plus, si α et α' sont deux courbes fermées simples non contractiles et non séparantes homotopes, alors on voit que pour toute courbe β ,

$$|i(\alpha, \beta) - i(\alpha', \beta)| \leq 1 + d_H(\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha'}),$$

où d_H désigne la distance de Hausdorff, et $\widehat{\alpha'}$ est un relevé de α' à $\widehat{S}$.

Cela implique le fait que les propriétés rotationnelles définies ci-dessus sont indépendantes du choix des α_i dans leur classe d'homotopie. En effet, choisissons une famille (α'_j) alternative à la famille (α_j) : pour tout j , la courbe α'_j est simple et homotope à la courbe α_j . On définit $\Delta_I'^n(x) = (i(I^{[0, n]}(x), \alpha'_j))_{1 \leq j \leq 2g}$. Ce qu'on vient d'obtenir montre le résultat suivant :

⁽¹⁾ Une courbe fermée simple sur S est dite *séparante* si son complémentaire n'est pas connexe.

FIGURE 6. Le revêtement $\hat{S}$ de S associé à la courbe fermée simple non séparante α .

Proposition 4.1. — Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in S$ et tout $n > 0$,

$$|\Delta_I^n(x) - \Delta_I'^n(x)| \leq \frac{C}{n}.$$

CHAPITRE 5

ENSEMBLE DE ROTATION DES MESURES ET DES MESURES ERGODIQUES

On a vu à la fin du chapitre 2 que les vitesses moyennes associées à un point x

$$\frac{\Delta_I^n(x)}{n}$$

n'ont pas de raison de converger lorsque n tend vers $+\infty$: on ne peut pas toujours associer un unique vecteur de rotation à un point. En revanche, il est possible d'associer un vecteur de rotation à une mesure f -invariante. On note $\mathcal{M}(f)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes invariantes par f , et $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(f)$ formé des mesures ergodiques pour f .

Définition 5.1. — Pour $f \in \text{Homeo}_0(S)$, I une isotopie de Id_S à f et $\mu \in \mathcal{M}(f)$, on définit le vecteur de rotation associé à μ par :

$$\rho_I(\mu) = \int_S \Delta_I^1(y) d\mu(y).$$

On définit les *ensembles de rotation des mesures et ergodique* par

$$\text{rot}_{\text{mes}}(I) = \{\rho_I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\},$$

$$\text{rot}_{\text{erg}}(I) = \{\rho_I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)\}.$$

Lemme 5.2. — *L'application*

$$\mathcal{M}(f) \ni \mu \mapsto \rho_I(\mu)$$

est affine et continue, et est indépendante du choix des courbes α_i dans leur classe d'homotopie libre.

Démonstration. — L'affinité est triviale.

Pour voir que la valeur de l'application est indépendante du choix des α_i , on remarque que par f -invariance de μ et le fait que Δ_I^n est un cocycle (9), on a

$$(14) \quad \rho_I(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_S \Delta_I^1(f^j(y)) d\mu(y) = \frac{1}{n} \int_S \Delta_I^n(y) d\mu(y).$$

Si on choisit une autre famille de courbes (α'_j) comme pour la Proposition 4.1, le résultat de cette proposition implique alors que le résultat obtenu est également $\rho_I(\mu)$.

La continuité utilise cette indépendance : pour avoir la continuité en une mesure μ , il peut utiliser le fait que l'ensemble des discontinuités de la fonction à valeurs discrète $x \mapsto \Delta_I^1(x)$ est de μ -mesure nulle. C'est vrai si les α_i sont de mesure nulle (théorème de Portemanteau), ce qu'on peut toujours supposer quitte à les modifier un peu. $\square$

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{M}(f)$ des mesures invariantes par f , muni de la topologie faible-*, est compact et convexe, et que l'ensemble de ses points extrémaux est égal à l'ensemble des mesures ergodiques. Ces faits, combinés au lemme 5.2, impliquent les propriétés suivantes :

Proposition 5.3. — *L'ensemble $\text{rot}_{\text{mes}}(I)$ est un sous-ensemble compact et convexe de $\mathbf{R}^{2g}$, et (notant extr l'ensemble des points extrémaux)*

$$\text{extr}(\text{rot}_{\text{mes}}(I)) \subset \text{rot}_{\text{erg}}(I) \subset \text{rot}_{\text{mes}}(I).$$

Exemple 5.4. — Nous avons déjà rencontré dans l'exemple 2.2 un homéo f_ϕ du tore dont l'ensemble de rotation est un intervalle (voir aussi la figure 1).

Chaque cercle horizontal $\mathbf{S}^1 \times \{y_0\}$ du tore est invariant par f_ϕ et porte donc une mesure ergodique que l'on note ν_{y_0} . On a également vu à l'exemple 2.2 que les fonctions Δ_I^n/n convergent uniformément vers la fonction $(x, y) \mapsto (\phi(y), 0)$. Ainsi, si (x, y_0) est un point ν_{y_0} -typique, alors $\rho(\nu_{y_0}) = \rho(x, y_0) = (\phi(y_0), 0)$. Cela étant valable pour toute ordonnée y_0 , on en déduit que $\text{rot}_{\text{erg}}(I) = \text{rot}(I)$ est un intervalle. En particulier, la première inclusion de la proposition 5.3 est stricte pour cet exemple.

Exemple 5.5. — La figure 7 montre un exemple d'homéo g du tore qui est le temps 1 d'un flot (ϕ^t) dont les orbites suivent un feuilletage de Reeb sur le tore. Ce feuilletage contient deux feuilles fermées distinctes (en vert sur la figure) $\mathbf{S}^1 \times \{0\}$ et $\mathbf{S}^1 \times \{1/2\}$ et des feuilles errantes. Notons que pour un flot, il y a une isotopie naturellement associée, donnée simplement par $I^t(x) = \phi^t(x)$.

On voit que tout point qui n'est pas dans une des deux feuilles fermées est non récurrent (et même errant) : il ne saurait être un point ν -typique pour une certaine mesure $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$. Ainsi, si $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ et (x, y) est ν -typique, alors $y \in \{0, 1/2\}$. Par le même raisonnement qu'à l'exemple 2.2, on a $\rho(x, y) = (1, 0)$ si $y = 0$ (on peut décider que les feuilles sont parcourues à vitesse 1) et $\rho(x, y) = (-1, 0)$ si $y = 1/2$.

Par conséquent, l'ensemble de rotation ergodique est formé de deux points distincts : $\text{rot}_{\text{erg}}(I) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Sur cet exemple, l'ensemble de rotation ergodique n'est ni convexe, ni même connexe. Cela montre que la seconde inclusion de la proposition 5.3 n'est en général pas une égalité.

On a le lien suivant entre le vecteur de rotation de la mesure et celui des points typiques :

Proposition 5.6. — *Pour $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ et ν -presque tout $x \in S$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_I^n(x)}{n} = \rho_I(\nu).$$

Plus généralement, pour $\mu \in \mathcal{M}(f)$, la vitesse moyenne $\Delta_I^n(x)/n$ converge pour μ -presque tout $x \in S$, et de plus

$$\rho_I(\mu) = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta_I^n(y)}{n} d\mu(y).$$

Démonstration. — La première partie de la proposition découle du théorème ergodique de Birkhoff appliqué à la fonction Δ_I^1 : par le fait que Δ_I^n est un cocycle (9), pour ν -presque tout $x \in S$ on a

$$\frac{\Delta_I^n(x)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_I^1(f^j(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_S \Delta_I^1(y) d\nu(y) = \rho_I(\nu).$$

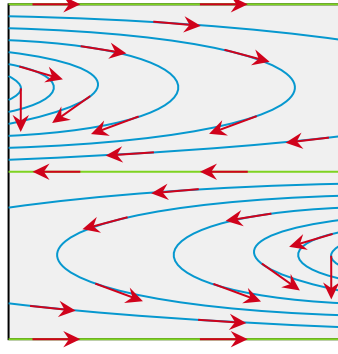


FIGURE 7. Homéo g du tore qui est le temps 1 d'un flot. Les orbites de ce flot suivent les lignes du feuilletage de Reeb (en bleu et en vert) et les parcourent à vitesse constante. Les orbites incluses dans les lignes bleues sont errantes tandis que celles incluses dans les deux cercles verts sont récurrentes (la restriction de g à chacun de ces cercles est une rotation).

Pour la seconde partie, le fait que $\Delta_I^n(x)/n$ converge pour μ -presque tout $x \in S$ est également une conséquence du théorème ergodique de Birkhoff. En utilisant (14), on voit que

$$\rho_I(\mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S \frac{\Delta_I^n(y)}{n} d\mu(y)$$

et on intervertit limite et intégrale par convergence dominée, autorisée par (10). $\square$

Ainsi, pour toute mesure f -invariante μ et μ -presque tout point $x \in S$, le vecteur de rotation de x est bien défini (voir la définition 1.3).

Le lien avec l'ensemble de rotation de Misiurewicz-Ziemian et celui des mesures est fait par la proposition suivante :

Proposition 5.7. — *On a notant conv l'enveloppe convexe,*

$$\begin{aligned} \text{rot}_{\text{erg}}(I) &\subset \text{rot}_{\text{pts}}(I) \subset \text{rot}(I), \\ \text{rot}_{\text{mes}}(I) &= \text{conv}(\text{rot}(I)) = \text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}}(I)). \end{aligned}$$

Démonstration. — La première propriété est une conséquence directe de la proposition 5.6 : si $r \in \text{rot}_{\text{erg}}(I)$, alors il existe $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ et x typique pour ν tel que $\rho_I(x) = r$. Mais en prenant $x_k = x$ et $n_k = k$ dans la définition 1.2, on voit que $r \in \text{rot}_{\text{pts}}(I)$.

Passons à la seconde égalité. Par la première inclusion et la proposition 5.3, on obtient que

$$\text{rot}_{\text{mes}}(I) = \text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}}(I)) \subset \text{conv}(\text{rot}(I)).$$

Démontrons l'autre inclusion. L'idée va être d'utiliser la méthode de Krylov-Bogolyubov. Soit $r \in \text{rot}(I)$. Alors il existe $(x_k) \in S^{\mathbb{N}}$ et $n_k \rightarrow +\infty$ tels que $\lim_k \Delta_I^{n_k}(x_k)/n_k = r$. Posons

$$\mu_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \delta_{f^j(x_k)}.$$

C'est une suite de mesures boréliennes de probabilité sur S , elle possède donc une sous-suite convergeant vers une mesure μ_{∞} . Par le théorème de Krylov-Bogolyubov, cette mesure

est f -invariante. De plus,

$$\begin{aligned}
 \rho_I(\mu_\infty) &= \int_S \Delta_I^1(y) d\mu_\infty(y) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_S \Delta_I^1(y) d\mu_k(y) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \Delta_I^1(f^j(x_k)) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \Delta_I^{n_k}(x_k) \\
 &= r.
 \end{aligned}$$

Cela démontre l'inclusion $\text{rot}(I) \subset \text{rot}_{\text{mes}}(I)$, et la convexité de $\text{rot}_{\text{mes}}(I)$ implique alors que $\text{conv}(\text{rot}(I)) \subset \text{conv}(\text{rot}_{\text{mes}}(I)) = \text{rot}_{\text{mes}}(I)$, ce qui démontre l'inclusion manquante. $\square$

Remarque 5.8. — Retenons une technique pratique : étant donné $r \in \text{rot}(I)$, la preuve qu'on vient de terminer explicite une mesure $\mu \in \mathcal{M}(f)$ telle que $\rho_I(\mu) = r$: c'est une valeur d'adhérence de la suite de mesures

$$\left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \delta_{f^j(x_k)} \right)_k.$$

On a des analogues aux propositions 3.3 et 3.4 au sujet des ensembles de rotation des itérés positifs comme négatifs :

Proposition 5.9. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$, I une isotopie reliant Id_S à f , et $q \in \mathbb{N}$. Alors :

- $\text{rot}_{\text{mes}}(I^q) = q \text{rot}_{\text{mes}}(I)$ et $\text{rot}_{\text{erg}}(I^q) = q \text{rot}_{\text{erg}}(I)$;
- $\text{rot}_{\text{mes}}(\bar{I}) = -\text{rot}_{\text{mes}}(I)$ et $\text{rot}_{\text{erg}}(\bar{I}) = -\text{rot}_{\text{erg}}(I)$.

Proposition 5.10. — Les ensembles de rotation des mesures et ergodiques sont des invariants dynamiques : pour $g \in \text{Homeo}_0(S)$, on a

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_{\text{mes}}(gIg^{-1}) &= \text{rot}_{\text{mes}}(I) \\
 \text{rot}_{\text{erg}}(gIg^{-1}) &= \text{rot}_{\text{erg}}(I).
 \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 5.9. — On démontre seulement la seconde égalité du premier point, les autres étant laissées en exercice.

Soit $q \geq 1$ et $\nu' \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f^q)$. On vérifie facilement que la mesure

$$\nu = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f_*^j \nu'$$

est f -invariante et ergodique. Alors, par l'affinité du vecteur de rotation,

$$\begin{aligned}
 \rho_I(\nu) &= \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \int_S \Delta_I^1(f^j(y)) d\nu'(y) \\
 &= \frac{1}{q} \int_S \Delta_I^q(y) d\nu'(y) \\
 (15) \quad &= \frac{1}{q} \int_S \Delta_{I^q}^1(y) d\nu'(y) \\
 &= \frac{1}{q} \rho_{I^q}(\nu').
 \end{aligned}$$

Cela implique l'inclusion $\text{rot}_{\text{erg}}(I^q) \subset q \text{rot}_{\text{erg}}(I)$.

Soit maintenant $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$. Alors la mesure ν est également f^q -invariante, mais il est possible qu'elle ne soit pas ergodique (par exemple, si ν est la mesure uniforme sur une orbite q -périodique). Néanmoins, il existe une mesure $\nu' \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f^q)$ telle que

$$\nu = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f_*^i \nu'.$$

En effet, par le théorème de décomposition ergodique [DGS76, section 13] appliqué à la mesure ν et l'application f^q , il existe une application définie ν -presque partout

$$y \mapsto \nu'_y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^{qj}(y)} \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f^q)$$

(où la limite est prise pour la topologie faible-*). Pour un point y qui est ν -typique (pour f), on a alors

$$\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f_*^i \nu'_y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nq} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{q-1} \delta_{f^{qj+i}(y)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \delta_{f^m(y)} = \nu.$$

On peut alors appliquer de nouveau le calcul (15) de la première inclusion, et obtenir l'autre inclusion $q \text{rot}_{\text{erg}}(I) \subset \text{rot}_{\text{erg}}(I^q)$. $\square$

Démonstration de la proposition 5.10. — L'équation (11) de la preuve de la proposition 3.3 assure qu'il existe une constante $C' > 0$ (indépendante de n) tel que pour tout $x \in S$,

$$(16) \quad \left\| \Delta_{gIg^{-1}}^n(x) - \Delta_I^n(g^{-1}(x)) \right\|_{\infty} \leq C'.$$

Par un calcul similaire à celui de l'équation (15), pour toute $\mu \in \mathcal{M}(f)$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\rho_I(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_S \Delta_I^1(f^j(y)) d\mu(y) = \frac{1}{n} \int_S \Delta_I^n(y) d\mu(y).$$

Remarquons que si $\mu \in \mathcal{M}(f)$, alors $g_*\mu \in \mathcal{M}(gf g^{-1})$. Ainsi, en appliquant (16) à $x = g(y)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\rho_I(\mu) - \rho_{gIg^{-1}}(g_*\mu)\| &= \frac{1}{n} \left\| \int_S \Delta_I^n(y) d\mu(y) - \int_S \Delta_{gIg^{-1}}^n(y) dg_*\mu(y) \right\| \\ &= \frac{1}{n} \left\| \int_S \Delta_I^n(y) d\mu(y) - \int_S \Delta_{gIg^{-1}}^n(g(y)) d\mu(y) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \int_S \left\| \Delta_I^n(y) - \Delta_{gIg^{-1}}^n(g(y)) \right\| d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{n} \int_S C' d\mu(y) = \frac{C'}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\rho_I(\mu) = \rho_{gIg^{-1}}(g_*\mu)$. Cela implique directement que $\text{rot}_{\text{mes}}(gIg^{-1}) = \text{rot}_{\text{mes}}(I)$. Pour la seconde égalité $\text{rot}_{\text{erg}}(gIg^{-1}) = \text{rot}_{\text{erg}}(I)$, il suffit de remarquer de plus que $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ si et seulement si $g_*\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(gf g^{-1})$. $\square$

CHAPITRE 6

UN PEU D'ALGÈBRE : DES DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES D'ENSEMBLE OU VECTEUR DE ROTATION

La définition d'ensemble de rotation met en jeu des propriétés « grossières » des itérés des points, en tous cas invariante par addition d'une quantité finie, puisqu'à la fin tout ce qui est fini sera tué par la division par les temps n_k . Cette souplesse permet des variations sur la définition d'ensemble de rotation : dans chaque contexte on pourra choisir la définition la plus pratique. Ce sera aussi l'occasion de démontrer que les définitions d'ensemble de rotation sont intrinsèques. Les définitions sont classées dans l'ordre décroissant d'importance pratique, le lecteur pressé pourra sauter les sections 6.3 et 6.4.

6.1. En refermant les segments d'orbites de l'isotopie

La définition de vecteur de rotation qu'on a donnée a le mérite d'être très intuitive et visuelle, mais le gros inconvénient de dépendre *a priori* du choix des courbes α_j utilisées pour mesurer les nombres d'intersection. On a déjà vu qu'on ne change pas les vecteurs de rotation en changeant les courbes α_j dans leur classe d'homotopie (proposition 4.1), on va voir maintenant (en suivant une idée de [Fra92]) comment faire en sorte que ces vecteurs de rotation soient définis de manière intrinsèque lorsqu'on les considère comme des éléments de l'homologie de la surface $H_1(S, \mathbf{R})$; cela permet entre autres de voir que la définition de vecteur de rotation est indépendante du choix de la base $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq 2g}$ de $\pi_1(S, x_0)$ (pour un point base x_0).

Pour cela, puisque l'homologie peut être vue comme des classes d'équivalence de lacets sur S , la première étape de la construction consiste à transformer un peu les trajectoires de l'isotopie pour obtenir des courbes fermées, dont on pourra par la suite considérer les classes en homologie.

Les courbes α_i choisies pour définir les vecteurs de rotation définissent un domaine fondamental D de la surface (autrement dit, le complémentaire de leur union est un disque topologique dont l'adhérence est dense).

Choisissons un point base $o \in D \subset S$, et pour tout $x \in S$ une courbe $\delta_x : [0, 1] \rightarrow S$ reliant o à x et incluse dans D : on demande que $\delta_x(0) = o$, $\delta_x(1) = x$ et que $\delta_x([0, 1]) \subset D$. On suppose de plus que l'application δ_x dépend mesurablement du point x . On note $\bar{\delta}_x : [0, 1] \rightarrow S$ le chemin inverse qui relie x à o : $\bar{\delta}_x(t) = \delta_x(1 - t)$.

Remarquons que pour tout j , tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on peut concaténer le chemin sous l'isotopie de x en temps n avec δ_x au départ et $\bar{\delta}_{f^n(x)}$ à l'arrivée sans changer le nombre

d'intersection avec α_j :

$$i(I^{[0,n]}(x), \alpha_j) = i(\bar{\delta}_{f^n(x)} I^{[0,n]}(x) \delta_x, \alpha_j);$$

en effet le long de ces deux chemins au départ et à l'arrivée on ne croise pas la courbe⁽¹⁾ α_j . Notant

$$(17) \quad \beta_I^n(x) = \bar{\delta}_{f^n(x)} I^{[0,n]}(x) \delta_x$$

la concaénation, on en déduit, par la définition (5) de $\Delta_I^n(x)$, que

$$(18) \quad \Delta_I^n(x) = (i(\beta_I^n(x), \alpha_j))_{1 \leq j \leq 2g}.$$

L'opération d'ajout de « petites » courbes avant et après celle de l'isotopie qu'on vient de faire produit courbe $\beta_I^n(x)$ qui est en fait un lacet : elle commence et termine en o .

Cela permet de passer à l'homologie. Pour un lacet γ de S , on note $[\gamma] \in H_1(S, \mathbf{R})$ sa classe en homologie. Rappelons que pour une surface fermée S de genre g , l'homologie $H_1(S, \mathbf{R})$ a une structure de $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension $2g$. On va utiliser la proposition suivante :

Proposition 6.1. — *Il existe une unique forme bilinéaire $\wedge$ sur $H_1(S, \mathbf{R})$ telle que pour tous lacets γ_1, γ_2 sur S , on a*

$$[\gamma_1] \wedge [\gamma_2] = i(\gamma_1, \gamma_2).$$

Cette forme est non dégénérée et alternée (et donc symplectique).

Idées de preuve. — Une manière expéditive mais algébrique de montrer cette proposition est d'utiliser la dualité de Poincaré pour transporter le *cup-product* de la cohomologie vers l'homologie.

On peut tout de même prouver cette proposition de manière élémentaire. Le fait que $i(\gamma_1, \gamma_2)$ est antisymétrique vient du fait que si, localement autour d'un point d'intersection, γ_2 traverse γ_1 de gauche à droite, alors γ_1 traverse γ_2 de droite à gauche.

Le fait que $i(\gamma_1, \gamma_2)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ_2 se voit facilement grâce au point de vue du paragraphe 4. Le fait que le nombre d'intersection est réel permet de quotienter par les commutateurs, cela implique que $i(\gamma_1, \gamma_2)$ ne dépend que de $[\gamma_2]$. En utilisant l'antisymétrie, on voit que $i(\gamma_1, \gamma_2)$ ne dépend aussi que de $[\gamma_1]$.

On voit également que par construction du nombre d'intersection algébrique, si γ_2 et γ'_2 sont basées au même point, alors leur concaténation $\gamma_2 \gamma'_2$ vérifie $i(\gamma_1, \gamma_2 \gamma'_2) = i(\gamma_1, \gamma_2) + i(\gamma_1, \gamma'_2)$. Cela assure la linéarité de i , et permet d'étendre le nombre d'intersection i à toute l'homologie $H_1(S, \mathbf{R})$ en une forme bilinéaire antisymétrique $\wedge$.

Reste à voir que cette forme est non dégénérée. Il suffit de le vérifier sur une base de $H_1(S, \mathbf{R})$, par exemple sur la famille $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq 2g}$: pour tout $1 \leq k \leq g$, on a $i(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}) = \pm 1$. $\square$

Considérons maintenant $r \in \text{rot}(I)$. Par définition, il existe $(x_k)_k \in S^{\mathbf{N}}$ et $(n_k)_k \rightarrow +\infty$ telles que $r = \lim_k \Delta_I^{n_k}(x_k)/n_k$. Notant $r = (r_j)_{1 \leq j \leq 2g}$, par (18), cela implique que

$$r_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} i(\beta_I^{n_k}(x_k), \alpha_j) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{[\beta_I^{n_k}(x_k)]}{n_k} \wedge [\alpha_j].$$

Puisque les applications $\cdot \wedge [\alpha_j]$ forment une base de $H_1(S, \mathbf{R})^*$, cela signifie que les éléments de l'homologie $[\beta_I^{n_k}(x_k)/n_k]$ convergent dans $H_1(S, \mathbf{R})$ vers un élément que l'on note $[r]$. Cet élément est tel pour tout $1 \leq j \leq 2g$, on a $[r] \wedge \alpha_j = r_j$: on a une correspondance bi-univoque

⁽¹⁾ Il faut faire un peu attention ici aux points de ∂D , mais ce problème est résolu en choisissant la courbe δ_x en fonction des choix d'indice faits pour les courbes qui commencent ou se terminent sur α_j .

entre $H_1(S, \mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^{2g}$ via la base $(\cdot \wedge [\alpha_j])_{1 \leq j \leq 2g}$ de $H_1(S, \mathbf{R})^*$. Cela permet de donner la définition suivante, équivalente à la définition 1.2 :

Définition 6.2. — L'ensemble de rotation $\text{rot}_{MZ}(I)$, noté aussi $\text{rot}(I)$, est défini par

$$\text{rot}(I) = \left\{ r \in H_1(S, \mathbf{R}) \mid \exists (x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty : \frac{[\beta_I^{n_k}(x_k)]}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r \right\}.$$

Par la suite on confondra ces deux définitions 1.2 et 6.2.

Indépendance du choix des courbes δ et du point base. — Les plus attentifs auront remarqué qu'on n'a fait que déplacer le problème : la définition précédente dépendait certes du choix des courbes α_i (ou de leurs classes d'homotopie), mais la nouvelle définition dépend elle de la famille $(\delta_x)_{x \in S}$ de courbes reliant chaque point x à un point base fixé o . On verra au paragraphe 6.3 une définition intrinsèque de vecteur de rotation qui permettra de régler ce problème directement, mais on peut déjà vérifier de manière élémentaire que les vecteurs de rotation obtenus ne dépendent pas de ces choix.

Choisissons donc un autre point base $o' \in S$, et pour tout $x \in S$ une autre courbe $\delta'_x : [0, 1] \rightarrow S$ reliant o' à x ; on suppose de plus qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in S$ et tout relevé $\tilde{\delta}'_x$ de δ'_x au revêtement universel $\tilde{S}$ de S , le diamètre de la courbe $\tilde{\delta}'_x$ est inférieur à C . On suppose cette constante C supérieure au diamètre du domaine fondamental D défini par les courbes α_i . Puisque $H_1(S, \mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension $2g$, il est muni d'une norme $\|\cdot\|$ et le choix d'une telle norme ne change pas la topologie; on peut de plus choisir cette norme telle que si $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ est un lacet et $\tilde{\alpha}$ est un relevé de α à $\tilde{S}$, alors $\|\alpha\| \leq \text{diam } \tilde{\alpha}$. Notant $\beta_I^n(x) = \tilde{\delta}'_{f^n(x)} I^{[0, n]}(x) \delta'_x$, on a

$$(19) \quad \|[\beta_I^n(x)] - [\beta_I^{n'}(x)]\| = \|\tilde{\delta}'_{f^n(x)} \delta_{f^n(x)} \tilde{\delta}'_x \delta'_x\| \leq 4C.$$

Ainsi,

$$\frac{[\beta_I^{n_k}(x_k)]}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r \iff \frac{[\beta_I^{n_k}(x_k)]}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r.$$

Pour ce qui est des vecteurs de rotation des mesures, rappelons que pour $\mu \in \mathcal{M}(f)$, on a (voir la définition 5.1)

$$\rho_I(\mu) = \int_S \Delta_I^1(y) d\mu(y),$$

et donc l'identification de $\mathbf{R}^{2g}$ avec $H_1(S, \mathbf{R})$ qu'on a faite et l'équation (18) donne

$$(20) \quad \rho_I(\mu) = \int_S [\beta_I^1(y)] d\mu(y).$$

De plus, on obtient le même résultat avec un autre choix $(\delta'_x)_x$ de courbes reliant chaque point x à un point base o' . En effet, en reprenant la preuve de la proposition 5.6, on voit que pour $\mu \in \mathcal{M}(f)$,

$$\rho_I(\mu) = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\beta_I^n(y)]}{n} d\mu(y).$$

Dans cette preuve, on a utilisé le fait que les lacets $\beta_I^n(x)$ forment un cocycle : pour $m, n \in \mathbf{N}$ et $x \in S$, on a la relation

$$\beta_I^{m+n}(x) = \beta_I^m(f^n(x)) \beta_I^n(x).$$

Par (19), on en déduit que

$$\rho_I(\mu) = \int_S \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\beta_I^n(y)]}{n} d\mu(y),$$

et en utilisant de nouveau la preuve de la proposition 5.6, on en déduit que

$$\rho_I(\mu) = \int_S [\beta_I^1(y)] d\mu(y).$$

Action des homéos par conjugaison. — On a vu plus tôt que l'ensemble de rotation est invariant par conjugaison dans $\text{Homeo}_0(S)$. Voyons ce qu'il se passe quand on conjugue par un homéo qui n'est pas forcément isotope à l'identité.

Proposition 6.3. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$, I une isotopie reliant Id_S à f , et $g \in \text{Homeo}(S)$. Alors

$$\text{rot}(gIg^{-1}) = g_* \text{rot}(I),$$

où g_* désigne l'action de g sur l'homologie $H_1(S, \mathbf{R})$.

Démonstration. — Choisissons $o \in S$ un point base et $(\delta_x)_{x \in S}$ un système de courbes telles que pour tout $x \in S$, la courbe δ_x relie o à x . On suppose également, comme au dessus, que la longueur des relevés des courbes δ_x au revêtement universel est uniformément bornée.

Posons pour plus de simplicité $g^{-1}(x) = y$. Alors

$$g(\bar{\delta}_{f^n(y)} I^{[0,n]}(y) \delta_y) = g(\bar{\delta}_{f^n(y)}) g(I^{[0,n]}(y)) g(\delta_y),$$

donc en prenant les classes d'homologie

$$g_* \left(\frac{1}{n} [\bar{\delta}_{f^n(y)} I^{[0,n]}(y) \delta_y] \right) = \frac{1}{n} \left[g(\bar{\delta}_{f^n(y)}) \cdot (gIg^{-1})^{[0,n]}(g(y)) \cdot g(\delta_y) \right].$$

Si $r \in \text{rot}(I)$, il existe $(y_k)_k \in S^{\mathbf{N}}$ et $n_k \rightarrow +\infty$ tels que

$$r = \lim_k \frac{1}{n_k} [\bar{\delta}_{f^{n_k}(y_k)} I^{[0,n_k]}(y_k) \delta_{y_k}],$$

donc par l'équation ci-dessus on a

$$(21) \quad g_*(r) = \lim_k \frac{1}{n_k} \left[g(\bar{\delta}_{f^{n_k}(y_k)}) \cdot (gIg^{-1})^{[0,n_k]}(g(y_k)) \cdot g(\delta_{y_k}) \right].$$

Mais le système de courbes $(g(\delta_{g^{-1}(x)}))_x$ vérifie que pour tout $x \in S$, la courbe $g\delta_{g^{-1}(x)}$ relie $g(o)$ à x ; de plus $g(\bar{\delta}_{g^{-1}(g f^{n_k} g^{-1}(x))}) = g(\bar{\delta}_{f^{n_k} g^{-1}(x)})$: les courbes à gauche de la dernière équation centrée sont bien obtenues en prenant des inverses de courbes du système $(g(\delta_{g^{-1}(x)}))_x$. On vient de voir que l'ensemble de rotation ne dépend pas du système de courbes choisi, on peut donc choisir le système $(g(\delta_{g^{-1}(x)}))_x$, ce qui implique que le membre de droite de (21) est un élément de $\text{rot}(gIg^{-1})$. On vient de montrer que $g_* \text{rot}(I) \subset \text{rot}(gIg^{-1})$. L'autre inclusion se démontre de manière similaire, ce qui prouve l'égalité. $\square$

6.2. Par les différents domaines fondamentaux visités par l'orbite sous $\tilde{f}$ et la réduction de $\mathcal{G}$ en homologie

Une autre définition, très similaire à la précédente, peut s'obtenir en utilisant les différents relevés d'un domaine fondamental au revêtement universel $\tilde{S}$ de la surface S . Rappelons que $\mathcal{G}$ est le groupe d'automorphismes du revêtement $\tilde{S} \rightarrow S$.

Relevons le domaine fondamental D à $\tilde{S}$: on obtient un ensemble connexe par arcs $\tilde{D}$ tel que

$$\bigcup_{T \in \mathcal{G}} TD = \tilde{S} \quad \text{et} \quad \forall g \in \mathcal{G} \setminus \{\text{Id}\}, \text{int}(D) \cap T \text{int}(D) = \emptyset.$$

Rappelons qu'on a des projections

$$\mathcal{G} \longrightarrow \pi_1(S) \longrightarrow H_1(S, \mathbf{R}),$$

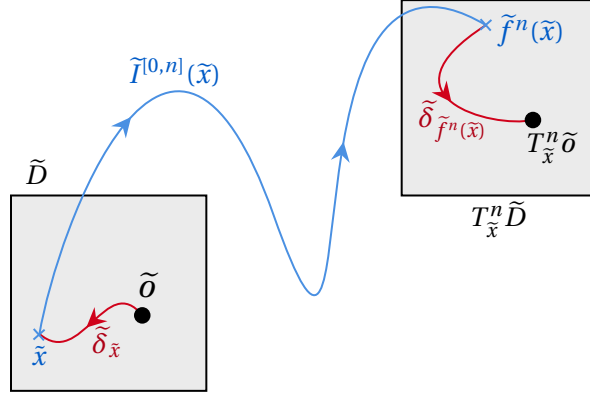


FIGURE 8. Le chemin $\tilde{\beta}_I^n(x)$ est la concaténation $\tilde{\delta}_{\tilde{f}^n(\tilde{x})} \tilde{I}^{[0,n]}(\tilde{x}) \tilde{\delta}_{\tilde{x}}$. L'automorphisme de revêtement $T_{\tilde{x}}^n \in \mathcal{G}$ est caractérisé par le fait que $\tilde{f}^n(\tilde{x}) \in T_{\tilde{x}}^n \tilde{D}$.

où l'application composée est donnée par $T \mapsto [\alpha]$, où $\tilde{\alpha}$ est n'importe quel chemin reliant un point $\tilde{x} \in \tilde{S}$ à $T\tilde{x}$, α est le lacet sur S obtenu par projection de $\tilde{\alpha}$ et $[\alpha]$ est la classe d'homologie du lacet α . Cette application permet de considérer la classe $[g] \in H_1(S, \mathbf{R})$ d'un élément de $\mathcal{G}$.

Considérons, comme au Paragraphe 6.1, un point base $o \in D$ et des chemins $(\delta_x)_{x \in S}$ tels que pour tout $x \in S$, $\delta_x : [0, 1] \rightarrow S$ est un chemin reliant o à x . On note $\tilde{o} \in \tilde{S}$ le relevé de o appartenant à $\tilde{D}$. Rappelons que pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbf{N}$, la concaténation $\beta_I^n(x) = \bar{\delta}_{f^n(x)} I^{[0,n]}(x) \delta_x$ est un lacet basé en o , on peut donc le relever en un chemin $\tilde{\beta}_I^n(x)$ reliant $\tilde{o}$ à un autre relevé $T_{\tilde{x}}^n \tilde{o}$ de o , où $T_{\tilde{x}}^n \in \mathcal{G}$. La discussion précédente implique que $[T_{\tilde{x}}^n] = [\beta_I^n(x)]$.

On va caractériser l'automorphisme de revêtement $T_{\tilde{x}}^n$ sans passer par les courbes $\beta_I^n(x)$ (voir la figure 8). Relevons l'isotopie I en une isotopie $\tilde{I}$ de $\tilde{S}$, ce qui permet de parler du relevé $\tilde{f} = \tilde{I}^1$ de f à $\tilde{S}$ associé à I . Pour $x \in S$, considérons le relevé $\tilde{\delta}_{\tilde{x}}$ qui relie $\tilde{o}$ à un relevé $\tilde{x} \in \tilde{D}$ de x . Alors $\tilde{I}^{[0,n]}(\tilde{x})$ est un chemin reliant $\tilde{x}$ à $\tilde{f}^n(\tilde{x})$. Enfin, $\tilde{\delta}_{\tilde{f}^n(\tilde{x})}$ est un relevé de $\delta_{f^n(x)}$ reliant $\tilde{f}^n(\tilde{x})$ à un relevé de o . On vient juste de relever la concaténation $\beta_I^n(x) = \bar{\delta}_{f^n(x)} I^{[0,n]}(x) \delta_x$ en $\tilde{\beta}_I^n(x) = \tilde{\delta}_{\tilde{f}^n(\tilde{x})} \tilde{I}^{[0,n]}(\tilde{x}) \tilde{\delta}_{\tilde{x}}$. Puisque les chemins $\tilde{\delta}_{\tilde{f}^n(\tilde{x})}$ et $\tilde{\delta}_{\tilde{x}}$ sont inclus dans respectivement $\tilde{D}$ et $T_{\tilde{x}}^n \tilde{D}$, on voit que $T_{\tilde{x}}^n \in \mathcal{G}$ est un automorphisme de revêtement tel que

$$(22) \quad \tilde{f}^n(\tilde{x}) \in T_{\tilde{x}}^n \tilde{D}.$$

Notons que le choix d'un tel automorphisme est unique à moins que $\tilde{f}^n(\tilde{x}) \in \partial(T_{\tilde{x}}^n \tilde{D})$.

Ce qu'on vient de faire démontre le résultat suivant :

Proposition 6.4. — *Les ensembles de rotation $\text{rot}(I)$, $\text{rot}_{\text{mes}}(I)$ et $\text{rot}_{\text{erg}}(I)$, ainsi que les vecteurs de rotation $\rho_I(\mu)$ pour $\mu \in \mathcal{M}(f)$, ne dépendent que de $\tilde{f} = \tilde{I}^1$. On pourra donc écrire $\text{rot}(\tilde{f})$, $\text{rot}_{\text{mes}}(\tilde{f})$, $\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})$ et $\rho_{\tilde{f}}(\mu)$.*

De plus, si $S \neq \mathbf{T}^2$ (autrement dit si S est de genre $g \geq 2$), alors ces quantités ne dépendent que de f . On pourra donc écrire $\text{rot}(f)$, $\text{rot}_{\text{mes}}(f)$, $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ et $\rho_f(\mu)$.

Notons que la dernière partie de la proposition implique qu'en genre $g \geq 2$, la notion de point fixe contractile ne dépend que de f (on parlera donc de point fixe contractile pour f et non pour $\tilde{f}$).

Démonstration. — La première partie de l'énoncé découle de la discussion précédent la proposition.

Pour la seconde partie, on remarque que si deux isotopies I, I' entre Id_S et f sont homotopes entre elles, alors les relevés de f à $\tilde{S}$ associés à ces deux isotopies sont identiques (il suffit de relever cette homotopie d'isotopies à $\tilde{S}$, qui induit un chemin continu de relevés de f , qui est donc constant); autrement dit les ensembles et vecteurs de rotation associés à ces deux isotopies sont identiques. Mais un théorème de Hamstrom [Ham66] (voir aussi [FM12]) affirme que si S est une surface fermée de genre $g \geq 2$, alors $\text{Homeo}_0(S)$ est contractile, et donc que deux chemins dans cet ensemble ayant mêmes extrémités sont homotopes : toutes les isotopies entre Id_S et f sont alors homotopes, et donc il n'y a qu'un seul relevé de f à $\tilde{S}$ induit par une isotopie. $\square$

Remarque 6.5. — Dans le cas $S = \mathbf{T}^2$, deux relevés de f diffèrent d'une translation entière. Autrement dit, si $\tilde{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est un relevé de f , alors tous les autres relevés de f sont de la forme $\tilde{f} + v$, avec $v \in \mathbf{Z}^2$. De plus, on voit facilement que $\text{rot}(\tilde{f} + v) = \text{rot}(\tilde{f}) + v$: les ensembles de rotation de deux relevés différents de f diffèrent d'une translation entière. Ainsi, l'ensemble $\text{rot}(f)$ est bien défini lorsqu'on quotiente par les translations entières, autrement dit lorsqu'on se place sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)/\sim$, où $A \sim B$ s'il existe $v \in \mathbf{Z}^2$ tel que $A = B + v$. Attention : l'espace $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2)/\sim$ est différent de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2)$, par exemple les classes de $[-2, 2]^2$ et $[-1, 1]^2$ sont différentes mais ont la même projection sur $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

Par la suite, si $S = \mathbf{T}^2$ et si la propriété dont on parle concernant $\text{rot}(\tilde{f})$ est invariante par translation entière, on pourra se permettre d'omettre le relevé de f et de parler de la propriété de $\text{rot}(f)$.

6.3. Par la dualité homologie/cohomologie

On donne enfin (enfin!) une définition abstraite, qui a l'avantage d'être intrinsèque, des vecteurs et des ensembles de rotation. Celle-ci passe par la dualité homologie/cohomologie. On fait ici le choix de voir la cohomologie de S à coefficients réels $H^1(S, \mathbf{R})$ comme l'ensemble des 2-formes fermées sur S quotienté par l'ensemble des 2-formes exactes sur S . D'autres auteurs préfèrent la définir à partir des classes d'isotopie d'applications continues à valeurs dans le cercle, on renvoie aux références [Pol92, Mat97] pour plus de détails.

Commençons par le vecteur de rotation d'une mesure invariante $\mu \in \mathcal{M}(f)$. L'application d « de de Rham » de $H_1(S, \mathbf{R})$ vers le dual algébrique $(H^1(S, \mathbf{R}))^*$, qui à $\alpha \in H_1(S, \mathbf{R})$, associe la forme linéaire $\omega \mapsto \int_\alpha \omega$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels (exercice : vérifier que cette application est bien définie et bijective). En particulier, en utilisant la caractérisation (20),

$$d(\rho_I(\mu)) = \left(\omega \mapsto \int_S \left(\int_{\beta_I^1(y)} \omega \right) d\mu(y) \right).$$

Or (en utilisant (17)),

$$\int_{\beta_I^1(y)} \omega = \int_{\delta_{f(y)}} \omega + \int_{I^{[0,1]}(y)} \omega + \int_{\delta_y} \omega,$$

donc (on utilise le fait que μ est f -invariante à la dernière ligne)

$$\begin{aligned} d(\rho_I(\mu))(\omega) &= \int_S \left(\int_{I(y)} \omega \right) d\mu(y) + \int_S \left(\int_{\bar{\delta}_{f(y)}} \omega + \int_{\delta_y} \omega \right) d\mu(y) \\ &= \int_S \left(\int_{I(y)} \omega \right) d\mu(y) + \int_S \left(- \int_{\delta_{f(y)}} \omega + \int_{\delta_y} \omega \right) d\mu(y) \\ &= \int_S \left(\int_{I(y)} \omega \right) d\mu(y). \end{aligned}$$

On vient de démontrer la caractérisation suivante :

Proposition 6.6. — *Le vecteur de rotation $\rho_I(\mu)$ de la mesure μ est l'élément de $H_1(S, \mathbf{R})$ caractérisé par l'égalité*

$$d(\rho_I(\mu)) = \left(\omega \mapsto \int_S \left(\int_{I(y)} \omega \right) d\mu(y) \right).$$

La lectrice attentive aura remarqué le caractère intrinsèque de cette caractérisation : la définition ne dépend plus d'aucun choix.

Exercice 6.7. — Utiliser le théorème de Birkhoff pour montrer que si $\nu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, alors pour ν -presque tout $x \in S$ et tout $\omega \in H^1(S, \mathbf{R})$, on a

$$d(\rho_I(\mu))(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{I^{[0,n]}(x)} \omega.$$

Plus généralement, on a la caractérisation intrinsèque suivante :

Proposition 6.8. — *On a*

$$\text{rot}(I) = \left\{ \rho \in H_1(S, \mathbf{R}) \left| \begin{array}{l} \exists (x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty : \forall \omega \in H^1(S, \mathbf{R}), \\ d(r)(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{I^{[0,n_k]}(x_k)} \omega \end{array} \right. \right\}.$$

Démonstration. — On se base sur la définition 6.2 : $\rho \in H_1(S, \mathbf{R})$ si et seulement s'il existe $(x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty$ tels que

$$r = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\beta_I^{n_k}(x_k)}{n_k}.$$

Par conséquent, pour tout $\omega \in H^1(S, \mathbf{R})$, on a

$$d(r)(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{\beta_I^{n_k}(x_k)} \omega.$$

Par le même calcul qu'à la page précédente, on voit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{\beta_I^{n_k}(x_k)} \omega = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{I^{[0,n_k]}(x_k)} \omega$$

(les intégrales induites par $\bar{\delta}_{f^n(x)}$ et δ_x sont uniformément bornées et donc tuées par le facteur $1/n_k$), si bien que

$$d(r)(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{I^{[0,n_k]}(x_k)} \omega.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $(x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty$ tels que pour tout $\omega \in H^1(S, \mathbf{R})$, on a

$$d(r)(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{I^{[0,n_k]}(x_k)} \omega.$$

Le calcul précédent reste valable :

$$d(r)(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \int_{\beta_I^{n_k}(x_k)} \omega.$$

Cette égalité est vraie en particulier pour ω dans une base de $H^1(S, \mathbf{R})$, cela montre que la suite $(\beta_I^{n_k}(x_k)/n_k)_k$ d'éléments de $H_1(S, \mathbf{R})$ converge contre une base de son dual, et donc converge (on est en dimension finie) et même converge vers r . $\square$

6.4. Via un ouvert de carte et l'application de premier retour (cas d'une mesure)

Voici une dernière caractérisation des vecteurs de rotation des mesures f -invariantes, qui peut être utile dans certains cas.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(f)$ et $U \subset S$ un disque topologique ouvert (ou, de manière équivalente, un domaine simplement connexe) tel que $\mu(U) > 0$. On note $\varphi_U : U \rightarrow U$ l'application de premier retour de f dans U et $\tau_U : U \rightarrow \mathbf{N} \setminus \{0\}$ le temps de premier retour. Ces fonctions sont définies μ -presque partout sur U . Le lemme de Kac [Kac47] affirme que φ_U préserve la mesure $\mu|_U$, que τ_U est $\mu|_U$ -intégrable et que, de plus,

$$\int_U \tau_U d\mu = \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} f^k(U)\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} f^k(U)\right).$$

Appelons μ_U la mesure de probabilité normalisée $\mu|_U/\mu(U)$. On aura également besoin d'une famille de chemins qui serviront à refermer des courbes (on commence à en avoir l'habitude) : on choisit un point base $o \in U$ et, pour tout $x \in U$, un chemin $\delta_x : [0, 1] \rightarrow U$ reliant o à x . On construit une application « rotation au premier retour » $\rho_U : U \rightarrow H_1(S, \mathbf{Z})$, définie μ_U presque partout, comme suit : si $\varphi_U(x)$ est bien défini, on pose

$$\rho_U(x) = [\bar{\delta}_{\varphi_U(x)} I^{[0, \tau_U(x)]}(x) \delta_x].$$

Le lecteur aura remarqué que que la classe d'homologie $[\bar{\delta}_{\varphi_U(x)} I^{[0, \tau_U(x)]}(x) \delta_x]$ est indépendante des choix des chemins δ_x .

On voit facilement que l'application ρ_U/τ_U est uniformément bornée sur U et par conséquent que ρ_U est μ_U -intégrable. Ainsi, par le théorème de Birkhoff, il existe des fonctions μ_U -intégrables $\rho_U^* : U \rightarrow H_1(S, \mathbf{R})$ et $\tau_U^* : U \rightarrow [1, +\infty[$ telles que pour μ_U -presque tout $x \in S$,

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U(\varphi_U^k(x)) = \rho_U^*(x), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^k(x)) = \tau_U^*(x).$$

La proposition suivante relie ces quantités au vecteur de rotation :

Proposition 6.9. — Pour μ_U -presque tout point x , on a

$$\rho_I(x) = \frac{\rho_U^*(x)}{\tau_U^*(x)}.$$

Démonstration. — Par (23), on a

$$\frac{\rho_U^*(x)}{\tau_U^*(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_U(\varphi_U^k(x))}{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^i(x))}.$$

La somme du numérateur est télescopique, ce qui permet de reconnaître la définition (17) de $\beta_I^{\tau_U^n(x)}(x)$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \rho_U(\varphi_U^k(x)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{\delta}_{\varphi_U^{k+1}(x)} I^{[0, \tau_U(\varphi_U^k(x))]}(\varphi_U^k(x)) \delta_{\varphi_U^k(x)} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{\delta}_{\varphi_U^{k+1}(x)} I^{[\sum_{i=0}^{k-1} \tau_U(\varphi_U^i(x)), \sum_{i=0}^k \tau_U(\varphi_U^i(x))]}(x) \delta_{\varphi_U^k(x)} \right] \\
 &= \left[\bar{\delta}_{\varphi_U^n(x)} I^{[0, \sum_{i=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^i(x))]}(x) \delta_x \right] \\
 &= \beta_I^{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^i(x))}(x),
 \end{aligned}$$

et la proposition 5.6 implique que

$$\frac{\rho_U^*(x)}{\tau_U^*(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_I^{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^i(x))}(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} \tau_U(\varphi_U^i(x))} = \rho_I(x).$$

□

Les gourmandes de définitions équivalentes pourront consulter [Pol92] où est étudiée (encore) une autre définition équivalente d'ensemble de rotation.

Ajouter le
revêtement
abélien?
Boyland,
top. mé-
thods

PARTIE II

LE CAS DU TORE

CHAPITRE 7

L'ESSENTIEL SUR L'ENSEMBLE DE ROTATION DANS LE TORE

7.1. Convexité de l'ensemble de rotation, et une caractérisation équivalente de plus

On montre ici que pour le tore, les ensembles de rotation sont convexes. Attention : cette propriété est fautive en genre plus grand, voir l'exemple de Matsumoto illustré à la figure 26. La preuve donnera aussi, au passage, le fait que les itérés d'un domaine fondamental, correctement renormalisés, convergent au sens de Hausdorff vers l'ensemble de rotation.

En choisissant pour α_1 et α_2 les projetés des droites $\{0\} \times \mathbf{R}$ et $\mathbf{R} \times \{0\}$, on voit que la définition (2) de $\Delta_f^n(x)$ peut se réécrire dans le cas du tore

$$\Delta_f^n(x) = \Delta_{\tilde{f}}^n(x) = \begin{pmatrix} \lfloor (\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x})_1 \rfloor \\ \lfloor (\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x})_2 \rfloor \end{pmatrix},$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière, et $(\cdot)_i$ la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. Ainsi, $\Delta_{\tilde{f}}^n(x)$ et $\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}$ ne diffèrent l'un de l'autre que d'un vecteur de norme euclidienne $\leq \sqrt{2}$. En utilisant l'équation (3), cela permet d'écrire :

$$\text{rot}(\tilde{f}) = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} D_n(\tilde{f}),$$

où

$$(24) \quad D_n(\tilde{f}) = \left\{ \frac{1}{n} (\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in [0, 1]^2 \right\} = \left\{ \frac{1}{n} (\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}) \mid \tilde{x} \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Un petit calcul montre que

$$(25) \quad d_H\left(D_n(\tilde{f}), \frac{1}{n} \tilde{f}^n([0, 1]^2)\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{n},$$

ce qui implique que

$$\text{rot}(\tilde{f}) = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \frac{1}{n} \tilde{f}^n([0, 1]^2).$$

Voici le théorème qui a en quelque sorte lancé la théorie de la rotation sur les surfaces, il est dû à Michał Misiurewicz et Krystyna Ziemian :

Théorème 7.1 ([MZ90]). — Pour $S = \mathbf{T}^2$, l'ensemble de rotation est convexe. De plus, la suite de compacts

$$\frac{1}{n} \tilde{f}^n([0, 1]^2)$$

converge vers $\text{rot}(\tilde{f})$ pour la distance de Hausdorff sur l'espace des compacts du plan.

Problème 7.2. — A-t-on également

$$\text{rot}(\tilde{f}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n} \Delta_{\tilde{f}}^n(x) \mid x \in S \right\}$$

en genre plus grand?

Une partie D du plan est dite q -convexe si son enveloppe convexe est incluse dans $V_q(D)$. Ça revient à demander que $d_H(D, \text{conv}(D)) \leq q$. Le lemme clé pour la preuve du théorème est le suivant.

Lemme 7.3. — Soit D une partie connexe par arcs du plan qui se projette injectivement dans le tore. Alors D est $\sqrt{2}$ -convexe.

Remarquons que l'hypothèse de projection injective revient à demander que D soit disjoint de tous ses translatés entiers. La constante $\sqrt{2}$ vient du fait suivant : Pour tout demi-disque fermé A de rayon $\sqrt{2}$, privé de son diamètre, tout point $z \in \mathbb{R}^2$ a au moins un translaté entier $z + (p, q)$ dans A . En effet, un tel demi-disque contient un quart de disque de même rayon avec un bord vertical et un bord horizontal, qui lui-même contient un carré semi-ouvert de côté 1.

Commençons par la preuve du théorème, on prouvera le lemme ensuite. On utilisera le petit lemme suivant :

Lemme 7.4. — Pour tout $m \geq 1$, on a $\text{rot}(\tilde{f}) \subset \text{conv}(D_m(\tilde{f}))$.

Démonstration. — En utilisant la proposition 3.4, et en remarquant que $D_m(\tilde{f}) = \frac{1}{m} D_1(\tilde{f}^m)$, on est ramenés à montrer que $\text{rot}(\tilde{f}^m) = m \text{rot}(\tilde{f}) \subset \text{conv}(D_1(\tilde{f}^m))$: on peut se contenter de démontrer le cas $m = 1$. Par définition, pour tout $r \in \text{rot}(\tilde{f})$, il existe une suite $(x_k)_k \in (\mathbb{T}^2)^\mathbb{N}$ et une suite de temps $(n_k)_k$ tendant vers $+\infty$ tels que

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} (\tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_k) - \tilde{x}_k)$$

qu'on réécrit sous forme de série télescopique :

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (\tilde{f}^{i+1}(\tilde{x}_k) - \tilde{f}^i(\tilde{x}_k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} (\tilde{f} - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})(\tilde{f}^i(\tilde{x}_k)).$$

Le dernier terme est un barycentre des termes de la somme, qui sont tous dans $D_1(\tilde{f})$, ce qui démontre que $\text{rot}(\tilde{f}) \subset \overline{\text{conv}(D_1(\tilde{f}))}$. On conclut par théorème de Carathéodory sur les enveloppes convexes de compacts en dimension finie, qui assure que $\overline{\text{conv}(D_1(\tilde{f}))} = \text{conv}(D_1(\tilde{f}))$. $\square$

On utilisera également la propriété suivante, laissée en exercice :

Exercice 7.5. — L'application conv est croissante pour l'inclusion et 1-lipschitzienne pour la distance de Hausdorff d_H .

Preuve du théorème 7.1. — Voilà enfin la preuve du théorème. D'une part, par la définition de $\overline{\lim}_H$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $m \geq M$, on a l'inclusion

$$(26) \quad D_m(\tilde{f}) \subset V_\varepsilon(\text{rot}(\tilde{f})).$$

D'autre part, le lemme 7.4 affirme que

$$(27) \quad \text{rot}(\tilde{f}) \subset \text{conv}(D_m(\tilde{f})).$$

Par la majoration (25) de la distance de Hausdorff puis l'exercice 7.5, on a les inclusions

$$\text{conv}(D_m(\tilde{f})) \subset \text{conv}\left(V_{\sqrt{2}/m}\left(\frac{1}{m} \tilde{f}^m([0, 1]^2)\right)\right) \subset V_{\sqrt{2}/m}\left(\text{conv}\left(\frac{1}{m} \tilde{f}^m([0, 1]^2)\right)\right).$$

Mais l'ensemble $\tilde{f}^m([0, 1]^2)$ est un domaine fondamental de $\mathbf{Z}^2$, plus particulièrement $\tilde{f}^m([0, 1]^2)$ se projette injectivement sur $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. On peut donc appliquer le lemme 7.3 :

$$\text{conv}(\tilde{f}^m([0, 1]^2)) \subset V_{\sqrt{2}}(\tilde{f}^m([0, 1]^2)),$$

si bien que

$$\text{conv}(D_m(\tilde{f})) \subset V_{2\sqrt{2}/m}\left(\frac{1}{m}\tilde{f}^m([0, 1]^2)\right),$$

et en utilisant de nouveau (25),

$$\text{conv}(D_m(\tilde{f})) \subset V_{3\sqrt{2}/m}(D_m(\tilde{f})).$$

Faisons le bilan : en combinant ce qu'on vient d'obtenir avec (26) et (27), on a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout m assez grand :

$$\text{rot}(\tilde{f}) \subset \text{conv}(D_m(\tilde{f})) \subset V_{3\sqrt{2}/m}(D_m(\tilde{f})) \subset V_{3\sqrt{2}/m+\varepsilon}(\text{rot}(\tilde{f})).$$

Cela montre d'une part que $D_m(\tilde{f})$ converge vers $\text{rot}(\tilde{f})$ au sens de Hausdorff (et donc, par (25), que $\frac{1}{n}\tilde{f}^n([0, 1]^2)$ converge vers $\text{rot}(\tilde{f})$ au sens de Hausdorff), et d'autre part que $\text{rot}(\tilde{f})$ est convexe car c'est la limite de Hausdorff des ensembles convexes $\text{conv}(D_m(\tilde{f}))$. $\square$

Preuve du lemme 7.3. — La preuve est illustrée par la figure 9. La preuve originale de [MZ90] se basait sur une astuce attribuée à Douady et basée sur un calcul d'indice, je présente ici une preuve un peu plus élémentaire.

Soit $x \in \text{conv}(D)$. On va montrer que la boule $B(x, \sqrt{2})$ rencontre D . Considérons l'ensemble des directions θ telles que la demi-droite issue de x , de direction θ , rencontre D . Il s'agit d'une partie compacte et connexe du cercle, qui doit contenir un demi-cercle, sans quoi il existerait une droite séparant x de D . On peut donc choisir $a, b \in D$ tels que $x \in [a, b]$ (voir aussi [HUL01, théorème 1.3.7 p. 30]). Par connexité (par arcs) il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

On montre maintenant que quitte à raccourcir γ et à changer a, b , on peut supposer que :

- (*) γ ne rencontre la droite (ab) qu'à ses extrémités : il existe $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ tels que $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in (ab)$ (la droite portée par le segment $[a, b]$), $x \in [\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$ et pour tout $t \in]t_1, t_2[, \gamma(t) \notin (ab)$.

Pour montrer cette propriété, on oriente la droite (ab) telle que $a < b$ (et donc $a < x < b$). On pose $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \leq x\}$. Puisque l'ensemble est fermé et non vide (0 est dedans), on a bien $\gamma(t_1) \in (ab)$ et $\gamma(t_1) < x$ (égalité stricte car $x \notin D$). On considère alors $t_2 = \inf\{t \in [t_1, 1] \mid \gamma(t) \in (ab), \gamma(t) \geq x\}$. De nouveau, l'inf est un min, $\gamma(t_2) \in (ab)$ et $\gamma(t_2) > x$. Cela implique que $t_1 < t_2$. Supposons qu'il existe $t \in]t_1, t_2[$ tel que $\gamma(t) \in (ab)$. Le fait que $t < t_1$ implique que $\gamma(t) > x$. Donc par définition de t_2 , on a $\gamma(t) \geq t_2$, contradiction. On a bien la propriété souhaitée.

Quitte à tourner le dessin on peut supposer que (ab) est une droite horizontale, et que γ est en dessous de (ab) (sans oublier que ceci « tourne » aussi le réseau $\mathbf{Z}^2$).

On raisonne maintenant par l'absurde, en supposant que la boule fermée $\overline{B(x, \sqrt{2})}$ est disjointe de D . Par (*), la courbe α formée de γ et du segment $[ab]$ est une courbe fermée simple. On considère le demi-disque A intersection de $\overline{B_{\sqrt{2}}(x)}$ et du demi-plan ouvert en dessous de (ab) . On utilise alors le fait évoqué plus haut : il existe $v \in \mathbf{Z}^2$ tels que $a + v \in A$. On va obtenir une contradiction en montrant que $\gamma + v$ rencontre γ , ce qui entraînera que $D + v$ rencontre D .

Par hypothèse sur A , on ne peut pas avoir $v = 0$, en fait le vecteur v a une composante verticale > 0 . Le point $a + v$ est alors à l'intérieur de la courbe de Jordan α (considérer un

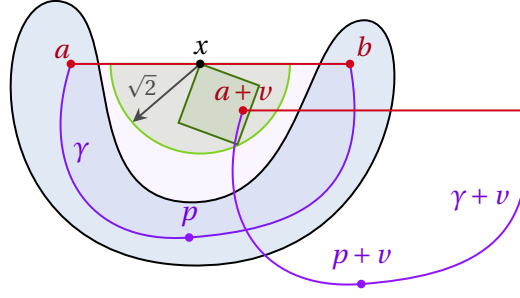


FIGURE 9. Preuve du lemme. Le carré est un domaine fondamental de $\mathbb{Z}^2$ (qui a été tourné au milieu de la preuve), il contient donc un translaté (par un vecteur $v \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$) du point a . Le point $a + v$ est à l'intérieur du domaine de Jordan défini par le segment $[a, b]$ et la courbe γ , le point $p + v$ à l'extérieur.

segment partant de ce point et sortant de A par son diamètre). Si on considère un point p de γ à distance maximale de la droite (ab) on voit que $p + v$ est strictement plus loin de (ab) : ce point est donc à l'extérieur de la courbe de Jordan α . La courbe $\gamma + v$ relie un point intérieur à α à un point extérieur, elle doit donc couper α . D'autre part $\gamma + v$ est disjointe de (ab) puisque γ est dans le demi-plan en dessous de (ab) et v pointe vers le haut. Donc $\gamma + v$ rencontre γ . C'est une contradiction. $\square$

La preuve du théorème 7.1 montre également le résultat suivant :

Corollaire 7.6. — Pour tout entier $n > 0$,

$$\text{rot}(\tilde{f}) \subset \frac{1}{n} \text{conv}((\tilde{f}^n - \text{Id})([0, 1]^2)).$$

Exercice 7.7. — Vérifier que dans l'énoncé du corollaire précédent, on peut remplacer $[0, 1]^2$ par n'importe quel carré de côté au moins 1.

Corollaire 7.8. — Si $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et $\tilde{f}$ est un relevé de f à $\mathbb{R}^2$, alors

$$\text{rot}(\tilde{f}) = \text{rot}_{\text{mes}}(\tilde{f}) = \text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})).$$

Démonstration. — C'est une conséquence triviale de la proposition 5.7 et du théorème 7.1. $\square$

Une remarque parfois utile qu'on a pas encore explicitée : se donner $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et un de ses relevés $\tilde{f}$ à $\mathbb{R}^2$ revient à se donner $\tilde{f}$ un homéo de $\mathbb{R}^2$ commutant aux translations entières, c'est-à-dire que pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{Z}^2$, on a $\tilde{f}(\tilde{x} + v) = \tilde{f}(\tilde{x}) + v$. On note $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$ l'ensemble des homéos de $\mathbb{R}^2$ commutant aux translations entières (voir aussi la remarque 6.5).

Ainsi, si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont deux relevés de $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ à $\mathbb{R}$ alors il existe $v \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\rho(\tilde{f}_1) = \rho(\tilde{f}_2) + v$.

Corollaire 7.9. — L'ensemble de rotation dépend de façon semi-continue de $\tilde{f}$ pour la topologie de Hausdorff : pour tout $\tilde{f}_0 \in \text{Homeo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de $\tilde{f}_0$ dans $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2)$ dans lequel tout homéo $\tilde{f}$ a son ensemble de rotation inclus dans $V_\varepsilon(\text{rot}(\tilde{f}_0))$.

Démonstration. — On utilise le corollaire 7.8 : il suffit de démontrer la semi-continuité de $\text{rot}_{\text{mes}}(\tilde{f})$. Celle-ci se ramène à la semi-continuité de $f \mapsto \mathcal{M}(f)$ (avec la topologie de Hausdorff à l'arrivée), parce que l'application $(\tilde{f}, \mu) \mapsto \int_{\mathbf{T}^2} (\tilde{f} - \text{Id}_{\mathbf{R}^2}) d\mu$ est continue. Cette semi-continuité de $f \mapsto \mathcal{M}(f)$ est classique et se démontre directement : si $f_n \rightarrow f$ et $\mu_n \in \mathcal{M}(f_n)$ tend vers μ , alors μ est f -invariante. En effet, pour toute $\varphi \in C^0(\mathbf{T}^2, \mathbf{R})$, on a

$$\int_{\mathbf{T}^2} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbf{T}^2} \varphi \circ f_n d\mu_n = \int_{\mathbf{T}^2} \varphi \circ f d\mu_n + \int_{\mathbf{T}^2} (\varphi \circ f_n - \varphi \circ f) d\mu_n.$$

Le dernier terme est majoré en valeur absolue par $\|\varphi \circ f_n - \varphi \circ f\|_\infty$, qui tend vers 0 parce que $f_n \rightarrow f$, en passant à la limite en n on obtient donc que $\int_{\mathbf{T}^2} \varphi d\mu = \int_{\mathbf{T}^2} \varphi \circ f d\mu$, ce qui montre que $\mu \in \mathcal{M}(f)$. $\square$

Exercice 7.10. — Redémontrer le corollaire 7.9 sans utiliser les mesures invariantes. *Indication : utiliser le théorème 7.1 et son corollaire 7.6.*

Montrons tout de suite par un exemple que l'autre semi-continuité est fausse.

7.2. Album de famille : quelques autres exemples de base

7.2.1. Rotations fibrées, en un peu mieux. — On peut modifier un tout petit peu l'exemple défini à (1) en composant par une rotation : on se donne $\phi : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$, et on pose

$$(28) \quad \begin{aligned} \tilde{f}_{\phi, \alpha} : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + \phi(y) \\ y + \alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui est la composition de $\tilde{f}_\phi$ de (1) avec la rotation d'angle $(0, \alpha)$.

Une récurrence directe permet de donner une formule aux itérés de $\tilde{f}$:

$$(29) \quad \tilde{f}_{\phi, \alpha}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + S_n^\phi(y) \\ y + n\alpha \end{pmatrix},$$

où $S_n^\phi(y) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(y + i\alpha)$.

Ainsi (en se souvenant de la définition (24) de D_n , on voit qu'on se prépare à calculer $\text{rot}(\tilde{f})$)

$$\frac{1}{n} \left(\tilde{f}_{\phi, \alpha}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} S_n^\phi(y) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Or chaque point $y \in \mathbf{S}^1$ est typique pour une mesure invariante par la rotation R_α d'angle α ; autrement dit, il existe $\mu \in \mathcal{M}(R_\alpha)$ telle que le théorème de Birkhoff s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n^\phi(y) = \int_{\mathbf{T}^2} \phi d\mu,$$

où μ est la mesure de Lebesgue si α est irrationnel, et μ la mesure $\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \delta_{y+i\alpha}$ si $\alpha = p/q$ une fraction irréductible. Si on choisit par exemple $\alpha = 0$, on aura (et on l'a déjà vu en (7)) $\text{rot}(\tilde{f}_{\phi, 0}) = [\min \phi, \max \phi] \times \{0\}$. En revanche, si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, l'unique ergodicité de la rotation R_α implique que les moyennes de Birkhoff $\frac{1}{n} S_n^\phi(y)$ convergent uniformément en y vers $\int_{\mathbf{T}^2} \phi d\lambda$, ce qui implique que $\text{rot}(\tilde{f}_{\phi, \alpha}) = \{(\int_{\mathbf{T}^2} \phi d\lambda, \alpha)\}$. Si on choisit $(\alpha_n)_n$ une suite d'irrationnels tendant vers 0, et pour ϕ une fonction non constante, on voit que les ensembles $\text{rot}(\tilde{f}_{\phi, \alpha_n})$ sont des singletons, qui ne sauraient donc converger au sens de Hausdorff vers le segment non trivial $\text{rot}(\tilde{f}_{\phi, 0}) = [\min \phi, \max \phi] \times \{0\}$. On vient de montrer la propriété suivante :

Proposition 7.11. — L'application $\tilde{f} \mapsto \text{rot}(\tilde{f})$, qui va de $\text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$ dans l'ensemble des compacts du plan, n'est pas continue.

7.2.2. L'exemple du *kicked Harper model*. — On peut s'amuser à composer des rotations fibrées comme celles définies en (1) en permutant leurs coordonnées. Plus précisément, posons

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\alpha : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 & \tilde{v}_\beta : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + \alpha \sin(2\pi y) \\ y \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y + \beta \sin(2\pi x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$(30) \quad \tilde{f}_{\alpha, \beta} = \tilde{h}_\alpha \circ \tilde{v}_\beta$$

(ici, h est pour « horizontal » et v pour « vertical »). On note $f_{\alpha, \beta} \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ la projection de $\tilde{f}_{\alpha, \beta}$ sur $\mathbf{T}^2$.

Cet exemple a été étudié à fond par Tobias, Andrés et Fabio dans [JKT21], donnons quand même quelques propriétés de cette famille à 2 paramètres d'homéos de $\text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$.

Concentrons-nous sur le cas particulier de $\alpha = \beta = 1$. En calculant les images des points du type $(i/4, j/4)$ pour $(i, j) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$, on voit que pour tout $(a, b) \in \llbracket -1, 1 \rrbracket^2$, il y a au moins un point fixe de $f_{1,1}$ dont le vecteur de rotation est (a, b) . Par la convexité de l'ensemble de rotation (théorème 7.1), on en déduit que $\llbracket -1, 1 \rrbracket^2 \subset \text{rot}(\tilde{f}_{1,1})$.

Par ailleurs, pour tout $\tilde{x} \in \mathbf{R}^2$, on voit facilement que $\tilde{f}_{1,1}(\tilde{x}) - \tilde{x} \in \llbracket -1, 1 \rrbracket^2$ (ça vient du fait que le sinus est entre -1 et 1). Ainsi, par le corollaire 7.6, on a $\text{rot}(\tilde{f}_{1,1}) \subset \llbracket -1, 1 \rrbracket^2$. Combiné à l'inclusion précédente, cela montre que $\text{rot}(\tilde{f}_{1,1}) = \llbracket -1, 1 \rrbracket^2$. On vient de définir explicitement un homéo du tore dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide!

On verra plus tard (à (31)) que $\text{int}(\text{rot}(\tilde{f})) \subset \text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})$. On a aussi vu que les points $\llbracket -1, 1 \rrbracket^2$ sont inclus dans $\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})$. L'exercice suivant montre qu'en général, même si $\text{int}(\text{rot}(\tilde{f})) \neq \emptyset$, l'ensemble de rotation ergodique n'est pas fermé.

Exercice 7.12. — Montrer que $\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f}) \setminus \text{int}(\text{rot}(\tilde{f})) \subset \llbracket -1, 1 \rrbracket^2$. La réponse est dans [MZ91, section 3]!

7.2.3. Des flots reparamétrisés. — Expliquons un exemple simple qui est connu depuis Stepanov [Ste36] (mais attribué à Katok dans [Han89]), et représenté sur la figure 10. Prenons un champ de vecteurs X_0 constant sur le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ égal à $(1, \alpha)$, avec α irrationnel. Le temps un ϕ_0^1 de ce champ de vecteurs est une brave rotation irrationnelle sur la deuxième coordonnée : $(x, y) \mapsto (x, y + \alpha) \bmod \mathbf{Z}^2$.

On modifie ce champ de vecteurs pour l'arrêter en un point : choisissons une fonction $\varphi = \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ qui s'annule en un point $p \in \mathbf{T}^2$: $\varphi(x) = 0 \iff x = p$, et posons $X(x) = \varphi(x)X_0(x)$. C'est un champ de vecteurs partout proportionnel à X , dont on note $(\phi^t)_{t \in \mathbf{R}}$ le flot associé.

Les orbites de ce nouveau flot (ϕ^t) sont toutes égales (au sens ensembliste) à celles du flot linéaire (ϕ_0^t) , à part deux d'entre-elles : celle des points dont l'orbite future par (ϕ_0^t) rencontre le point p , et celle des points dont l'orbite passée par (ϕ_0^t) rencontre le point p . Plus précisément, si on exclut ces orbites spéciales, les orbites de (ϕ^t) sont orbitalement équivalentes à celles de (ϕ_0^t) : pour un point x dont l'orbite par (ϕ_0^t) ne rencontre pas p , il existe un homéo ψ de $\mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$ on ait $\phi_0^t(x) = \phi^{\psi(t)}(x)$.

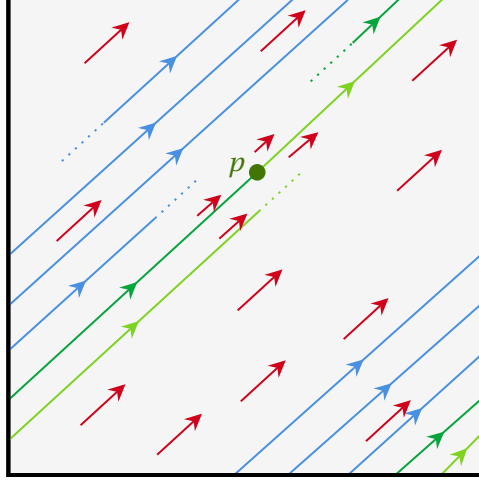


FIGURE 10. L'exemple de Katok. Le champ de vecteurs $X = \varphi X_0$ est représenté en rouge, ainsi que trois orbites du flot : une en bleu, et deux en vert. Ces deux dernière orbites sont particulières : elles forment l'ensemble des points dont l' α (respectivement ω)-limite est égale au singleton $\{p\}$; toutes les autres orbites ont leur α (respectivement ω)-limite égale à $\mathbf{T}^2$ tout entier.

Pour tout point x dont l'orbite par (ϕ_0^t) ne rencontre pas p , le relevé de l'orbite de x par (ϕ^t) au revêtement universel $\mathbf{R}^2$ de $\mathbf{T}^2$ est une droite, tandis que pour les autres points x le relevé de leur orbite est une demi-droite issue d'un relevé de p .

On va voir que si on choisit φ correctement au voisinage du point p , alors l'ensemble de rotation de ϕ^1 est un segment non trivial.

Lemme 7.13. — *Si on prend $\varphi(x) \sim_{x \rightarrow p} \|x - p\|$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne), alors il existe exactement deux mesures ergodiques pour ϕ^1 : le Dirac δ_p et une mesure λ absolument continue par rapport à Lebesgue.*

En fait, il existe toujours une mesure ergodique λ absolument continue par rapport à Lebesgue, mais selon le comportement de φ au voisinage de p , celle-ci peut être infinie.

Démonstration. — On commence par vérifier que l'homéo préserve la mesure μ définie par

$$\mu(E) = \int_E \frac{1}{\varphi} d\text{Leb},$$

puis que dans notre cas cette mesure μ est finie car $1/\varphi$ est intégrable (c'est une remarque d'Oxtoby [Oxt53]). Cette mesure est ergodique parce que Leb l'est pour l'homéo ϕ_0^1 .

Il faut ensuite vérifier qu'il n'y a pas d'autre mesure invariante ergodique. On pourra consulter les sections 1 et 2 de [Kwa07], la proposition 1 de [SSV10] ou bien les sections 2 et 3 de [AG22] pour plus de détails. $\square$

Considérons $\tilde{\phi}^1$ le relevé de ϕ^1 au plan $\mathbf{R}^2$ qui fixe un relevé de p (et qui dans ce cas les fixe tous). Le vecteur de rotation de la mesure λ pour ϕ^1 est non nul :

$$\rho_{\tilde{\phi}^1}(\lambda) = \int_{\mathbf{T}^2} (\tilde{\phi}^1(x) - x) d\lambda(x) \in \mathbf{R}_+^*(1, \alpha).$$

Ainsi, par le corollaire 7.8, on obtient que

$$\text{rot}(\tilde{\phi}^1) = [0, \rho_{\tilde{\phi}^1}(\lambda)]$$

est un segment non trivial inclus dans $\mathbf{R}_+(1, \alpha)$.

Remarque 7.14. — Remarquez que l'exemple qu'on vient de décrire n'est pas lisse (la fonction φ n'est pas lisse au voisinage de p). Il est possible de modifier cette construction pour obtenir un difféomorphisme analytique ayant les mêmes propriétés (théorème dû à Oxtoby [Oxt53], voir aussi [TAZ07]).

Remarque 7.15. — On peut aussi choisir délibérément de prendre $\varphi(x) \sim_{x \rightarrow p} \|x - p\|^k$ avec $k \geq 2$. Dans ce cas pas de problème de régularité de φ qu'on peut choisir C^∞ , mais l'ensemble de rotation de l'homéo obtenu est réduit à $\{0\}$. Cela fournit un exemple d'homéo à déviations non bornées par rapport à la direction du flot, voir la définition 10.2 à venir.

CHAPITRE 8

SUR DES PROBLÈMES DE RÉALISATION

On aborde ici les problèmes du type :

- a) étant donné $r \in \text{rot}(\tilde{f})$, est-ce qu'il existe un point $x \in \mathbf{T}^2$ tel que $\rho_{\tilde{f}}(x) = r$ (autrement dit quels points de $\text{rot}(f)$ sont aussi dans $\text{rot}_{\text{pts}}(f)$) ?

Cette question peut être précisée de plusieurs manières, soit en exigeant des propriétés supplémentaires sur le point x , par exemple :

- b) est-ce que x peut être supposé typique pour une mesure (autrement dit quels points de $\text{rot}(\tilde{f})$ sont aussi dans $\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})$) ?
c) si r est rationnel, est-ce que x peut être supposé périodique ?

soit en substituant le point r par un sous-ensemble de $\text{rot}(\tilde{f})$:

- d) si F est un sous-ensemble fermé de $\text{rot}(\tilde{f})$, est-ce qu'il existe un point x tel que $\rho_{\tilde{f}}(x) = F$ (voir la définition 1.3 de l'ensemble de rotation de x) ?

Une conséquence du corollaire 7.8 est que tout point extrémal de l'ensemble convexe $\text{rot}(\tilde{f})$ appartient à $\text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f})$, ce qui apporte une réponse partielle à la question b).

Dans une série de papiers autour de 1990, John Franks a répondu complètement à la question c) dans le cas du tore :

Théorème 8.1 (Franks). — Pour $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$, on suppose qu'il existe $p/q \in \text{rot}(f)$, avec $p \in \mathbf{Z}^2$ et $q \in \mathbf{N}^*$, p et q premiers entre eux. Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée, alors il existe un point périodique de période q et de vecteur de rotation p/q :

1. $p/q \in \text{int}(\text{rot}(f))$ [Fra89] ;
2. p/q est un point extrémal du convexe $\text{rot}(f)$ [Fra88b] ;
3. f préserve l'aire et $\text{rot}(f)$ est un segment [Fra95].

Cette famille de résultats clôt complètement la question c) : l'exemple 5.5 (illustré à la figure 7), et l'exercice 7.12, montrent qu'on ne peut pas espérer de réponse positive à la question si on enlève l'hypothèse de préservation de l'aire au point 3., ou si p/q est un point du bord de l'ensemble de rotation lorsque celui-ci est d'intérieur non vide.

Notons le résultat d'Alejandro et Andrés [KK08], qui donne une version topologique un peu plus forte de 3. : l'hypothèse de préservation de l'aire est remplacée par celle de non-existence de courbes libres.

Les démonstrations originales de ces énoncés font intervenir de la théorie de Brouwer « élémentaire », en particulier un lemme sur les disques libres. Voir le cours de François

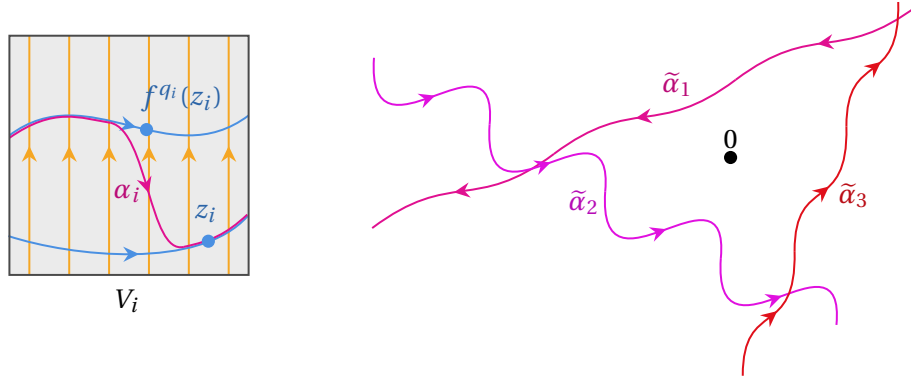


FIGURE 11. Preuve du point 1. du théorème 8.1.

[Bég07, théorème 3.10] pour une preuve du point 1. du théorème 8.1 dans le cas favorable d'un homéo conservatif. Donnons une preuve moderne du point 1. du théorème 8.1, basée sur le théorème feuilleté de Patrice (théorème A.5).

Démonstration. — On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe $p/q \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$ tel que $\tilde{f}^q - p$ soit un homéo du plan sans point fixe. Soit I une isotopie entre l'identité et f^q . Quitte à la concaténer avec une isotopie $(x, t) \mapsto x + tp'$, avec $p' \in \mathbb{Z}^2$ bien choisi, on peut supposer que I se relève en une isotopie entre l'identité et $\tilde{f}^q - p$. Puisque $\tilde{f}^q - p$ est sans point fixe, cette isotopie I est maximale (au sens défini avant le théorème A.9). À cette isotopie, le théorème A.5 associe un feuilletage transverse $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$, qu'on relève en un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{R}^2$. Puisque I est sans point fixe, ce feuilletage est non singulier : $\text{dom}(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathbb{R}^2$. On note $g = f^q$ et $\tilde{g} = \tilde{f}^q - p$.

Par la proposition 5.7, et puisque $0 \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{g}))$, il existe trois mesures ergodiques $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(g)$ telles que 0 soit dans l'intérieur du triangle engendré par les vecteurs de rotation $\rho_{\tilde{g}}(\mu_i)$ (pour $i = 1, 2, 3$). Pour $i = 1, 2, 3$, soit z_i un point typique pour μ_i . Soit V_i un voisinage de z_i qui soit trivialisant pour $\mathcal{F}$, et $\tilde{V}_i$ le relevé de V_i contenant $\tilde{z}_i$. Puisque z_i est récurrent, il existe $p_i \in \mathbb{Z}^2$ et $q_i \in \mathbb{N}^*$ tels que $\tilde{g}^{q_i}(\tilde{z}_i) \in \tilde{V}_i + p_i$ et que p_i/q_i soit ε -proche de $\rho_{\tilde{g}}(\mu_i)$. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que 0 soit dans l'intérieur du triangle engendré par les vecteurs p_i/q_i .

On construit alors un lacet transverse à partir des trajectoires $I_{\mathcal{F}}^Z(z_i)$, en refermant cette trajectoire dans le voisinage trivialisant V_i , pour obtenir une trajectoire α_i (voir la figure 11, gauche). Puisqu'ils sont périodiques, les relevés de α_i à $\mathbb{R}^2$ sont à distance de Hausdorff bornée de la droite affine dirigée par le vecteur p_i . On peut donc considérer un relevé $\tilde{\alpha}_i$ de α_i tel que l'origine soit situé sur sa gauche (comme sur la figure 11, à droite). La feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ passant par l'origine est alors bornée dans le futur ; le théorème de Poincaré-Bendixson affirme alors que le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ ne saurait être non singulier, une contradiction avec notre hypothèse de départ. $\square$

Ce chapitre se termine déjà, mais ce n'est pas la fin de l'histoire de la réalisation : on a seulement abordé la question c), et on va exposer des réponses aux autres questions dans le chapitre qui vient tout de suite.



CHAPITRE 9

GROS ENSEMBLES DE ROTATION

9.1. L'entropie topologique

En utilisant la théorie de Nielsen-Thurston et le résultat de réalisation de Franks (théorème 8.1.1.), Jaume Llibre et Robert MacKay ont démontré dans [LM91] qu'un homéo dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide est forcément d'entropie topologique positive :

Théorème 9.1 ([LM91]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tel que $\text{rot}(\tilde{f})$ soit d'intérieur non vide. Alors $h_{\text{top}}(f) > 0$.

On présente une preuve de ce résultat utilisant la théorie du forçage en fin de section (sous-section 9.5). Cette preuve-ci est sans doute un peu plus compliquée que l'originale, consistant à appliquer (avec un joli argument) la classification de Nielsen-Thurston (voir le cours [Bég07] de François), mais a le mérite de préparer le terrain pour des énoncés ultérieurs comme celui de déviation bornée (théorème 10.8).

On peut légitimement se demander si on ne peut pas expliciter le théorème 9.1 : est-ce qu'il est possible de minorer l'entropie en fonction de la taille de l'ensemble de rotation ? Jarek Kwapisz nous dit dans [Kwa93, Kwa95a] que la réponse est oui, mais pas aussi simple qu'on pourrait le penser à première vue : l'estimée de l'entropie se faisant à l'aide de points périodiques, celle-ci ne fait pas intervenir l'aire de $\text{rot}(\tilde{f})$ mais les dénominateurs des points rationnels dans son intérieur. Pour un convexe compact K du plan, posons

$$A(K) = \max \{ \sqrt{r_1 r_2} \mid \exists p \in \mathbb{Z}^2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}, (v, w) \text{ base de } \mathbb{Z}^2 : p, p + r_1 v, p + r_2 v \in \text{int}(K) \}$$

et

$$I(K) = \min \{ \lambda \in \mathbb{N} \mid \text{int}(\lambda K) \text{ contient trois points non alignés de } \mathbb{Z}^2 \}.$$

Théorème 9.2 ([Kwa93]). — Il existe une constante explicite $C > 0$ telle que pour tout $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tel que $\text{int}(\text{rot}(\tilde{f})) \neq \emptyset$,

$$h_{\text{top}}(f) \geq C \max \left(\ln_+ (A(\text{rot}(\tilde{f}))), \frac{1}{I(\text{rot}(\tilde{f}))} \right).$$

Pour bien comprendre l'énoncé, rappelons que $\text{rot}(\tilde{f}^n) = n \text{rot}(\tilde{f})$ et que pour $A \in SL_2(\mathbb{R})$, on a $\text{rot}(A\tilde{f}A^{-1}) = A\text{rot}(\tilde{f})$ (proposition 6.3). Notons que l'estimation faisant intervenir $A(\text{rot}(\tilde{f}))$ est adaptée aux ensembles de rotation « gros » tandis que celle impliquant $I(\text{rot}(\tilde{f}))$ est plutôt faite pour les ensembles de rotation « petits » (mais ayant tout de même de l'intérieur).

Jarek Kwapisz a également réussi à « localiser rotationnellement » l'entropie topologique [Kwa95a] : on sait par le théorème 9.4 que si $r \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$, alors il existe un compact f -invariant K tel que $\rho_{\tilde{f}}(x) = r$ pour tout $x \in K$. Eh bien, en gros, plus r est loin de $\partial \text{rot}(\tilde{f})$, meilleure est la borne qu'on peut obtenir sur $h_{\text{top}}(f|_K)$. Voir [Bég07, Kwa95a] pour plus de détails.

9.2. Le retour de la réalisation

Dans l'article [LM91] dont on a déjà parlé au théorème 9.1, les auteurs déduisent de la théorie de Nielsen-Thurston un résultat de réalisation des continuums :

Théorème 9.3 ([LM91]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tel que $\text{rot}(\tilde{f})$ soit d'intérieur non vide. Alors, pour tout continuum $C \subset \text{rot}(\tilde{f})$, il existe un point $x \in \mathbb{T}^2$ tel que $\rho_{\tilde{f}}(x) = C$.*

En particulier, pour tout $r \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$, il existe $x \in \mathbb{T}^2$ tel que $\rho_{\tilde{f}}(x) = r$. Avec les mêmes techniques, Michał Misiurewicz et Krystyna Ziemian ont précisé cette conséquence :

Théorème 9.4 ([MZ91]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tel que $\text{rot}(\tilde{f})$ soit d'intérieur non vide. Alors pour tout $r \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$, il existe un compact f -invariant $K \subset \mathbb{T}^2$ tel que pour tout $x \in K$ on a $\rho_{\tilde{f}}(x) = r$.*

Le compact K porte forcément une mesure f -invariante, et donc une mesure ergodique. On en déduit que pour tout $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$,

$$(31) \quad \text{int}(\text{rot}(\tilde{f})) \subset \text{rot}_{\text{erg}}(\tilde{f}).$$

On ne peut pas espérer obtenir un résultat du type du théorème 9.4 pour les points extrémaux de l'ensemble de rotation, comme le montre l'exemple de [BdCH16] dont on reparlera brièvement bientôt.

On peut également obtenir ces théorèmes en remplaçant la théorie de Nielsen-Thurston par la théorie du forçage, voir [Gui25a].

9.3. Transitivité

On peut se demander si l'ajout d'une hypothèse de transitivité peut permettre d'en dire plus sur la dynamique rotationnelle de l'homéo, et réciproquement. Tout d'abord, la transitivité au revêtement universel est reliée à la fois à la transitivité sur le tore et l'ensemble de rotation :

Théorème 9.5 ([Tal12, GKT15]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ un homéo transitif. Alors un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}^2$ est transitif si et seulement si $0 \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$.*

De plus, si $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ est transitif et si son ensemble de rotation est un segment à pente rationnelle, alors il possède un fer à cheval topologique [NT23, proposition 4.1] (voir la section 16.7). Ce résultat permet à Pollyanna et Fabio d'en déduire qu'un homéo isotope à l'identité et transitif qui possède un point fixe et un point périodique non fixe possède un fer à cheval topologique.

Enfin, si f est transitif et $\text{rot}(\tilde{f})$ d'intérieur non vide, alors Alejo et Fabio montrent que f est topologiquement mélangeant [AZ15a, GST24]. Plus précisément, si $0 \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$, alors $\tilde{f}$ est topologiquement mélangeant. Le travail [AZ15a] de Salvador traite d'ailleurs le cas non

transitif, avec l'exhibition d'une classe homocline complètement essentielle, ce qui implique le caractère borné des disques périodiques.

On verra à la proposition 20.20 une autre relation transitivité-rotation, en genre plus grand.

En régularité $C^{1+\alpha}$, on a une version rotationnelle du théorème du fer à cheval de Katok [Kat80] à coup de transitivité dans des revêtements assez gros [EGL09].

9.4. La torsion

La torsion, ou invariant de Ruelle, est un nombre associé à un point x qui mesure la vitesse de rotation asymptotique locale le long de l'orbite de x (on peut le voir comme le pendant « argument » de l'exposant de Lyapunov qui est relié au « module » des vecteurs tangents). Dans [BB13], François et montrent que si l'ensemble de rotation de f est d'intérieur non vide, alors f possède une orbite de torsion non nulle.

9.5. Une preuve de la positivité de l'entropie par le forçage

La preuve de la positivité de l'entropie est relativement simple comparativement aux autres de la théorie du forçage, parce que dans ce cas les feuilles du feuilletage sont bornées dans le plan, ce qui permet de trouver facilement des intersections transverses, en fait dès que deux orbites ont des directions rotationnelles différentes [LCT18, proposition 73].



Proposition 9.6. — Si, pour $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$, on a $0 \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$, alors f possède un itéré tel que les projetés à $\mathbb{R}^2$ des feuilles de tout feuilletage transverse associé à une isotopie maximale sont uniformément bornés.

On pourrait reprendre la preuve du théorème 8.1.1. de réalisation de Franks, en ajoutant juste un argument supplémentaire à la fin, mais les notations qu'on met en place dans la démonstration qui vient — d'ailleurs très similaire à celle du théorème de Franks — aideront pour la suite.

Démonstration. — Puisque $0 \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$ et que $\text{rot}(\tilde{f}^n) = n \text{rot}(\tilde{f})$, quitte à remplacer f par un de ses itérés, l'ensemble $\text{rot}(\tilde{f}^n)$ contient les points $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. On utilise alors le théorème 8.1 de réalisation de Franks, cas 1. : il existe quatre points $z_{(0,1)}$, $z_{(0,-1)}$, $z_{(1,0)}$ et $z_{(-1,0)}$ vérifiant $\tilde{f}(z_v) = z_v + v$ (et donc les projetés sur $\mathbb{T}^2$ de ces points sont fixes par f).

Soit alors I une isotopie maximale entre f et l'identité telle que $\tilde{I}^1 = \tilde{f}$, ainsi qu'un feuilletage associé $\mathcal{F}$ sur $\widetilde{\text{dom}}(I)$. On note $\tilde{\mathcal{F}}$ le projeté de ce feuilletage sur $\mathbb{R}^2$, ainsi que $\tilde{I}$ le relevé de I à $\mathbb{R}^2$. Considérons les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_v)$ de chacun des points périodiques z_v . Par exemple, la trajectoire $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(1,0)})$ est obtenue comme le saturé sous l'action des translations entières de vecteur $(n, 0)$ d'un chemin borné; c'est donc une droite topologique orientée proprement plongée et bornée dans la direction verticale. Les mêmes propriétés sont vérifiées par la trajectoire $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(-1,0)})$. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la famille de trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(1,0)}) + (0, 2kN)$ et $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(-1,0)}) + (0, (2k+1)N)$, pour k parcourant $\mathbb{Z}$, est formée de droites deux à deux disjointes. La même propriété est vérifiée par les $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(0,1)}) + (0, 2kN)$ et $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(0,-1)}) + (0, (2k+1)N)$.

Sur la figure 12, on voit apparaître certaines régions qui sont des attracteurs pour les feuilles (gros points), et pour chacune d'entre elles, si on appelle R l'union des 9 régions

qui lui sont adjacentes, alors toute feuille passant par R a son α -limite incluse dans R . De même, certaines régions sont des répulseurs pour les feuilles (croix), et pour chacune d'entre elles, si on appelle A l'union des 9 régions qui lui sont adjacentes, alors toute feuille passant par A a son ω -limite incluse dans A . On en déduit facilement que les feuilles sont bornées dans $\mathbf{R}^2$, en observant que tout point du plan appartient à au moins une des régions A et une des régions R . $\square$

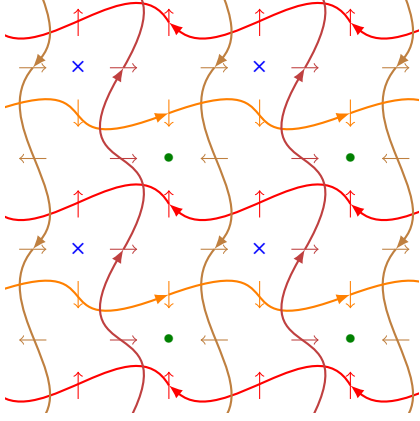


FIGURE 12. Trajectoires transverses associées aux points périodiques $z_v + w$ et directions possibles prises par les feuilles (flèches). Les points verts ou les croix bleues désignent des singularités du feuilletage.

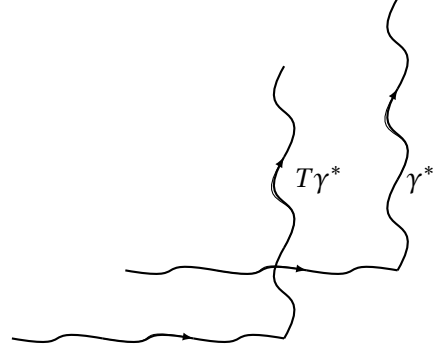


FIGURE 13. Trajectoire γ^* utilisée pour la preuve du théorème A.18 et sa translatée avec laquelle elle a une intersection $\mathcal{F}$ -transverse.

Voyons comment cette proposition s'applique pour montrer la positivité de l'entropie.

Démonstration du théorème 9.1. — Considérons les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(1,0)})$ et $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(0,1)})$ définies dans la preuve de la proposition précédente, dont on reprend les objets et notations. On voit facilement que certains de leurs relevés s'intersectent $\mathcal{F}$ -transversalement, par le fait que les feuilles du feuilletage sont bornées et que leurs directions asymptotiques sont différentes. L'application de la proposition fondamentale A.13 permet de créer une trajectoire transverse admissible γ^* comme sur la figure 13 formée de la concaténation d'un bout de la trajectoire $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(1,0)})$ et d'un bout de la trajectoire $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(z_{(0,1)})$. Puisque les feuilles du feuilletage sont bornées, si ces bouts sont assez longs, alors il existe une translation entière T telle que cette trajectoire possède une intersection $\mathcal{F}$ -transverse avec sa translatée $T\gamma^*$. On peut donc appliquer le théorème A.15 qui implique l'existence d'un fer à cheval topologique. $\square$

CHAPITRE 10

DÉVIATIONS BORNÉES ET SEMI-CONJUGAISONS

L'ensemble de rotation d'un homéo f concerne le comportement linéaire des orbites, autrement dit décrit le comportement de $\Delta_f^n(x)/n$ (défini en (5)). Le problème des déviations bornées est le suivant : connaissant ce comportement linéaire, est-ce qu'on peut en déduire des propriétés concernant la vitesse sous-linéaire de ces orbites, autrement dit de $\Delta_f^n(x)$ sans diviser par le temps ?

Dans le cas du cercle, cette étude se résume à un exercice (voir aussi [Mis06]) :

Exercice 10.1. — Considérons un relevé $\tilde{f} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ d'un endomorphisme f du cercle de degré un, d'intervalle de rotation $[a, b]$. Montrer que pour tout $\tilde{x} \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$-1 + an \leq \tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x} \leq 1 + bn.$$

Cette inégalité montre que l'intervalle de rotation fournit un contrôle précis du déplacement à long terme, avec des déviations bornées par une constante uniforme, en l'occurrence 1. Notons que si f est un homéo du cercle, l'exercice précédent exprime le fait classique que la vitesse de convergence vers le nombre de rotation est $\leq 1/n$.

Dans le cas du tore $\mathbf{T}^2$, le paysage est déjà plus beau et vallonné. La notion de déviations bornées y a été étudiée sous toutes les coutures et est étroitement liée à la forme de l'ensemble de rotation.

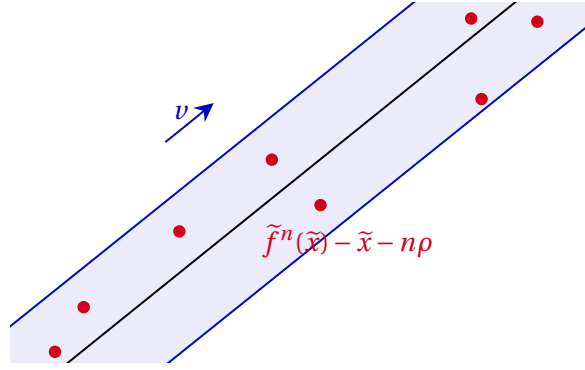
Si le problème de la réalisation des points de l'ensemble de rotation, qu'on a abordé à la section précédente, a été résolu essentiellement à la fin des années 80 et au début des années 90, celui des déviations bornées a connu un essor bien plus tardif, grâce à l'apparition de nouveaux outils dont la théorie du forçage.

10.1. Quelques énoncés

Le terme « déviations bornées » regroupe plusieurs notions, suivant le contexte (en vrai, selon l'ensemble de rotation de l'homéo) ; voici la première. En gros, elle exprime que toute orbite d'un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbf{R}^2$ reste confinée dans une bande de largeur $C > 0$ (à un terme de renormalisation $n\rho$ près) et de direction v , où ces deux constantes C et v sont indépendantes de l'orbite (voir la figure 14).

Définition 10.2. — Soit $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. On dit que l'homéo $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$ est à *déviations bornées dans la direction v* s'il existe $\rho \in \mathbf{R}^2$, $C \in \mathbf{R}_+$ et un relevé $\tilde{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de f tel que pour tout $\tilde{x} \in \mathbf{R}^2$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$(32) \quad |\langle \tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x} - n\rho, v \rangle| \leq C.$$

FIGURE 14. Déviations bornées par rapport à une direction $v \in \mathbf{R}^2$.

Moralement, si un homéo a des déviations bornées dans une certaine direction rationnelle $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, alors sa dynamique ressemble à celle d'un homéo de l'anneau $\mathbf{R}^2 / (-q, p)\mathbf{Z}^2$: on dit qu'un tel homéo est *annulaire*.

Exercice 10.3. — Montrer que si f est annulaire, alors il existe un revêtement fini de $\mathbf{T}^2$ dans lequel f possède un anneau invariant essentiel⁽¹⁾ (voir [Jäg09b, remark 3.10] ou [KT14c]).

Problème 10.4. — Peut-on avoir un résultat similaire sans prendre de revêtement fini? Est-ce que si un homéo est annulaire, alors il possède un anneau essentiel f -invariant? Parfois des disques topologiques f -périodiques dont l'union des adhérences est dense? Bien sûr, des réponses partielles sous des hypothèses supplémentaires (non errant, points fixes inessentiels) seront les bienvenues. Cette question est reliée au problème 19.15.

Lorsque $\text{rot}(\tilde{f})$ est un segment non dégénéré contenant un point rationnel, on a des déviations bornées :

Théorème 10.5. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ dont l'ensemble de rotation est un segment non dégénéré contenant un point rationnel, et de direction $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors f a des déviations bornées dans la direction v .

Cet énoncé est obtenu en combinant le cas où l'ensemble de rotation est un segment de pente rationnelle [BT13, GKT14, Dáv18] et le cas où il a une pente irrationnelle [SST22] (en utilisant [LCT18] pour exclure un cas). De plus, l'hypothèse stipulant que $\text{rot}(\tilde{f})$ doit contenir un point rationnel n'est pas nécessaire si l'on suppose que l'homéo est minimal [Koc21a], voir aussi le paragraphe après le théorème 11.5. C'est d'ailleurs les arguments de [Dáv18] qui ont inspiré la création de la théorie du forçage, et les papiers ultérieurs [SST22, LCT18] utilisent à fond cette théorie.

Il existe aussi une notion (différente) de déviation bornée dans le cas d'ensembles de rotation d'intérieur non vide, puisque la précédente est inopérante dans ce cas :

Exercice 10.6. — Montrer que :

- un homéo dont l'ensemble de rotation a un intérieur non vide ne peut avoir de déviations bornées dans aucune direction ;

⁽¹⁾Ici, *essentiel* signifie « qui contient un lacet non contractile dans la surface ».

- si un homéo est à déviations bornées dans deux directions non colinéaires, alors il est à déviations bornées dans toutes les directions, avec une constante C indépendante de la direction (quitte à diviser par $\|v\|$ dans (32).

Définition 10.7. — On dit que l'homéo $f \in \text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$ a des déviations bornées par rapport à $\text{rot}(\tilde{f})$ s'il existe $R > 0$ tel que pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \geq 1$, on ait

$$d(\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}, n \text{rot}(\tilde{f})) \leq R.$$

De telles propriétés de déviations bornées par rapport à $\rho(\tilde{f})$ ont été obtenues dans [AZ15b] (cas $C^{1+\alpha}$) et [LCT18] (cas général) :

Théorème 10.8 ([LCT18, theorem D]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. Alors f a des déviations bornées par rapport à $\text{rot}(\tilde{f})$.

On démontrera ce théorème très bientôt, à l'aide encore une fois de la théorie du forçage (sous-section 10.4).

Une autre propriété de déviation bornée « dans la direction opposée à celle du segment » est vraie pour les homéos ayant comme ensemble de rotation un segment de pente irrationnelle et une extrémité rationnelle [LT24, Théorème 1.3]. Il existe également des résultats de déviations bornées pour les homéos du tore homotopes aux twists de Dehn [AZTG14].

La collection de (contre)-exemples qui vient montre que c'est à peu près tout ce que l'on peut espérer en matière de résultats de déviations bornées pour le tore.

10.2. Exemples d'homéos à déviations non bornées

On a déjà évoqué un exemple d'homéo (en fait, le temps 1 d'un flot) à déviations non bornées dans une direction irrationnelle (voir la remarque 7.15). Donnons d'autres exemples.

10.2.1. Rotations fibrées à la Furstenberg. — On peut trouver des exemples d'homéos à déviations non bornées en choisissant comme il faut les paramètres $\tilde{\phi}$ et α de l'exemple $\tilde{f}_{\phi,\alpha}$ décrit en (28) : en se rappelant que (voir (29))

$$\tilde{f}_{\phi,\alpha}^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + S_n^\phi(y) \\ y + n\alpha \end{pmatrix},$$

on voit qu'il y a déviations bornées par rapport au vecteur de rotation $(\int_{\mathbb{S}^1} \phi, \alpha)$ si (et seulement si) la suite $S_n^\phi(y) - n \int_{\mathbb{S}^1} \phi$ est non bornée. Furstenberg a démontré dans [Fur61] qu'on peut effectivement trouver de tels couples (ϕ, α) , avec ϕ analytique. On pourra consulter le cours [Cro06] de Sylvain ou l'habilitation [Bég11, chapitre 2] de François pour plus de détails. Cette méthode est à l'origine de nombreux exemples éclairants, voir par exemple [Her83, Fay02, Jäg09a].

La propriété de l'homéo d'avoir un ensemble de rotation réduit à un point est assez remarquable pour mériter un nom :

Définition 10.9. — On dit que $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ est une *pseudo-rotation* si son ensemble de rotation est réduit à un point $\{v\}$. Si v est à coordonnées rationnelles, cette pseudo-rotation est dite *rationnelle*, sinon on l'appelle *irrationnelle*.

10.2.2. Utilisation d'un domaine errant. — On n'a pas encore parlé de suspensions : on peut définir un flot sur un tore abstrait à partir d'un homéo $g \in \text{Homeo}(\mathbf{S}^1)$ de la manière suivante : on définit le flot vertical constant $X \equiv (0, 1)$ sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, et on quotiente ce flot (et l'ensemble où il est défini) par la relation d'équivalence $\sim$ identifiant $(\alpha, t + 1)$ avec $(g(\alpha), t)$. On voit que l'ensemble quotient $T = (\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}) / \sim$ est une variété topologique, et un calcul de caractéristique d'Euler montre que ça ne saurait être autre chose qu'un tore. On vérifie facilement que le champ de vecteurs X descend en un champ de vecteurs sur T , duquel on peut considérer le flot $(\phi_X^t)_t$.

Si on choisit comme homéo f un exemple de Denjoy, celui-ci possède un intervalle errant I (i.e. disjoint de tous ses itérés) dont l'orbite par le flot est un ouvert $D = \phi_X^{\mathbf{R}}(I \times \{0\})$ (en jaune sur la figure 15). La construction de Denjoy permet également de supposer que l'orbite de I est dense, donc que D est un ouvert dense de T . Du fait que I est errant on déduit que le flot $\phi_X : (\alpha, t) \mapsto \phi_X^t(\alpha)$ induit un homéo entre $I \times \mathbf{R}$ et D . Ce qui nous intéresse ici est que le relevé de D au revêtement universel de T est non borné, plus précisément le relevé de $\phi_X^{\mathbf{R}}(I \times \{0\})$ est lui-même non borné. Attention : à partir de maintenant, on ne voit plus le flot $(\phi_X^t)_t$ comme un objet dynamique mais seulement comme un moyen de paramétrer le disque illimité D .

L'ouvert $I \times \mathbf{R}$ est homéomorphe au plan $\mathbf{R}^2$ via une application qu'on note h , qui ne change pas la seconde coordonnée. On peut alors définir un flot $\psi_0^t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ donné en coordonnées polaires par $\psi_0^t(r, \theta) = (r, \theta + t\vartheta(r))$, où $\vartheta : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ est continue. La conjuguée $(\phi_X h)\psi_0^t(\phi_X h)^{-1}$ est un flot de D ; en travaillant un peu on voit que si ϑ tend suffisamment vite vers 0, alors ce flot de D se prolonge continûment en l'identité sur $D \cup \partial D = T$. On appelle ψ^t le flot de T ainsi obtenu.

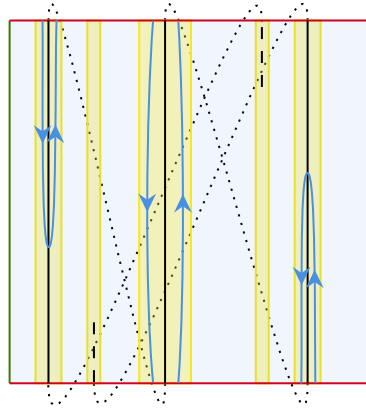


FIGURE 15. La suspension d'un Denjoy : l'ensemble jaune est un disque du tore dont le relevé au plan est non borné, ce disque est un voisinage de la droite noire. L'orbite bleue par le flot ψ^t est de déviation grande dans le tore.

Choisissons la fonction ϑ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ mais, comme au-dessus, tendant suffisamment vite vers 0 en $+\infty$. Alors l'orbite (en bleu sur la figure 15) d'un point $(n, \pi/2)$ de l'axe des ordonnées rencontre le point $(n, 3\pi/2)$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on crée ainsi des orbites de déviation arbitrairement grande par rapport à 0.

Exercice 10.10. — Montrer que $\text{rot}(\psi^1) = \{0\}$. Indication : on pourra utiliser le fait que les points extrémaux de $\text{rot}(\psi^1)$ sont réalisés par des orbites.

Remarque 10.11. — Dans l'exemple qu'on vient de créer, l'ensemble des points fixes est *essentiel* :

Définition 10.12. — On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbf{T}^2$ est *inessentiel* s'il est inclus dans un disque topologique ouvert (ou, de manière équivalente, s'il possède un voisinage dans lequel tout lacet est contractile dans $\mathbf{T}^2$). Il est dit *essentiel* s'il n'est pas inessentiel (ou, de manière équivalente, si chacun de ses voisinages est homotopiquement non trivial).

Cette propriété d'essentialité des points fixes est le mécanisme permettant de créer de nombreux exemples, et une hypothèse qui commence à être classique pour des énoncés de théorèmes (voir par exemple les théorèmes 10.14, 10.23, 11.6 ou 20.10).

On peut faire de jolies variations sur cet exemple : en utilisant cette idée de manière intelligente, Mary Rees a démontré dans [Ree81] l'existence d'homéos du tore d'entropie positive et sans fer à cheval (voir la section 16.7) ; des variations de variations sont sources de nombreux exemples intéressants, voir les travaux de François, Sylvain, Frédéric et Tobias [BCLR07, BCJLR09], ainsi que celui d'Alejandro et Martin [PS13].

Voir aussi [Koc21b, section 3] pour d'autres exemples basés sur l'utilisation de domaines errants, on en reparlera. D'ailleurs, dans son cours [Bég07, proposition 2.13], François décrit, pour tout couple d'irrationnels (α, β) et à grands coups de Denjoy, un exemple de Béguin, Crovisier et Le Roux d'homéo dont l'ensemble de rotation a (α, β) comme point extrémal.

10.2.3. Un peu mieux : le disque illimité de Koropecki-Tal. — On peut améliorer l'exemple précédent en produisant un disque D qui est non seulement non borné (ou illimité) au revêtement universel, mais qui de plus rencontre tout domaine fondamental de $\mathbf{T}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. C'est ce qui est fait dans l'article d'Andrés et Fabio [KT14a], la preuve est un peu astucieuse et assez peu technique. Andrés et Fabio définissent alors un homéo du disque D qui se prolonge au bord, de manière un peu plus maligne que celle qu'on a présentée, en utilisant un résultat de Katok⁽²⁾, ce qui donne l'exemple suivant :

Théorème 10.13 ([KT14a]). — *Il existe un difféo C^∞ de $\mathbf{T}^2$ préservant l'aire et ergodique, homotope à l'identité, d'ensemble de rotation réduit à 0 et tel que pour Lebesgue presque tout $x \in \mathbf{T}^2$, l'orbite de ses relevés sous un relevé du difféo rencontre tout domaine fondamental $v + [0, 1]^2$ de $\mathbf{T}^2$ (pour $v \in \mathbf{Z}^2$).*

Comme on l'a dit plus tôt, construire un tel exemple n'est possible que si on s'autorise à avoir un ensemble de points fixes qui fait le tour du tore :

Théorème 10.14 ([KT14b], [LCT18, Corollary I]). — *Si f est un homéo du tore homotope à l'identité, préservant l'aire, dont l'ensemble de rotation est réduit à $\{0\}$, et dont l'ensemble des points fixes est inessentiel (c'est-à-dire contenu dans un disque topologique), alors f est à déviations bornées dans toutes les directions rationnelles.*

Encore une fois, la preuve de ce théorème fait intervenir la théorie du forçage.

⁽²⁾En fait, quitte à pré-conjuguer par une application éloignant assez les points du bord du disque, on peut toujours faire en sorte qu'un homéo du disque unité fermé valant l'identité au bord donne un homéo de D se prolongeant continûment en l'identité sur ∂D .

10.2.4. De la méthode d'Anosov-Katok. — Une autre technique permet d'obtenir des exemples d'homéos du tore avec des déviations non bornées : la méthode d'approximations par conjugaison d'Anosov-Katok. Le principe est de faire des conjugaisons successives de rotations rationnelles du tore, dont l'angle converge vers un nombre irrationnel. Si on fait les choses bien, ces conjuguées vont converger et produire un exemple d'homéo dont l'ensemble de rotation est réduit à un point $\{v\}$ avec $v \in \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$. Depuis son apparition dans les années 70 [AK70b, AK70a], cette idée a été développée dans de très nombreux travaux et est une source d'exemples précieuse. L'introduction la plus facile à lire à cette méthode est peut-être [LRS22] et la lectrice voulant un survol plus complet pourra consulter [FK04].

Dans le cas qui nous intéresse, Andrés et Alejandro ont utilisé cette méthode dans le court papier [KK09] pour produire une pseudo-rotation avec des déviations non bornées dans toutes les directions.

Définition 10.15. — Un homéo $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ est dit à *propagation faible* si pour tout ouvert $U \subset \mathbf{R}^2$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\tilde{f}^n(U)$ soit ε -dense dans une boule de rayon R .

En particulier, un homéo à propagation faible n'est à déviations bornées dans aucune direction de $\mathbf{R}^2$.

Théorème 10.16 ([KK09]). — *Il existe des pseudo-rotations irrationnelles de $\mathbf{T}^2$ à propagation faible.*

Dans un article récent, Nastaran a amélioré cet exemple pour montrer que les *ensembles de rotation généralisés* ou *lents* de tels exemples peuvent prendre la forme de n'importe quel convexe centre-symétrique [Ein24].

Définition 10.17. — Soit $D = [0, 1]^2$ et $\tilde{x}_0 \in D$. Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ et $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbf{R}^2$. Un *ensemble de rotation généralisé* ou *lent* de $\tilde{f}$ est une limite de Hausdorff

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^{n_k}(D) - \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_0)}{\text{diam}(\tilde{f}^{n_k}(D))},$$

où $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers telle que $\lim_k \text{diam}(\tilde{f}^{n_k}(D)) = +\infty$.

Théorème 10.18 ([Ein24]). — *Il existe $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ tel que (à translation près) tout convexe compact possédant une symétrie centrale et de diamètre 1 est un ensemble de rotation généralisé de f . De plus, f agit paraboliquement et non proprement sur $\mathcal{C}^+(\mathbf{T}^2)$ (voir page 121 pour une définition et une discussion).*

10.3. Applications

Il s'est avéré, la masse de travaux sur le sujet s'étoffant peu à peu, que la notion de déviations bornées, au-delà de l'intérêt propre des énoncés la démontrant dans plusieurs contextes différents, donne le bon vocabulaire pour exprimer d'autres résultats ayant à première vue peu de rapports avec elle, et est par conséquent devenu un outil fondamental dans le développement de la théorie de la rotation sur le tore et l'anneau. Par exemple, tant pour le cas du tore que pour celui de l'anneau fermé, les déviations bornées ont été le point clé dans les preuves de la forme forte de la conjecture de Boyland [LCT18, AZ15b, CT23] (dont on reparlera à l'exercice 10.26 et dans la partie sur le genre plus grand).

Théorème 10.19 (conjecture de Boyland, [LCT18, corollary F])

Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ préservant l'aire λ et d'ensemble de rotation d'intérieur non vide. Alors $\rho_{\tilde{f}}(\lambda) \in \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$.

La preuve de ce théorème fait intervenir le lemme d'Atkinson, outil désormais classique de la théorie de la rotation, et montre au passage un résultat de réalisation des points extrémaux de $\text{rot}(\tilde{f})$ par des compacts, une version du théorème 9.4 pour les points extrémaux donc : voir le corollaire 10.25.

Les déviations bornées sont également utilisées comme critère pour les jolis résultats de semi-conjugaison des homéos du tore à une rotation du cercle [JP15, JT17, Koc21b] ou du tore [Jäg09b, Jäg09a, JS06] (voir également le court survol de Pablo [Dáv16]), par exemple :

Théorème 10.20 ([Jäg09b, theorem C]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ préservant l'aire tel que $\text{rot}(\tilde{f}) = \{\rho\}$. Supposons que f soit à déviations bornées dans toutes les directions de $\mathbf{R}^2$ et que ρ soit totalement irrationnel (i.e. n'appartient à aucune droite de pente rationnelle passant par l'origine). Alors f est semi-conjugué à la rotation d'angle ρ sur $\mathbf{T}^2$.*

Ce résultat est bien sûr une généralisation en dimension 2 du théorème de semi-conjugaison de Poincaré pour les homéos du cercle.

Exercice 10.21. — Montrer que si un homéo est semi-conjugué à une rotation du tore, alors il est à déviations bornées dans toutes les directions.

Comme on a des exemples qui sont à déviations non bornées (e.g. le théorème 10.16), il faut bien sûr ajouter cette hypothèse pour espérer avoir un résultat assurant la semi-conjugaison. L'hypothèse de préservation de l'aire est elle aussi nécessaire, puisqu'il y a des contre-exemples dans le cas errant, voir [Koc21b, section3]; les travaux [JT17, Koc21b] se concentrent d'ailleurs sur la relaxation de cette hypothèse.

La preuve est en elle-même intéressante, puisqu'elle consiste à exhiber un pseudo-feuilletage du tore invariant par la dynamique, dont les feuilles sont indexées par $\mathbf{S}^1$ et permutées par la dynamique selon le même ordre que la rotation.

Une idée de la preuve du théorème 10.20. — Exposons l'argument-clé de la preuve, illustré à la figure 16. Supposons que l'homéo est à déviations bornées dans la direction horizontale. À $a \in \mathbf{R}$ on associe l'ensemble $E_a =]-\infty, a] \times \mathbf{R}$. Si C est la constante apparaissant dans la définition de déviations bornées, on voit que $E'_a = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{f}^n(E_a)$ est disjoint de l'ensemble $]C + a, +\infty[\times \mathbf{R}$. Soit F la composante connexe du complémentaire de E'_a contenant ce dernier ensemble; c'est un disque topologique ouvert. Son bord ∂F_a est un sous-ensemble fermé et connexe du plan, d'intérieur vide, invariant par l'action de $\{0\} \times \mathbf{Z}$ et par $\tilde{f}$, et séparant le plan (son complémentaire a exactement deux composantes connexes). On montre aussi qu'il est irréductible : il ne contient pas strictement d'autre fermé ayant les propriétés qu'on vient d'énoncer (c'est d'ailleurs pour ça qu'on n'a pas pris le bord de E'_a ; l'action de construction de F_a permet de « couper les éventuels cheveux » de $\partial E'_a$). On projette alors les ensembles ∂F_a sur des ensembles $\xi_a \subset \mathbf{T}^2$ qui sont des compacts essentiels. Avec un peu de travail, on montre que ces ensembles sont deux-à-deux disjoints ou égaux, et cela permet de construire une partition de $\mathbf{T}^2$ en des ensembles $\xi'_a \subset \mathbf{T}^2$ (cette opération « perruque » consiste essentiellement à recoller les cheveux qu'on avait coupés à l'étape d'avant). Les ensembles ξ'_a sont indexés par $\mathbf{S}^1$; la dernière étape consiste à montrer que le dynamique permute comme on l'imagine ces éléments de la partition : $f(\xi'_a) = \xi'_{a+\text{pr}_1(\rho)}$ (où $\text{pr}_1(\rho)$ désigne la

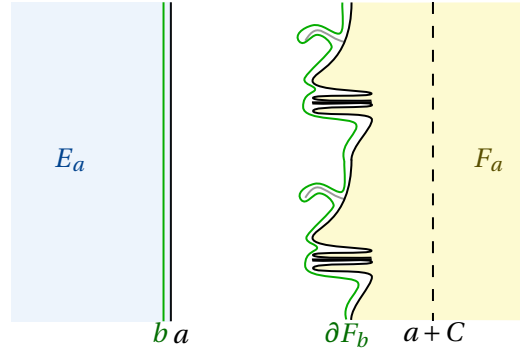


FIGURE 16. La construction de la preuve du théorème 10.20. On a représenté les « cheveux », qui sont dans le bord de E'_a mais pas dans celui de F_a , en gris.

première coordonnée du vecteur de rotation ρ). On répète alors l'opération dans la direction horizontale pour construire la semi-conjugaison à la rotation de $\mathbf{T}^2$ de vecteur ρ . $\square$

En l'absence de déviations bornées, la dynamique est dite « entièrement essentielle ». Mise en garde terminologique : attention aux différentes notions relatives au mot « essentiel » qui concernent les sous-ensembles de $\mathbf{T}^2$, les homéos et les points de $\mathbf{T}^2$, à chaque fois avec une signification différente...

Définition 10.22 ([KT14c]). — Un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbf{T}^2$ est dit *entièrement essentiel* si son complémentaire est une union de disques topologiques ouverts.

Un homéo $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ est dit *entièrement essentiel* s'il n'est à déviations bornées dans aucune direction rationnelle, et si son ensemble de points fixes est inessentiel.

Un point $x \in \mathbf{T}^2$ est dit *essentiel* pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2)$ si pour tout voisinage V de x , l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ est essentiel, c'est-à-dire contient un lacet non contractile dans $\mathbf{T}^2$. On note $\text{Ess}(f)$ l'ensemble des points essentiels pour f .

Voici une jolie classification des homéos du tore non errants⁽³⁾ par Andrés et Fabio :

Théorème 10.23 ([KT14c, theorem A]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ non errant. Alors il entre dans un des cas suivants :

- (1) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Fix}(f^k)$ soit entièrement essentiel, et dans ce cas il existe un relevé $\tilde{f}$ de f tel que $\text{rot}(\tilde{f}) = \{0\}$;
- (2) il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que f^k soit annulaire (défini après la définition 10.2) ;
- (3) l'ensemble $\text{Ess}(f)$ est connexe et entièrement essentiel, de plus toute composante connexe U de son complémentaire est un disque périodique dont le diamètre des relevés à $\mathbb{R}^2$ est borné par une constante dépendant uniquement de sa période.

Comme conséquence de leurs techniques, mentionnons une amélioration de 1. du théorème 8.1 de réalisation de Franks :

Théorème 10.24 ([KT14c, theorem D]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ non errant tel que ni (1) ni (2) du théorème 10.23 ne soient vrais (par exemple si $\text{rot}(\tilde{f})$ n'est pas inclus dans un segment de pente rationnelle contenant un point rationnel). Alors

⁽³⁾Un homéo f est dit *non errant* si tout ouvert est non errant pour f (autrement dit, il a un itéré positif qui l'intersecte).

- tout point de $\text{rot}(\tilde{f})$ réalisé par une orbite périodique est réalisé par une orbite périodique de $\text{Ess}(f)$;
- si $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$ est telle que $\rho_{\tilde{f}}(\mu) \notin \mathbf{Q}^2$, alors $\text{supp}(\mu) \subset \text{Ess}(f)$.

Au lecteur désirant se lancer dans la lecture recommandée de l'article [KT14c], un itinéraire conseillé : le « lemme triple » de [KLCT19] donne une preuve bien plus digeste et élémentaire de [KT14c, théorème B], qui est le résultat technique central du papier. On reparlera de ces histoires plus tard, en genre plus grand (théorème 15.2).

Enfin, très récemment, la communauté s'est intéressée à la caractérisation de l'action induite par les homéos de surfaces sur le graphe fin des courbes et à sa classification en action loxodromique, parabolique ou elliptique (on en parlera en long, large et sans intersections transverses au chapitre 19), un sujet qui présente plusieurs liens avec les déviations bornées. Par exemple, un homéo du tore homotope à l'identité agit de manière elliptique sur le graphe fin des courbes si et seulement s'il est à déviations bornées dans une certaine direction rationnelle (théorème 19.16).

10.4. Quelques preuves

Voilà la preuve tant attendue du théorème 10.8. On reprend la preuve du théorème 9.1 là où on l'avait laissée (à la fin donc).

Démonstration du théorème 10.8. — La preuve du théorème 10.8 se base sur le même type d'arguments que celle du théorème 9.1. Supposons qu'il existe $L > 0$ « grand » ainsi que $n \in \mathbf{N}$ et $\tilde{x} \in \mathbf{R}^2$ tels que $d(\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}, n \text{rot}(\tilde{f})) \geq L$. Considérons la trajectoire transverse $\gamma = \tilde{\gamma}_{\mathcal{F}}^n(\tilde{x})$. Si cette trajectoire possède une auto-intersection transverse en $\gamma(t_0) + v = \gamma(t_1)$, avec $v \in \mathbf{Z}^2$, t_0 proche de 0 et t_1 proche de n , alors la version rotationnelle du théorème A.15 nous donne un fer à cheval rotationnel en temps $m \simeq t_1 - t_0$ et en particulier l'existence d'un vecteur v/m dans l'ensemble de rotation. Un petit calcul permet de voir que si L est assez grand et m assez proche de n , alors le vecteur v/m n'est pas dans l'ensemble de rotation $\text{rot}(\tilde{f})$, ce qui est une contradiction.

Si une telle intersection transverse n'existe pas, on en crée une artificiellement en se servant du chemin γ^* et de la proposition fondamentale (voir les figures 13 et 17) : le chemin γ a une intersection transverse avec $\gamma^* + v_0$ en $\gamma(t_0) = \gamma^*(t'_0) + v_0$, avec t_0 « proche » de 0 ; de même γ a une intersection transverse avec $\gamma^* + v_1$ en $\gamma(t_1) = \gamma^*(t'_1) + v_1$, avec t_1 « proche » de n . Quitte à allonger le début et la fin de $\gamma^* : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^2$, on voit qu'il existe v_2 « proche » de $v_1 - v_0$, tel que $\gamma^*|_{[0, t'_0]} + v_2$ ait une intersection transverse avec $\gamma^*|_{[t'_1, T]}$. Ainsi, le chemin $(\gamma^*|_{[0, t'_0]} + v_0)\gamma|_{[t_0, t_1]}(\gamma^*|_{[t'_1, T]} + v_1)$ est admissible, transverse et possède une auto-intersection transverse ; comme au-dessus un calcul montre que si L est assez grand, alors on crée un nouveau vecteur de rotation en dehors de l'ensemble de rotation, ce qui est bien sûr une contradiction. $\square$

Donnons une conséquence du théorème 10.8 de déviations bornées qu'on vient de démontrer. Étant donné un convexe compact C du plan, une *droite d'appui* est la donnée d'une forme affine $\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\phi(C)$ est inclus dans $\mathbf{R}_-$ et contient 0. Dans ce cas, le convexe C touche la droite $\{\phi = 0\}$ mais ne la traverse pas. Par la suite, on choisit ϕ telle que la distance entre les deux droites $\phi^{-1}(0)$ et $\phi^{-1}(1)$ vaille 1.



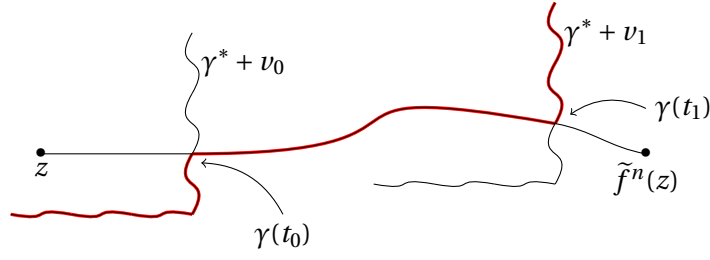


FIGURE 17. Comment créer une trajectoire $\mathcal{F}$ -transverse admissible proche de la trajectoire γ de z ayant une auto-intersection (en rouge).

Corollaire 10.25 ([LCT18, proposition E]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ et $\tilde{f}$ un relevé de f tel que $\text{rot}(\tilde{f})$ est d'intérieur non vide. Considérons une droite d'appui ϕ de $\text{rot}(\tilde{f})$. Soit

$$X_\phi = \overline{\bigcup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}(f) \\ \phi(\rho_{\tilde{f}}(\mu))=0}} \text{supp}(\mu)}$$

l'adhérence de l'union des supports des mesures dont le vecteur de rotation est dans la droite d'appui. Alors pour tout $x \in X_\phi$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|\phi(\tilde{f}^n(x) - x)| \leq L,$$

où L est la constante bornant les déviations dans le théorème 10.8.

Ce corollaire exprime que tout point de X_ϕ est à déviations bornées par rapport à la droite d'appui. On en déduit comme conséquence directe la conjecture de Boyland.

Exercice 10.26. — En déduire la conjecture de Boyland dans ce cadre (théorème 10.19).

Le corollaire 10.25 est l'occasion de mettre en pratique le théorème d'Atkinson, un grand classique de la théorie de la rotation. Celui-ci précise que dans le théorème de Birkhoff, il y a des temps pour lesquels non seulement les moyennes de Birkhoff sont petites, mais les sommes de Birkhoff le sont aussi. Le prix à payer est que l'observable considérée doit être réelle (ça ne marche pas pour les observables à valeurs complexes).

Théorème 10.27 ([Atk76]). — Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probas et $T : X \rightarrow X$ un automorphisme ergodique. Considérons $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable d'intégrale nulle. Alors pour tout mesurable $B \in \mathcal{B}$, tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbf{N}$, pour μ -presque tout $x \in B$, il existe $n > n_0$ tel que

$$T^n(x) \in B \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i(x)) \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration du corollaire 10.25. — Commençons par remarquer que l'ensemble des points vérifiant les conclusions du corollaire est un fermé de $\mathbf{T}^2$. Il s'agit donc de montrer qu'il est de mesure pleine pour tout $\mu \in \mathcal{M}(f)$ vérifiant $\phi(\rho_{\tilde{f}}(\mu)) = 0$.

Le fait que $\{\phi = 0\}$ est une droite d'appui à $\text{rot}(\tilde{f})$ implique que presque toute mesure ν de la décomposition ergodique d'une telle μ vérifie également $\phi(\rho_{\tilde{f}}(\nu)) = 0$. On peut donc supposer la mesure μ ergodique.

Rappelons-nous que $\text{rot}(\tilde{f}) \subset \{\phi \leq 0\}$ et que donc, par normalisation sur ϕ , la distance entre un point $x \in \phi^{-1}(\mathbf{R}_+)$ et $\text{rot}(\tilde{f})$ est supérieure à $\phi(x)$. Par conséquent, par le caractère

borné des déviations (théorème 10.8), pour tout $x \in \mathbf{T}^2$, on a

$$(33) \quad \phi(\tilde{f}^n(x) - x) \leq L.$$

Reste à montrer l'autre inégalité. Supposons celle-ci fausse : il existe un ensemble de μ -mesure positive sur lequel il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ pour lequel $\phi(\tilde{f}^{n_0}(x) - x) = L_0 < -L$. C'est là qu'intervient Atkinson : l'hypothèse $\phi(\rho_{\tilde{f}}(\mu)) = 0$ nous assure que la fonction $\phi \circ \tilde{f} - \phi$ est de moyenne nulle pour μ , on peut donc appliquer le théorème 10.27 d'Atkinson qui assure que pour μ -presque tout $x \in \mathbf{T}^2$, il existe $n \geq n_0$ tel que (on a une somme télescopique)

$$|\phi(\tilde{f}^n(x) - x)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\tilde{f}(f^i(x)) - f^i(x)) \right| < -L - L_0 :$$

le déplacement orthogonal à la droite d'appui est tout petit en temps n . Vu qu'il est très négatif au temps n_0 , il doit être très positif entre les temps n_0 et n :

$$\phi(\tilde{f}^{n-n_0}(\tilde{f}^{n_0}(x)) - \tilde{f}^{n_0}(x)) = \phi(\tilde{f}^{n_0}(x) - x) - \phi(\tilde{f}^n(x) - x) > L_0 - (-L - L_0) = L,$$

ce qui contredit (33). □

CHAPITRE 11

UN AUTRE SENS À LA RÉALISATION : UN PROBLÈME DE FORME

Le monde de la théorie de la rotation se divise en deux catégories :

- ceux qui se demandent quelles sont les propriétés dynamiques qui peuvent être lues sur l'ensemble de rotation ;
- ceux qui se demandent quels compacts sont l'ensemble de rotation de quelqu'un.

On a déjà abordé la première question et on continuera de le faire. La seconde, qui peut paraître moins intéressante à première vue, s'avère à l'usage très féconde dans la compréhension des objets en jeu (et, encore une fois, une source d'exemples à avoir en tête).

Voilà donc la question précise qui nous intéresse, qui est à ce jour largement ouverte :

Problème 11.1. — *Quels sont les sous-ensembles compacts convexes de $\mathbf{R}^2$ qui sont l'ensemble de rotation d'un certain $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$?*

En particulier, on ne sait toujours pas s'il existe un homéo dont l'ensemble de rotation est à bord lisse...

11.1. L'intérieur vide

Première modalité de déclinaison de la question 11.1 : que peut-on dire si on se restreint aux compacts d'intérieur vide ?

Les recherches sont azimuthées par une conjecture due à John Franks et Michał Misiurewicz, elle-même motivée par leur théorème décrivant le cas des flots. On peut définir l'ensemble de rotation d'un flot en adaptant la définition 1.2 et remplaçant $\mathbf{N}$ par $\mathbf{R}_+$, mais on peut aussi se contenter de prendre l'ensemble de rotation de son temps 1 et celui-ci coïncidera avec l'adaptation sus-mentionnée.

Théorème 11.2 ([FM90]). — *Soit $(\phi^t)_t$ un flot continu sur $\mathbf{T}^2$ et $(\tilde{\phi}^t)_t$ son relevé à $\mathbf{R}^2$. Alors $\text{rot}(\tilde{\phi})$ a une des formes suivantes :*

- (a) *un singleton ;*
- (b) *un segment passant par l'origine 0 et de pente rationnelle ;*
- (c) *un segment dont une des extrémités est 0 et de pente irrationnelle.*

Et donc par extrapolation :

Conjecture 11.3 ([FM90]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ dont l'ensemble de rotation est un segment non trivial I . Alors :*

- (A) *si I est de pente irrationnelle, alors une de ses extrémités est rationnelle ;*

(B) si I est de pente rationnelle, alors il contient un point rationnel.

Mentionnons que le survol de François [Bég07] donne des idées de preuve du théorème 11.2.

La résolution de cette conjecture a motivé bon nombre de travaux depuis son énoncé. Tout d'abord, Patrice et Fabio ont démontré un cas particulier de (A) :

Théorème 11.4 ([LCT18, theorem C]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ et $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbf{R}^2$. Alors $\partial \text{rot}(\tilde{f})$ ne contient aucun segment de pente irrationnelle contenant un point rationnel dans son intérieur.

C'est malheureusement à ce jour la seule restriction connue pour un sous-ensemble convexe compact du plan à être un ensemble de rotation.

Un cas de la conjecture 11.3 de Franks-Misiurewicz (la deuxième partie de (A)) a été infirmé par Artur Ávila dans un exemple annoncé vers 2014 mais toujours pas publié 12 ans plus tard, à l'aide de la méthode d'Anosov-Katok (je compte sur le lecteur pour ne pas avoir déjà oublié la sous-section 10.2.4) :

Théorème 11.5 (Ávila). — Il existe $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ un C^∞ -difféo du tore, préservant l'aire, minimal, et tel que $\text{rot}(f)$ est un segment non trivial contenu dans une droite de pente irrationnelle et ne contenant aucun point rationnel.

Il reste donc un cas de la conjecture à traiter, à savoir (B). Cette question continue à obséder (à juste titre) certains collègues, et a vu des avancées notoires : si contre-exemple au cas (B) il y a, alors il n'est pas minimal [KPS21, Koc21a] et est à déviations non bornées dans toutes les directions de $\mathbf{R}^2$ (et donc en particulier celle orthogonale à la direction de I) [PS20]. Attention : Jarek Kwapisz a annoncé la résolution du cas (B) de la conjecture dans [Kwa02], mais la preuve a un problème que n'a jamais pu être réparé (le lemme 6.4).

Terminons par un dernier énoncé : si on suppose que l'homéo est hamiltonien (i.e. préserve l'aire et dont le vecteur de rotation de l'aire est zéro), alors on a une version beaucoup plus forte de la conjecture de Franks-Misiurewicz :

Théorème 11.6 ([LCT18, theorem 70]). — Soit f un homéo hamiltonien de $\mathbf{T}^2$ (de relevé hamiltonien noté $\tilde{f}$). Alors il rentre dans l'un des trois cas suivants :

- $\text{rot}(\tilde{f})$ est d'intérieur non vide et $\rho_{\tilde{f}}(\text{Leb})$ est dans son intérieur;
- $\text{rot}(\tilde{f}) = \{tu \mid a \leq t \leq b\}$, avec $a < 0 < b$ et $u \in \mathbf{Z}^2$;
- $\text{rot}(\tilde{f}) = \{(0, 0)\}$ et si l'ensemble des points fixes de f est inessentiel, alors $\tilde{f}$ est à déviations bornées dans toutes les directions de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

11.2. L'intérieur non vide

Seconde modalité de déclinaison de la question 11.1 : que peut-on dire si on se restreint aux compacts d'intérieur non vide?

Comme on l'a déjà mentionné, la seule restriction connue est fournie par le théorème 11.4. Dans l'autre sens, on a une certaine quantité d'exemples. Le premier est dû à Jarek Kwapisz :

Théorème 11.7 ([Kwa92]). — Tout polygone convexe du plan (avec un nombre fini de côtés) à sommets rationnels est l'ensemble de rotation d'un C^∞ -difféo du tore.

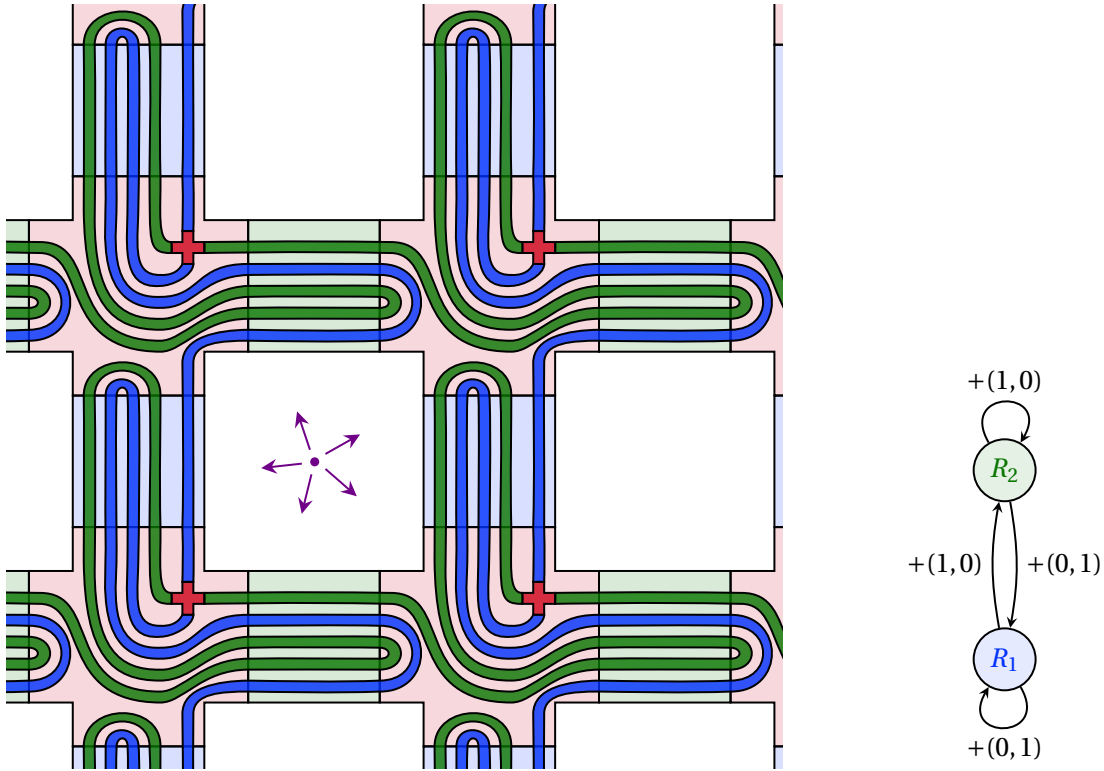


FIGURE 18. Un cas particulier de l'exemple de Kwapisz, qui donne un homéo dont l'ensemble de rotation est un triangle rationnel. À droite : le graphe de Markov associé

Ce théorème se contentera d'une preuve sans parole décrite à la figure 18, qu'on retrouvera commentée dans le survol de François [Bég07].

Exercice 11.8. — Montrer que l'ensemble de rotation de l'exemple décrit à la figure 18 est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. En déduire, pour tous $p, q \in \mathbf{N}^*$, en utilisant un revêtement fini de $\mathbf{T}^2$, un exemple d'homéo dont l'ensemble de rotation est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, p)$ et $(q, 0)$.

Exercice 11.9. — Dédurre du théorème de Jarek qu'il existe un homéo f du tore sans point fixe et n'admettant aucune courbe fermée essentielle disjointe de son image (exemple dû à Bestvina-Handel [BH92], répondant à une question de Lucien Guillou).

Jarek a adapté la méthode de preuve de ce théorème pour produire un exemple d'ensemble de rotation d'intérieur non vide qui n'est pas un polygone à un nombre fini de côtés :

Théorème 11.10 ([Kwa95b]). — *Il existe un polygone convexe du plan avec un nombre infini de côtés, avec deux points d'accumulation, qui est l'ensemble de rotation d'un C^1 -difféo du tore (voir la figure 19). Tous les points extrémaux sont rationnels sauf les deux points d'accumulation qui valent $(0, \rho)$ et $(\rho, 0)$ avec $\rho \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{Q}$.*

Voir aussi [PBC25] pour d'autres propriétés de cet exemple.

Un exemple similaire a été trouvé dans un travail de Philip, André et Toby [BdCH16] : ils y étudient une famille à 1 paramètre d'homéos du tore et sont capables de déterminer explicitement les ensembles de rotation de tous les éléments de cette famille, qui sont d'intérieur

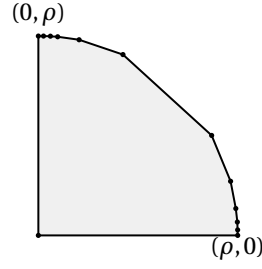


FIGURE 19. L'ensemble de rotation produit par Kwapisz pour son exemple non rationnel. Les points sont les points extrémaux du convexe.

non vide et dont la plupart (au sens une famille générique pour Hausdorff) sont du type du second exemple de Jarek (théorème 11.10).

Dans un court article [BCLR19], François, Sylvain et Frédéric ont généralisé un lemme de [Kwa02] et montré que l'image d'un ensemble de rotation par certaines applications projectives est elle-même un ensemble de rotation.

Dans un travail récent [GST24], en se basant sur des idées d'André de Carvalho, Andrés Koropecski et Fabio Tal jamais publiées, Alejo et Fabio ont montré que si un ensemble convexe compact d'intérieur non vide est l'ensemble de rotation d'un homéo du tore, alors c'est aussi l'ensemble de rotation d'un homéo du tore préservant l'aire. La preuve consiste à passer au quotient par la relation « les orbites des deux points restent à distance bornée dans le passé et le futur ».

Problème 11.11. — *Que peut-on dire de plus de l'homéo obtenu par passage au quotient? A-t-il un nombre fini de mesures d'entropie maximale? Est-ce que son entropie vaut $\sup_{\rho_{\tilde{f}}(\mu) \notin \mathbb{Q}^2} h(\mu)$?*

On verra plus tard à la proposition 12.1 que l'application $\tilde{f} \mapsto \text{rot}(\tilde{f})$ est continue en tout $\tilde{f}$ dont l'ensemble de rotation a de l'intérieur.

Exercice 11.12. — Montrer que cela, combiné à l'existence d'homéos dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide (par exemple voir la section 2.3 ou la sous-section 7.2.2), implique l'existence d'ensembles de rotation dont l'ensemble des points extrémaux n'est pas inclus dans $\mathbb{Q}^2$.

11.3. Quelques remarques numériques

L'approximation numérique de l'ensemble de rotation est un problème difficile, d'autant plus si on cherche à avoir des résultats certifiés, du type « on montre que l'ensemble de rotation de f est inclus dans tel ensemble » ou « on montre que l'ensemble de rotation de f contient tel ensemble ». Le problème fondamental de tout algorithme de ce type est de se défaire du phénomène classique d'explosion du temps de calcul : comme souvent en dynamique, un algorithme naïf sera de complexité réductoirement exponentielle.

La première tentative pour obtenir un algorithme raisonnable n'est pas très concluante [Gui15] : la remarque initiale est que si l'homéo préserve l'aire, en calculant des orbites de points au hasard, on va systématiquement retrouver le vecteur de rotation de l'aire et jamais le reste de l'ensemble de rotation. L'algorithme proposé dans [Gui15] utilise des erreurs d'arrondi grossières pour casser ce phénomène. C'est une manière assez brutale de faire

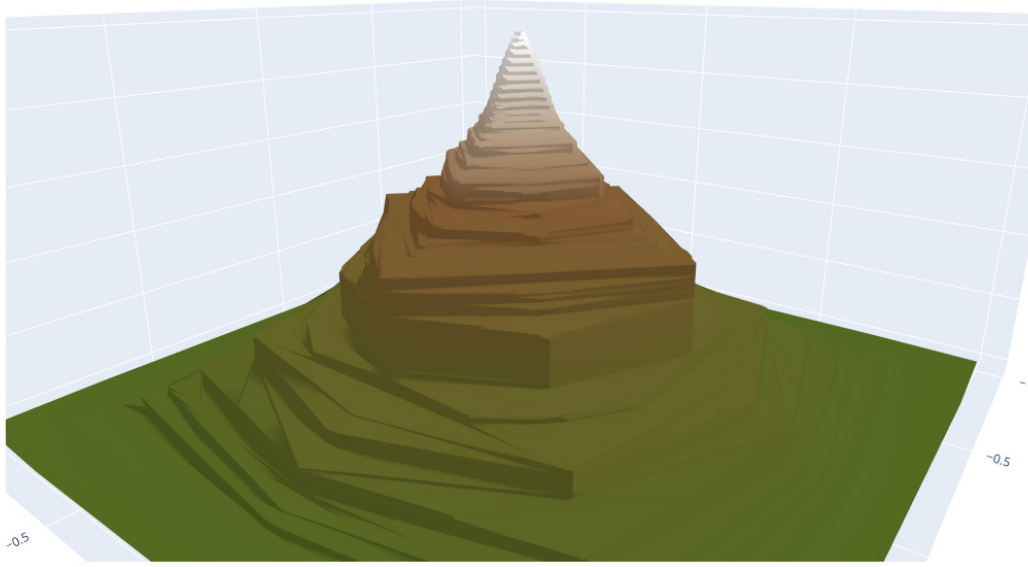


FIGURE 20. Simulation de l'ensemble de rotation du *kicked Harper model* : chaque tranche horizontale $\{z = 1 - \alpha\}$ représente une approximation de $\text{rot}(\tilde{f}_{\alpha,\alpha})$, voir la définition 30. On observe un phénomène du type *mode locking*.

les choses, qui ne permet aucun contrôle sur la qualité de l'approximation obtenue. Dans [PPGJ17], Katja Polotzek, Kathrin Padberg-Gehle et Tobias Jäger ont décrit un algorithme bien plus raisonnable pour obtenir une approximation extérieure certifiée de l'ensemble de rotation. Il reste cependant de convergence très lente, et on a commencé un projet avec Isaia Nisoli pour accélérer leur algorithme (le but à terme étant d'avoir également un algorithme permettant une approximation intérieure certifiée), voir la figure 20 pour nos résultats partiels.

CHAPITRE 12

L'ENSEMBLE DE ROTATION VU COMME APPLICATION

Dans la preuve du point 1. du théorème 8.1, on obtient en fait un point périodique *stable*, c'est-à-dire qui persiste sous de petites perturbations de f . Cela démontre la semi-continuité qui manquait au corollaire 7.9 pour avoir la continuité de rot en les homéos dont l'ensemble de rotation a de l'intérieur :

Proposition 12.1 ([Fra89, LM91]). — *L'application $\text{rot} : \text{Homeo}(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ (l'ensemble des compacts du plan) est continue en tout homéo dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. En particulier, l'application $\tilde{f} \mapsto \text{int}(\text{rot}(\tilde{f}))$ est continue.*

Certains ont cru à un moment qu'il se pourrait que l'intérieur de l'ensemble de rotation soit le seul invariant continu de « conjugaison faible », mais ce n'est pas le cas : voir [LRPSW24].

Rappelons qu'on a vu à la proposition 7.11 que l'application $\tilde{f} \mapsto \text{rot}(\tilde{f})$ n'est pas continue.

On peut se demander quelle est la forme de l'ensemble de rotation d'un homéo générique, dans le sens suivant :

Définition 12.2. — Une propriété est dite *générique* dans un espace topologique métrisable X si elle est vérifiée sur au moins une intersection dénombrable d'ouverts denses de X .

Cette question a été résolue par Alejandro dans le cas général, puis en collaboration avec Andrés dans le cas conservatif :

Théorème 12.3 ([Pas14, GK17]). — *La propriété « avoir un ensemble de rotation qui est un polygone à un nombre fini de côtés et à sommets rationnels » est vérifiée sur un ouvert dense de $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2, \lambda)$ (où $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2, \lambda)$ désigne l'ensemble des éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ préservant la mesure d'aire λ). De plus, la propriété « avoir un ensemble de rotation d'intérieur non vide » est elle aussi vraie sur un ouvert dense de $\text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2, \lambda)$.*

En fait, la preuve de Alejandro [Pas14] dit un peu plus : elle passe par le fait que l'ensemble de rotation d'un difféo axiome A est un polygone à un nombre fini de côtés et à sommets rationnels. Notre preuve avec Andrés [GK17] est plus simple et directe (un petit papier!) et est basée sur la généricité de la propriété de pistage [GL18], avec des remarques sur le pseudo-ensemble de rotation [BS88].

Problème 12.4. — *Que dire du cas C^r -générique pour $r \geq 1$?*

Cette question intéressante a fait l'objet de nombreux travaux qui étudient entre autre quels sont les critères pour que l'ensemble de rotation soit localement constant ou non

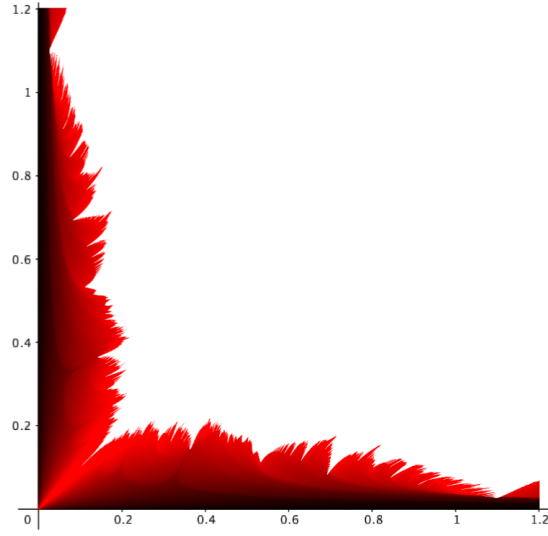


FIGURE 21. Simulation de l'ensemble des paramètres (α, β) pour lesquels $\text{int}(\text{rot}(\tilde{f}_{\alpha, \beta})) = \emptyset$.

[AZ04, Gui16, AZK22, AZL22]. Citons aussi le magnifique résultat récent de Patrice et Martin [LCS25], qui assure que pour tout $1 \leq r \leq \infty$, un homéo hamiltonien C^r -générique isotope à l'identité possède une nombre infini d'orbites périodiques dont le vecteur de rotation est non trivial.

On peut aussi moduler la question précédente en se demandant ce qu'il advient de familles à 1 paramètre génériques. La conjecture (et on en reparlera à la question 20.32) communément admise est que pour une telle famille générique, l'ensemble de rotation est constant sur un ouvert dense de paramètres, un phénomène du type « escalier du diable ». Salvador et Patrice ont démontré des résultats arrivant presque à sa résolution, mais pas tout à fait [AZLC18, AZ20].

Enfin, on peut étudier des familles à 1 paramètre explicites. On a déjà parlé plus haut de l'exemple de Philip, André et Toby [BdCH16] pour lequel on comprend presque tout, mais une autre famille intéressante est le *kicked Harper model* qu'on a décrit à la sous-section 7.2.2. Dans [JKT21], Tobias, Andrés et Fabio étudient entre autres le lieu de paramètres (α, β) pour lesquels $\text{int}(\text{rot}(\tilde{f}_{\alpha, \beta})) \neq \emptyset$ (voir la définition de $\tilde{f}_{\alpha, \beta}$ en (30)), avec à la clef de jolies images de fractales (voir la figure 21), et des théorèmes mêlant arguments élémentaires, théorie du forçage, théorèmes KAM etc. Notons qu'il y démontrent au passage :

Théorème 12.5 ([JKT21, theorem 4.1]). — *L'application $\text{rot} : \text{Ham}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbf{R}^2)$ est continue partout, où $\text{Ham}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$ désigne l'ensemble des homéos de $\text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$ préservant l'aire et dont le vecteur de rotation de l'aire est nul.*

Problème 12.6. — *Ce théorème est-il également vrai en genre plus grand ?*

CHAPITRE 13

CE DONT JE NE PARLERAI PAS, MÊME SI J'AURAIS PEUT-ÊTRE DÛ

Je ne parlerai pas des homéos dans une autre classe d'isotopie que celle de l'identité. On peut néanmoins définir un ensemble de rotation transverse (inclus dans $\mathbf{R}$) pour ceux isotopes aux twists de Dehn (voir page 119) et on y retrouve un certain nombre de résultats similaires à ceux qu'on a déjà évoqués (par exemple en ce qui concerne la réalisation de points périodiques, les déviations bornées ou le comportement de familles à 1 paramètre). Le spécialiste de ces questions est aujourd'hui Salvador [DM97, Doe97, AZ02, AZ05, AZTG14, AZ25].

Je ne parlerai pas des homéos de l'anneau, qu'il soit ouvert ou fermé, et pour lesquels on peut définir un ensemble de rotation qui encore une fois est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Les résultats dans ce contexte sont beaux et variés, et s'enrichissent des liens avec les communautés symplectique et hamiltonienne, qui s'intéressent notamment aux applications déviant la verticale ou *twist maps* et leurs ensembles d'Aubry-Mather [Mat82, AZT24], et avec la théorie des *continua*, et en particulier leurs compactifications en bouts premiers, qui viennent avec un nombre de rotation (voir par exemple [KLCN15, KN18]), théorie qui mériteraient amplement un joli survol à jour!

Après avoir commencé par les bases [Han90] on pourra continuer avec des résultats de réalisation (qui incluent le fameux théorème de Poincaré-Birkhoff) [Fra88b, Fra88a, LC04b, LC05] ou le fait que l'estimation de Kwapisz de l'entropie y est fausse [PPS18], ce dernier résultat mettant en jeu, tout comme [Kor17], la notion de continuum annulaire dont on vient de parler, sans oublier, bien sûr, les applications de la théorie du forçage : un cas de la conjecture de Boyland, des déviations bornées et encore de la réalisation dans [CT23], ou l'existence de nombre de rotation dans l'anneau ouvert sous l'hypothèse d'absence de fer à cheval, et plein d'autres choses, dans [LCT22]. Les derniers résultats en date sont dus à Alejandro et Fabio [PT25, CGPT25]; leur importance est non seulement théorique, avec de nouveaux jolis résultats, mais aussi pratique, puisqu'ils obtiennent des conditions numériquement vérifiables à l'existence de fers à cheval topologiques, et les appliquent avec Maciej, Maik et succès sur des exemples bien choisis.

Problème 13.1. — *Trouver des conditions numériquement vérifiables à l'existence de fers à cheval rotationnels pour les homéos de surfaces fermées. Construire une alternative plus élémentaire à la théorie du forçage.*

Je ne parlerai pas plus des très jolis résultats d'alternatives sur le nombre d'orbites périodiques et leurs comportement rotationnel (ou leur indice) pour les homéos de surface [[Fra96a](#), [Fra96b](#), [Mat00](#), [FH03](#), [LC06b](#), [TAZ07](#), [CT20](#), [LC22](#)].

Un thème relativement relié est celui des types de tresses formés par les trajectoires sous l'isotopie d'un nombre fini d'orbites. Philip Boyland a été un des précurseurs dans le domaine, voir son survol [[Boy94](#)] et la liste trop partielle d'articles [[Boy92](#), [Par06](#), [dCH02](#)].

Je ne parlerai encore pas du comportement d'un homéo au voisinage d'un point fixe, et de l'ensemble de rotation local, amenant à de très jolis résultats de Frédéric et Jonathan [[LR13](#), [Con18](#), [LR04](#)].

Enfin, je ne parlerai pas des quelques avancées en théorie de la rotation en dimension plus grande. Les résultats sont globalement très partiels puisque la dimension 3 ne force pas autant de structure que la dimension 2; ils se focalisant sur les cas C^0 génériques ou alors stables [[Var22](#), [LV21](#), [BLV21](#)]; notons également un exemple d'homéo analytique dont l'ensemble de rotation ponctuel n'est pas fermé [[SW96](#)].

PARTIE III

LA THÉORIE DU GENRE AU MOINS 2

CHAPITRE 14

DEUX EXEMPLES FONDAMENTAUX ET LEURS COUSINS

14.1. Le temps 1 d'un flot

La première classe d'exemples d'homéos homotopes à l'identité sur des surfaces de genre ≥ 2 est celle des temps 1 de flots sur la surface. En effet, si $(\phi^t)_t$ est un flot autonome sur la surface, son temps 1 est trivialement isotope à l'identité *via* l'isotopie $I^t(x) = \phi^t(x)$. Présentons quelques exemples de tels temps 1 de flots.

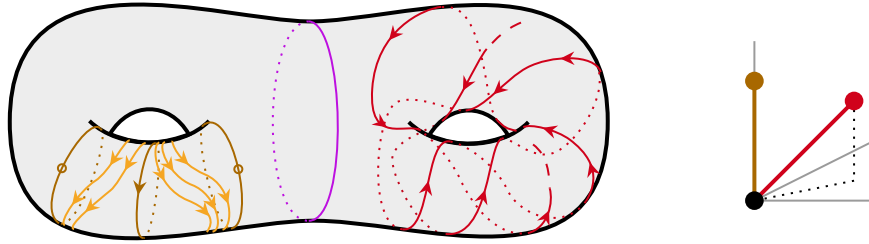


FIGURE 22. Un exemple de temps 1 de flot f sur une surface de genre 2. La restriction de f à la courbe séparante violette est l'identité. Cette courbe sépare la surface de genre 2 en deux surfaces homéomorphes à un tore privé d'un disque. Sur celle de gauche, la restriction de f est supportée dans un anneau; dans cet exemple f possède un cercle invariant sur lequel la dynamique est celle d'une rotation et le reste de l'anneau est composé de points errants (un peu comme à la figure 7). Sur la surface de droite, la restriction de f est conjuguée à un flot irrationnel avec un point d'arrêt sur le tore privé d'un point (voir les figures 10 et 63). On a représenté, à droite, l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ (l'union des deux segments marron et rouge) et $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ (l'union des trois points). Cet ensemble de rotation est inclus dans un sous-espace rationnel de $H_1(S, \mathbf{R})$ de dimension 3, le segment rouge étant de pente irrationnelle.

Des flots à support dans un anneau. — Tout d'abord, on peut adapter l'exemple de la rotation fibrée (comme à la figure 1) pour avoir un homéo de l'anneau : on remplace la définition (1) par

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\phi : \mathbf{R} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbf{R} \times [0, 1] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x + \phi(y) \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Cet homéo passe au quotient annulaire pour donner $h_\phi : \mathbf{S}^1 \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{S}^1 \times [0, 1]$. On peut alors plonger l'anneau fermé $\mathbf{S}^1 \times [0, 1]$ en un anneau $A \subset S$, et définir un homéo f de S comme valant la conjugaison de h_ϕ par ce plongement sur A , et l'identité en dehors de A . L'ensemble de rotation de f est alors un segment dans la droite engendrée par l'homologie de l'anneau plongé, et dans ce cas précis $\text{rot}(f) = \text{rot}_{\text{erg}}(f)$.

On peut modifier cette construction en remplaçant h_ϕ par n'importe quel homéo de l'anneau fermé valant l'identité au bord. En considérant des composantes errantes comme sur la partie de gauche de la figure 22, on obtient un exemple d'homéo dont l'ensemble de rotation est comme juste avant un segment inclus dans une droite à pente rationnelle, mais dont l'ensemble de rotation ergodique est l'union de deux singletons.

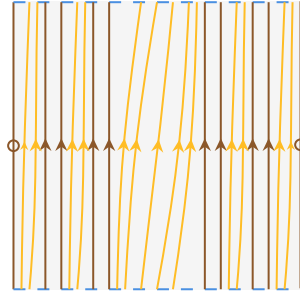


FIGURE 23. Un temps 1 de flot sur l'anneau $[0, 1] \times \mathbf{S}^1$. Chaque cercle marron est invariant et les nombres de rotation sur ceux-ci sont deux-à-deux différents. Sur le complémentaire, formé d'anneaux du type $]a, b[\times \mathbf{S}^1$, on choisit un flot errant, tel que les orbites tendent vers $\{a\} \times \mathbf{S}^1$ dans le passé et vers $\{b\} \times \mathbf{S}^1$ dans le futur.

Enfin, on peut encore modifier cette dernière construction en remplaçant h_ϕ par un homéo de l'anneau qui vaut toujours l'identité au bord, mais qui a pour sa part un ensemble de cercles essentiels invariants qui est transversalement un Cantor (comme sur la figure 23). Chaque composante du complémentaire est choisie comme étant errante. On peut former, de cette manière, un homéo dont l'ensemble de rotation ergodique est un Cantor.

Bien sûr, on peut faire cette construction sur des anneaux essentiels deux-à-deux disjoints pour produire des exemples plus compliqués.

Exercice 14.1. — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$. Construire un homéo qui est le temps 1 d'un flot dont l'ensemble de rotation est l'union de $3g - 3$ segments, et pas moins.

Laminations géodésiques. — Les exemples précédents ne produisent que des ensembles de rotation inclus dans des unions finies de droites à pente rationnelle. Voilà une première méthode pour produire des temps 1 de flots dans des directions irrationnelles (on a déjà vu une méthode similaire à la figure 10).

Équipons la surface S d'une structure hyperbolique, autrement dit d'une métrique à courbure constante égale à -1 . Cela permet de définir ce qu'est une géodésique sur S ; le revêtement universel de S est isométrique au plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ et les géodésiques (complètes) de S s'y relèvent en des géodésiques de $\mathbf{H}^2$ qui sont, dans le modèle du disque de Poincaré, soit des diamètres du disque, soit des arcs de cercle orthogonaux au bord du disque.

Définition 14.2. — Une *lamination géodésique* sur S est une union disjointe et fermée de géodésiques complètes simples. Une lamination géodésique Λ est dite *minimale* si chacune de ses feuilles est dense dans Λ .

Étant donnée une lamination géodésique Λ de S , son relevé à $\tilde{S}$ est également une union disjointe et fermée de géodésiques complètes.

Exercice 14.3. — Utiliser la description des géodésiques de $\mathbf{H}^2$ pour montrer qu'une lamination géodésique est nulle part dense.

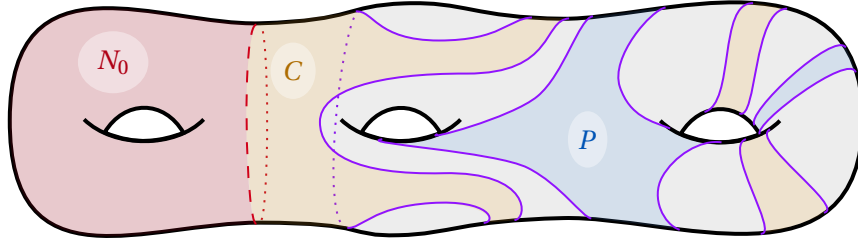


FIGURE 24. Une lamination géodésique minimale (en violet) sur une surface de genre 2 (suggestion de présentation). Son complémentaire est fait d'un cœur N_0 qui est un tore privé d'un disque, une couronne C dont le bord est fait d'une géodésique fermée simple (en rouge) et deux géodésiques de la lamination, et un polygone idéal P à 4 côtés. Ce qui apparaît en gris est trompeur et est en fait couvert par C et P .

Suivant [CB88], on a la description suivante des laminations géodésiques minimales de S (voir la figure 24) :

- Soit Λ est formée d'une unique géodésique, qui est fermée (au sens que c'est un immersion de $\mathbf{S}^1$ dans S , mais c'est en fait équivalent au fait que l'ensemble défini par la géodésique est fermé).
- Soit Λ est transversalement un Cantor. Dans ce cas, le complémentaire de Λ a un nombre fini de composantes connexes, qui sont de deux types :
 - des *polygones idéaux*, qui sont des projections injectives d'ensembles de $\tilde{S}$ dont le bord est un polygone à un nombre fini de côtés et à sommets dans $\partial\tilde{S}$;
 - des ensembles du type $N_0 \sqcup C$, où N_0 — appelé le *cœur* — est une sous-surface compacte de S dont le bord est formé d'une union finie de géodésiques fermées simples, et où C est une union finie de *couronnes*. Une couronne est la projection injective d'un sous-ensemble de l'anneau $\tilde{S}/T$, où T est un automorphisme de revêtement, dont le bord est formé d'une géodésique fermée essentielle et d'un polygone à un nombre fini de côtés et à sommets dans $\partial(\tilde{S}/T)$.

On dit qu'une lamination géodésique est *remplissante* si son complémentaire est formé uniquement de polygones idéaux. Une lamination géodésique est *orientable* si chaque feuille peut être orientée et si cette orientation est une fonction continue.

Il existe une lamination géodésique remplissante orientable sur toute surface compacte connexe orientable à bord (en utilisant par exemple des chemins de fer ou *train tracks*, voir [FM12]).

Flots construits à partir de laminations géodésiques. — À partir de toute lamination géodésique minimale orientable Λ , on peut définir un flot, de la manière suivante. Sur chaque géodésique, le flot consiste à suivre celle-ci à vitesse 1 dans la direction donnée par l'orientation. Il s'agit ensuite de compléter ce flot en dehors de Λ . Sur chaque cœur, on définit le flot comme étant stationnaire. Sur les polygones idéaux et les couronnes, on complète le flot comme décrit sur la figure 25 (à gauche et à droite).

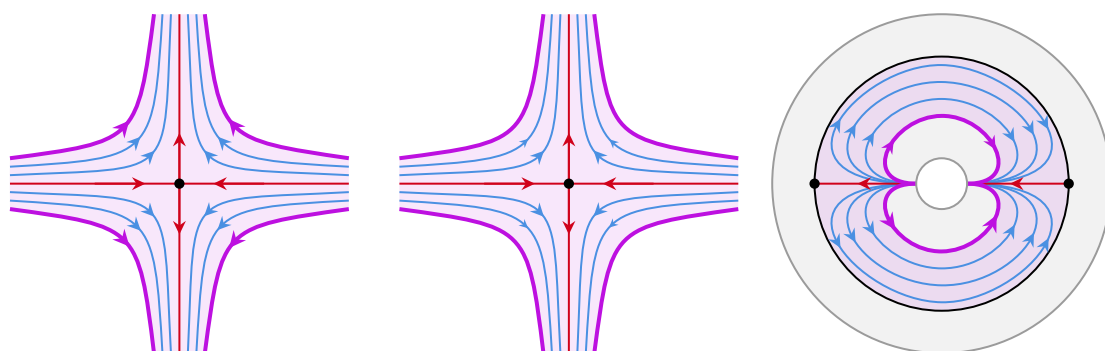


FIGURE 25. Deux complétions d'un flot dans un quadrilatère idéal de $\mathbf{H}^2$, et une complétion d'un flot dans une couronne (composante en violet) à droite, dans $\tilde{S}/T$. Les points noirs sont fixes, les trajectoires rouges sont celles qui tendent vers un point fixe dans le futur ou le passé.

Cela donne un flot sur la surface dont toute orbite reste à distance bornée d'une géodésique de la lamination. Par [Yan85, Theorem 2], on peut ainsi obtenir un flot qui a un vecteur de rotation qui n'est pas dans une direction rationnelle de $H_1(S, \mathbf{R})$.

Bien sûr, on peut aussi choisir de ne pas mettre l'identité sur les cœurs de la lamination, et y mettre un autre temps 1 de flot comme ceux qu'on a déjà décrits. Ça donne alors des exemples comme celui décrit par la figure 22.

On peut modifier un peu cette construction en décidant que le flot est stationnaire sur la lamination Λ , sur chaque cœur et chaque couronne. Sur chaque polygone idéal, on complète le flot comme au centre de la figure 25. On produit comme ça un temps 1 de flot dont l'ensemble de rotation est trivial, mais dont le relevé à $\tilde{S}$ possède des orbites non bornées.

Flot irrationnel arrêté dans une surface plate. — On peut modifier l'exemple du paragraphe 7.2.3 en remplaçant le tore $\mathbf{T}^2$ par une surface à petits carreaux (ou plus généralement, une surface plate) et en choisissant pour p la singularité de la surface (s'il y a plusieurs singularités, il faut mettre un point d'arrêt du type de celui de p à chaque singularité). On obtient alors un homéo d'une surface dont on peut choisir le genre, et dont l'ensemble de rotation est non trivial.

Problème 14.4. — Classifier les ensembles de rotation (ergodiques, ponctuels) des temps 1 de flots irrationnels arrêtés sur des surfaces plates.

Le terrain est déjà un peu déblayé par les platistes⁽¹⁾ : on connaît le nombre maximal de mesures ergodiques, on a des bornes sur le nombre de mesures dites *génériques*, qui sont reliées à $\text{rot}_{\text{pts}}(f)$, etc. Pour tout ça, voir [CM15, Mas22] ainsi que [CK19] et les références qu'il contient.

Du coup, on pourra ensuite (ou en parallèle) se poser la question plus générale des ensembles de rotation de flots quelconques.

Problème 14.5. — Déterminer si on peut avoir un ensemble de rotation de flot qui contient un ensemble convexe de dimension 2. Peut-on aller jusqu'à une classification à la Franks-Misiurewicz (théorème 11.2)?

14.2. Utilisation de fers à cheval rotationnels

On n'a toujours pas donné d'exemple d'homéo dont l'ensemble de rotation est gros — pour l'instant, et c'est une conséquence de [Lel23, théorèmes A et C], voir aussi le théorème 17.18, on a juste décrit des homéos dont l'ensemble de rotation est inclus dans un sous-espace totalement isotrope de $(H_1(S, \mathbf{R}), \wedge)$.

On peut adapter la construction de la section 2.3 (voir en particulier la figure 5) pour produire des exemples intéressants sur des surfaces de genre plus grand.

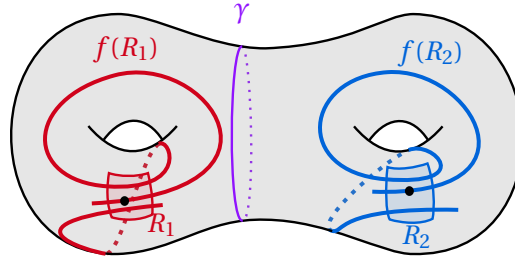


FIGURE 26. Exemple (dû à Matsumoto) d'homéo de surface de genre 2 ayant un ensemble de rotation non convexe (inclus dans deux plans de $H_1(S, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^4$). Les points noirs sont des points fixes contractiles, la courbe γ est fixe par f , les lignes épaisses représentent les images par f des rectangles R_1 et R_2 ; les intersections de tous les rectangles sont supposées markoviennes (voir la figure 5).

Avec ces idées, Matsumoto a décrit un exemple (voir la figure 26) d'homéo f de la surface de genre 2 dont l'ensemble de rotation n'est pas convexe. Celui-ci est inclus dans l'union de deux sous espaces vectoriels U, V de $H_1(S, \mathbf{R})$ de dimension 2, supplémentaires et orthogonaux pour $\wedge$: $\text{rot}(f) \subset U \cup V$. Dans chacun de ces sous-espaces, l'intérieur de l'ensemble de rotation est non vide : $\text{int}(\text{rot}(f) \cap U) \neq \emptyset$ et $\text{int}(\text{rot}(f) \cap V) \neq \emptyset$. Cela montre que la propriété de convexité des ensembles de rotation du tore (théorème 7.1) est fausse en genre plus grand. On en reparlera.

Avec le même genre d'idées, on peut produire un homéo f dont l'ensemble de rotation ergodique $\text{rot}_{\text{erg}}(f) \subset \text{rot}(f)$ est d'intérieur non vide, comme sur la figure 27.

Exercice 14.6. — Exhiber un polygone convexe d'intérieur non vide inclus dans $\text{rot}(f)$, où f est l'homéo décrit par la figure 27. Vérifier que l'intérieur de ce polygone est inclus dans $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$.

⁽¹⁾Il y a une équivalence bien connue mais pour laquelle je ne connais pas de référence systématique entre études des flots sur les surfaces plates et des échanges d'intervalles.

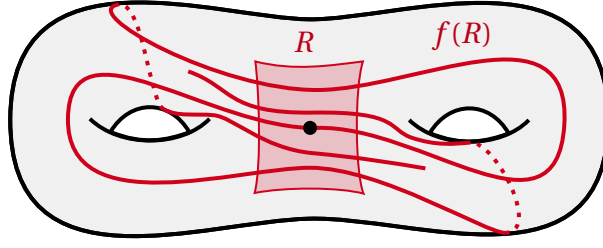


FIGURE 27. Un exemple d'homéo de surface de genre 2 dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide. Le point noir représente un point fixe contractile de l'homéo.

On rencontrera un certain nombre d'autres exemples construits à partir de cette idée dans la suite de ce texte :

- homéo dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide mais dont l'ensemble de rotation ergodique est d'intérieur vide (figure 41);
- exemple dont l'intersection de l'ensemble de rotation ergodique avec des sous-espaces vectoriels naturels est non convexe (figures 42 et 43);
- exemples d'optimalité des bornes du théorème 18.2 (figure 44);
- contre-exemple à l'exactitude de Franks en genre plus grand (figure 47);
- contre-exemple à la semi-continuité des ensembles de rotation (figure 57).

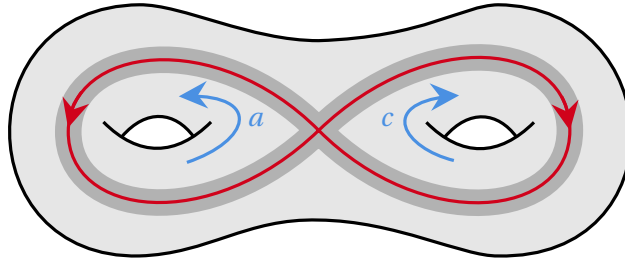


FIGURE 28. Dans cet exemple, l'homéo f est le temps 1 d'un champ de vecteurs dépendant du temps qui est identiquement nul en dehors du voisinage gris de la courbe rouge. La courbe rouge représente une orbite périodique de f . On voit facilement que l'ensemble de rotation homologique de f doit être inclus dans $\langle [a]_{H_1}, [c]_{H_1} \rangle$, qui est un sous-espace totalement isotrope de $H_1(S, \mathbf{R})$ pour la forme d'intersection $\wedge$. Cependant, d'après [GM25, Theorem E], la fermeture $\overline{\text{rot}_{\text{erg}}(f)}$ de l'ensemble de rotation ergodique est d'intérieur non vide.

Une méthode similaire : le point-pushing. — Expliquons une méthode qui produit des résultats similaires à la précédente, appelée *point pushing*, ou en bon français *isotopie pousse-point* (voir la figure 28). On se fixe une courbe fermée régulière $\alpha : \mathbf{S}^1 \rightarrow S$ et un voisinage tubulaire V de α . Cette méthode permet d'exhiber un homéo $f \in \text{Homeo}(S)$ et une isotopie I entre l'identité et f qui est supportée dans V (pour tout $x \in S \setminus V$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $I^t(x) = x$) et telle que pour tout $t \in [0, 1]$ (identifié avec $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$), on a $I^t(\alpha(0)) = \alpha(t)$. Pour cela, il suffit de considérer un champ de vecteur X_t sur S , dépendant du temps $t \in [0, 1]$, supporté

dans V et tel que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $X_t(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ (ce qui n'est possible que si α est régulière). On prend alors f le temps 1 du flot associé au champ de vecteur non autonome X_t .

CHAPITRE 15

UNE PREMIÈRE GÉNÉRATION DE RÉSULTATS

Les ensembles de rotation homologiques d'homéos de surfaces de genre au moins 2 ont commencé à être étudiés dans les années 90. C'est Mark Pollicott qui lance les hostilités avec [Pol92], où il adapte la définition de Sol Schwarzman de cycle asymptotique [Sch57] à l'étude rotationnelle des homéos homotopes à l'identité. Il démontre ensuite un critère de positivité de l'entropie :

Théorème 15.1 ([Pol92]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. S'il existe $2g + 1$ points périodiques dont les vecteurs de rotation ne sont pas inclus dans un hyperplan de $H_1(S, \mathbf{R})$, alors $h_{\text{top}}(f) > 0$ et $\text{rot}(f)$ n'est pas dénombrable.*

Pollicott démontre ce résultat à l'aide de la théorie de Nielsen-Thurston en considérant la classe d'homotopie de l'homéo f restreint au complémentaire des orbites périodiques de l'hypothèse du théorème.

Ce résultat est précisé trois ans plus tard par Eijirou Hayakawa [Hay95] qui donne un critère d'existence d'orbites périodiques en termes de classes de Nielsen (et dont on verra une amélioration au théorème 18.2).

Ce théorème est également amélioré par Matsumoto en 1997 [Mat97] : Shigenori remplace l'hypothèse de Mark par la suivante, plus faible : *il existe $g + 1$ points périodiques dont les vecteurs de rotation ne sont pas affinement liés dans $H_1(S, \mathbf{R})$* . Notez que la preuve du théorème 1 de [Mat97] comporte une erreur (la proposition 5.1 est fausse) mais l'énoncé est vrai par le travail postérieur [GSGL24] qu'on détaillera par la suite (c'est encore le théorème 18.2 de classification des ensembles de rotation ergodiques).

Enfin, Franks a obtenu en 1996 deux conditions d'existence de point fixe d'indice positif en termes rotationnels [Fra96b].

Une caractéristique de ces résultats est que tous, à part celui de Franks⁽¹⁾, ont leurs hypothèses qui concernent l'existence de points périodiques avec un certain comportement rotationnel. Ces auteurs se sont sans doute rendu compte que la méthode qu'ils ont utilisée — la théorie de Nielsen-Thurston — n'est pas adaptée à l'obtention de résultats généraux à propos des ensembles de rotation en genre plus grand (en particulier, avec des hypothèses sur la forme de l'ensemble de rotation) : dans ce cas précis, contrairement à la doctrine générale de Poincaré, les points périodiques sont un outil insuffisant pour le dévissage de la dynamique rotationnelle.

⁽¹⁾ Dont les preuves sont basées sur de la théorie de Brouwer et en particulier le théorème de point fixe de Handel.

Pour être complet, il faut mentionner le travail de Koropecski-Tal [KT16] qui s'intéresse à la notion de point essentiel. Un point $x \in S$ est dit *inessentiel* pour $f \in \text{Homeo}(S)$ s'il existe un voisinage V de x tel que l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ est inclus dans un disque topologique de S ; un point $x \in S$ est dit *essentiel* s'il n'est pas inessentiel. Ils démontrent bon nombre de résultats liés à ces notions, dont on donne juste un échantillon représentatif en la personne de l'exemple suivant :

Théorème 15.2 ([KT16]). — *Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$ préservant l'aire. Supposons que $\text{rot}(f)$ n'est pas contenu dans une union de $g + 1$ sous-espaces vectoriels rationnels stricts de $H_1(S, \mathbb{R})$.*

Alors l'ensemble des points inessentiels de f est une union disjointe de disques topologiques périodiques pour f .

De plus, pour tout point x essentiel et tout voisinage V de x , le complémentaire de l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$ est une union disjointe de disques topologiques périodiques pour f .

Les preuves de ces résultats sont essentiellement élémentaires, pour peu qu'on remplace la preuve du théorème A de [KT16] par celle, beaucoup plus simple, du « lemme triple » de [KLCT19].

CHAPITRE 16

UN LONG DÉTOUR PAR L'HOMOTOPIE

16.1. Quelques préliminaires sur les surfaces de genre ≥ 2 et leurs homéos

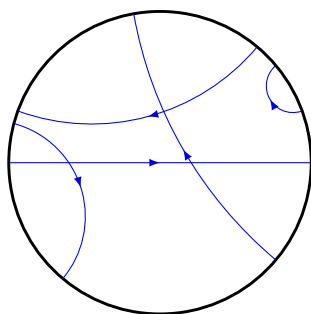
Considérons S une surface fermée de genre $g \geq 2$. Rappelons-nous de la section 1.1 et du fait que ce genre est défini comme le nombre maximal de courbes fermées tracées sur S sans la déconnecter. On a aussi vu que la caractéristique d'Euler de S vaut $\chi(S) = 2 - 2g$: la condition $g \geq 2$ revient à demander que $\chi(S) < 0$. Au choix le genre ou la caractéristique d'Euler sont des invariants totaux de classes d'homéomorphisme de surfaces fermées. On n'a par contre pas encore dit — et on pourra consulter [FM12] pour plus de détails sur cela et la suite de cette section — que le nombre maximal de courbes fermées simples deux-à-deux non homotopes et disjointes est $3g - 3$ (voir un exemple sur la figure 44 pour le cas $g = 3$ en la personne des courbes violettes; cette figure présente également un exemple de décomposition en *pantalons* de la surface, *i.e.* comme recollement de $2g - 2$ sphères privées de 3 disques recollées le long de ces disques).

On munit la surface S d'une métrique de courbure constante égale à -1 (ce qui est possible par le théorème d'uniformisation. Son revêtement universel $\tilde{S}$ est alors isométrique au plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$, qui possède un bord à l'infini homéomorphe à un cercle (on peut le voir, par exemple, en considérant le modèle du disque de Poincaré) et noté $\partial\mathbf{H}^2$. Dans le modèle du disque de Poincaré, chaque géodésique est un arc de cercle inclus dans le disque et orthogonal au bord du disque en ses deux points d'intersection avec celui-ci (voir la figure 29). Ainsi, chaque géodésique de $\mathbf{H}^2$ possède une α et une ω -limite dans $\partial\mathbf{H}^2$. L'identification entre $\tilde{S}$ et $\mathbf{H}^2$ permet de définir un bord à l'infini $\partial\tilde{S}$ pour $\tilde{S}$; il s'avère que celui-ci ne dépend pas de la métrique de courbure -1 choisie sur S (et, pour celles et ceux qui savent ce que c'est, il s'identifie avec le bord de Gromov du groupe fondamental $\pi_1(S)$).

On note, comme avant, $\mathcal{G}$ l'ensemble des automorphismes de revêtement $\tilde{S} \rightarrow S$. Chaque automorphisme de revêtement non trivial agit de manière hyperbolique sur $\mathbf{H}^2$: pour chaque $T \in \mathcal{G} \setminus \{\text{Id}\}$ il existe une (unique) géodésique de $\mathbf{H}^2$ qui est invariante par T et sur laquelle T agit par translation. Cette géodésique est appelée l'*axe* de T .

Mentionnons le fait utile que tout lacet non contractile de S est librement homotope à une unique géodésique fermée. Si le lacet de départ est simple, alors la géodésique fermée obtenue sera elle aussi simple. On utilisera aussi le fait qu'une courbe fermée simple sépare la surface en deux composantes connexes si et seulement si sa classe d'homologie est triviale; dans ce cas elle sera appelée *séparante*.

Rappelons que tout homéo $f \in \text{Homeo}_0(S)$ homotope à l'identité possède un unique relèvement $\tilde{f}$ à $\tilde{S}$ qui est lui aussi homotope à l'identité, qui est obtenu en relevant l'isotopie de f

FIGURE 29. Des géodésiques de $\mathbf{H}^2$ dans le modèle du disque de Poincaré.

à Id_S (un résultat classique assure que deux isotopies de l'identité à f sont homotopes relativement à leurs extrémités si le genre de S est ≥ 2 , voir la proposition 6.4). Ce relevé est à distance finie de l'identité et commute avec les éléments de $\mathcal{G}$. Il se prolonge en un homéo de $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ qui vaut l'identité sur $\partial\tilde{S}$. On parle donc de $\text{rot}(f)$, $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$...

16.2. La théorie d'Anosov-Weil pour les flots de surfaces

Les premières traces de la notion de vecteur de rotation homotopique remontent (au moins) à Weil, dans les années 1930. Dans [Wei31, Wei36], il propose d'étudier les α et ω -limites des relevés des orbites d'un flot sur S à $\tilde{S}$, ces α et ω -limites étant vues comme des sous-ensembles de $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$.

Remarque 16.1. — Le premier exemple que Weil étudie est en fait un flot sur le tore. Dans ce cas, la compactification du revêtement universel $\mathbf{R}^2$ du tore s'exprime plus simplement : notant $(x(t), y(t)) \in (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$ une orbite de ce flot, on peut écrire $x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ et considérer l'ensemble d'accumulation de l'angle $\theta(t_n)$ le long des sous-suites de temps t_n pour lesquelles $r(t_n)$ tend vers l'infini. Weil utilise alors ce formalisme pour donner une autre interprétation au cadre d'application de la théorie de Poincaré sur les homéos du cercle.

Ce point de vue fut repris et étudié en plus grand détail par Anosov dans une série de papiers publiés à partir des années 80 (mais sur la base d'idées formées dans les années 60). Je renvoie aux survols [Ano95, GZ17], au livre [MV23] et aux références qui y sont mentionnées pour plus de précisions.

Voici un exemple de résultat obtenu par Anosov. Prenons comme précédemment une surface fermée S de genre $g \geq 2$ et un flot $(\phi^t)_t$ sur cette surface.

Théorème 16.2 ([Ano88]). — *Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

1. *Le flot $(\phi^t)_t$ a un nombre fini de points d'équilibre.*
2. *L'ensemble des points d'équilibre du flot $(\phi^t)_t$ est contractile.*
3. *Le flot $(\phi^t)_t$ est analytique.*

Alors toute orbite du flot $(\phi^t)_t$ est soit bornée, soit possède un relevé qui converge vers un unique point de $\partial\tilde{S}$ (et dans ce cas, tous ses relevés convergent vers un unique point de $\partial\tilde{S}$).

On peut raisonnablement supposer que la conclusion de ce théorème reste vraie dans le cas (incluant 1. et 2.) où l'ensemble des points d'équilibre de $(\phi^t)_t$ est non essentiel (c'est-à-dire inclus dans un disque topologique).

Voir aussi [Wal95] pour un analogue homotopique faible de Franks-Misiurewicz [FM90] en genre plus grand : l'ensemble de rotation dans l'espace tangent en un point est inclus dans une union de $4g - 2$ droites. Voir le problème 14.4.

16.3. Vecteurs de rotation homotopiques

Nous avons repris ces idées d'Anosov-Weil (de manière indépendante) avec Emmanuel Militon dans [GM25], avec comme objectif de progresser dans la compréhension des ensembles de rotation homologiques en genre ≥ 2 . On pensait (rétrospectivement à juste titre) que les potentiels mécanismes sous-jacents aux phénomènes rotationnels homologiques devaient se situer au niveau homotopique. D'autre part, certaines informations rotationnelles sont invisibles dans l'ensemble de rotation homologique : par exemple, celui-ci ne voit pas la différence entre un lacet trivial et un commutateur (voir le lacet α de la figure 30). Une autre motivation d'Emmanuel était de progresser dans la compréhension de l'action des homéos sur le tout nouveau graphe des courbes fin, dont on reparlera plus tard au chapitre 19. On va donc, jusqu'à la page 100, s'intéresser au comportement asymptotique des orbites d'un point de vue homotopique, d'abord pour des orbites quelconques, puis pour des orbites typiques pour des mesures (à la section 17).

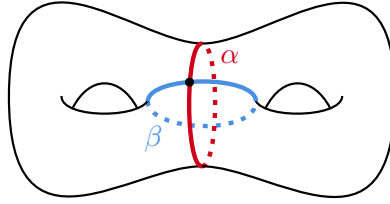


FIGURE 30. La rotation autour du lacet α , qui est homotopiquement trivial (c'est un commutateur dans $\pi_1(S)$) n'est pas détectée par l'ensemble de rotation homologique.

Il n'est toujours pas complètement évident quelles doivent être les bonnes définitions dans ce cadre. Voilà la définition à laquelle on est arrivés avec Emmanuel, après pas mal de tergiversations. On note $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \partial\tilde{S}\}$ la diagonale de $\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}$, si bien que $\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S} \setminus \Delta$ paramétrise les géodésiques (orientées) de $\tilde{S}$. Rappelons qu'on a muni S d'une métrique à courbure constante égale à -1 .

Définition 16.3. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $\tilde{f}$ le relevé de f à $\tilde{S}$ isotope à l'identité. Un triplet $(\alpha, \beta, \nu) \in ((\partial\tilde{S})^2 \setminus \Delta) \times \mathbf{R}_+^*$ est un *vecteur de rotation homotopique* de f (voir la figure 31) s'il existe une suite $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de points de $\tilde{S}$, et une suite strictement croissante $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'entiers naturels tels que, notant $\pi_{\alpha, \beta}$ la projection orthogonale⁽¹⁾ sur la géodésique allant de α vers β ,

$$(34) \quad \left(\tilde{x}_k, \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_k), \frac{d\left(\pi_{\alpha, \beta}(\tilde{x}_k), \pi_{\alpha, \beta}(\tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_k))\right)}{n_k} \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\alpha, \beta, \nu).$$

⁽¹⁾Autrement dit, la projection sur le point de la géodésique (α, β) le plus proche.

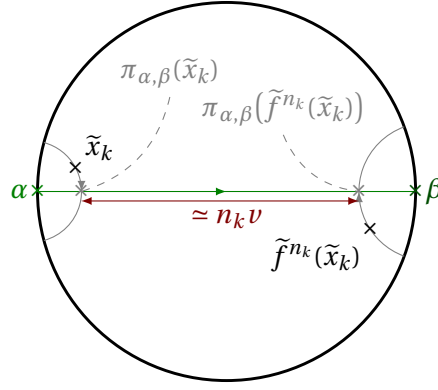


FIGURE 31. Définition de l'ensemble de rotation homotopique.

L'ensemble de rotation homotopique $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ de f est l'ensemble des vecteurs de rotation homotopiques de f , auquel on ajoute le singleton $\{(\alpha, \beta, 0)\}$, et quotienté par la relation

$$(\alpha, \beta, 0) \sim (\alpha', \beta', 0).$$

Quelques remarques :

Remarque 16.4. — — La convergence de chacune des deux premières coordonnées de (34) se fait dans l'ensemble $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ qui est homéomorphe à un disque fermé.

- La suite de points $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et la suite de temps $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont similaires à ceux apparaissant dans la définition 1.2.
- L'ajout du singleton $\{(\alpha, \beta, 0)\}$ à l'ensemble de rotation permet de souligner le fait que $\tilde{f}$ possède un point fixe (théorème de point fixe de Lefschetz).
- Les deux premières coordonnées d'un vecteur de rotation donnent une géodésique orientée de $\tilde{S}$, autrement dit la direction de rotation; la dernière exprime quant à elle une vitesse de fuite. Vu qu'une géodésique orientée $\tilde{\gamma}$ peut s'identifier avec son couple (α, β) de points distincts du bord, on écrira parfois $(\alpha, \beta, v) = (\tilde{\gamma}, v)$.
- Avec Emmanuel, on a décidé d'ajouter des projections dans le calcul de la vitesse parce que c'est ce qui fait marcher les énoncés qui vont suivre. Plus sérieusement, prendre cette projection, c'est ne considérer que le déplacement dans la direction de la géodésique.
- Une notion assez similaire est utilisée en théorie d'Anosov-Weil et est appelée "geodesic framework" (voir par exemple le survol [GZ17]).
- L'ensemble des directions (α, β) de l'ensemble de rotation homotopique ne dépend pas du choix de la métrique de courbure -1 dont on a muni S (le bord à l'infini $\partial\tilde{S}$ ne dépend pas de cette métrique, c'est même un invariant de quasi-isométrie). En revanche, on a bien besoin de spécifier la métrique si on veut parler de vitesse de fuite. Si on veut un invariant de conjugaison par homéos de $\text{Homeo}_0(S)$, on peut oublier la vitesse, autrement dit considérer l'ensemble des géodésiques $(\alpha, \beta) \in (\partial\tilde{S})^2 \setminus \Delta$ telles qu'il existe $(\tilde{x}_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{S}^{\mathbb{N}}$ et $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante tels que

$$(x_k, \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\alpha, \beta), \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\pi_{\alpha, \beta}(\tilde{x}_k), \pi_{\alpha, \beta}(\tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_k)))}{n_k} > 0.$$

Voir aussi [GM25, remark 3.4]. On peut également définir un autre invariant en oubliant la dernière condition sur la positivité de la vitesse, ce qui donne sans doute un objet intéressant pour étudier la dynamique rotationnelle à vitesse sous-linéaire.

Concernant le dernier point de la remarque précédente, si on veut éviter de fixer une métrique sur S , une alternative consiste à spécifier un ensemble générateur de $\pi_1(S)$ et un domaine fondamental $D \subset \tilde{S}$ de S , et de remplacer le revêtement universel $\tilde{S}$ par le graphe de Cayley de $\pi_1(S)$ associé à l'ensemble générateur. On a alors une projection $\tilde{S} \rightarrow \pi_1(S)$ donnée par le domaine fondamental D ; on peut alors copier la définition de vecteur de rotation homotopique et on obtient le même ensemble de géodésiques (c'est le lemme de Svarč-Milnor, voir [GM25, lemma 8.9]). La vitesse dépend alors du choix de la partie génératrice de $\pi_1(S)$ choisie, mais pas de celui du domaine fondamental.

Cet ensemble de rotation se comporte bien vis-à-vis de l'itération et de l'action de $\mathcal{G}$:

Proposition 16.5 ([GM25, proposition 3.2]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Alors*

$$\text{rot}^{\pi_1}(f^{-1}) = \{(\beta, \alpha, v) \mid (\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)\},$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\text{rot}^{\pi_1}(f^n) = n \text{rot}^{\pi_1}(f) \doteq \{(\alpha, \beta, nv) \mid (\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)\}.$$

Pour tout automorphisme de revêtement $T \in \mathcal{G}$, si $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, alors $(T\alpha, T\beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$.

Remarque 16.6. — On pourrait quotienter par cette action de $\mathcal{G}$ mais l'espace obtenu $(\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}) \setminus \Delta / \mathcal{G}$ n'a pas les mêmes propriétés topologiques agréables que $(\partial\tilde{S} \times \partial\tilde{S}) \setminus \Delta$ (en particulier, ce n'est pas du tout une variété).

Cette propriété permet tout de même de voir l'ensemble de rotation homotopique comme un sous-ensemble de TS :

Définition 16.7. — On définit $\pi_{TS}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ comme étant l'ensemble des $(x, w) \in TS$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$ tel que la projection de la géodésique (α, β) sur TS passe par le point (x, w) et que $\|w\| = v$.

De manière similaire, on définit $\pi_{T^1S}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ comme étant l'ensemble des $(x, w) \in T^1S$ tels qu'il existe $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$ tel que la projection de la géodésique (α, β) sur T^1S passe par le point (x, w) .

Enfin, on a vu qu'on écrit parfois $(\tilde{\gamma}, v)$ à la place de (α, β, v) (lorsque α et β sont les extrémités de la géodésique orientée $\tilde{\gamma}$), la proposition précédente permet également d'écrire (γ, v) , où γ est la projection de la géodésique $\tilde{\gamma}$ sur S .

Les données de $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ et $\pi_{TS}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ sont équivalentes (connaissant l'un de ces ensembles, on en déduit l'autre). La donnée de $\pi_{T^1S}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ est identique à celle de $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ avec oubli des vitesses. Remarquons que les ensembles $\pi_{TS}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ et $\pi_{T^1S}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ sont invariants par l'action du flot géodésique sur TS ou T^1S .

Voici une question qui est me semble-t-il ouverte, en lien avec la théorie d'Anosov-Weil (voir le paragraphe précédent) :

Problème 16.8. — *Supposons que $\beta \in \partial S$ n'est l' ω -limite d'aucune géodésique simple. Si $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$ pour un certain $\alpha \in \partial S \setminus \{\beta\}$, est-ce que cela implique que l'entropie topologique de f est positive?*

Une seconde question ouverte : est-ce que l'étude de l'ensemble de rotation homologique est aussi générale que celle de l'ensemble de rotation homotopique, quitte à considérer des revêtements finis ? Et dans l'autre sens ?

Problème 16.9. — *Si je connais $\text{rot}(\tilde{f})$, où $\tilde{f}$ est le relevé de f à $\tilde{S}$, pour tous les revêtements finis $\tilde{S}$ de S , est-ce que je peux retrouver $\text{rot}^{\pi_1}(f)$? Réciproquement, la donnée de $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ permet-elle de reconstruire $\text{rot}(f)$?*

16.4. Des résultats partiels à saveur convexe

Une autre propriété des ensembles de rotation homotopiques est qu'ils sont étoilés par rapport à 0 :

Théorème 16.10 ([GM25, theorem 3.5]). — *Pour tous $f \in \text{Homeo}_0(S)$, $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, et $v' \in [0, v]$, on a $(\alpha, \beta, v') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$.*

La preuve de ce théorème est élémentaire et est essentiellement basée sur la connexité par arcs des domaines fondamentaux et l'existence d'un point fixe à $\tilde{f}$. Notons qu'elle ne fait pas du tout intervenir la quasi-convexité des domaines fondamentaux, qui est également vraie en genre ≥ 2 :

Proposition 16.11 ([GM25, proposition 2.2]). — *Pour toute surface fermée S de genre $g \geq 2$ munie d'une métrique faisant du revêtement $\mathbf{H}^2 \rightarrow S$ une isométrie locale, il existe $R > 0$ (qui dépend de S et de la métrique choisie sur celle-ci) tel que tout domaine fondamental connexe par arcs $D \subset \mathbf{H}^2$ de S est R -quasi convexe : pour tout $x \in \text{conv}(D)$, on a $B(x, R) \cap D \neq \emptyset$.*

Si on met bout à bout cette proposition et la preuve du théorème 16.10, on obtient la réalisation des vecteurs de rotation homotopiques par des segments d'orbites dont les extrémités sont à distance uniformément bornée (par une constante dépendant uniquement de S et de sa métrique) de la géodésique [GM25, proposition 3.6]. Ainsi, il existe des segments d'orbites tels que dans la définition 16.3 de vecteur de rotation homotopique, il n'y a pas besoin de considérer une projection.

Le théorème 16.10 est à ma connaissance la seule obstruction simple et générale à la forme de l'ensemble de rotation homotopique (hormis qu'il doit être uniformément borné sur sa dernière coordonnée, et $\mathcal{G}$ -invariant). En particulier, il est assez étonnant que, contrairement à ce qui se passe dans le cas du tore, la quasi-convexité des domaines fondamentaux ne donne pas plus de contraintes sur l'ensemble de rotation homotopique. Peut-être reste-t-il encore des choses à démontrer à ce sujet.

Deux propositions, dont les preuves sont relativement élémentaires, illustrent elles aussi des propriétés de type convexité pour l'ensemble de rotation homotopique : l'existence de certains vecteurs de rotation homotopiques en “force” l'existence d'autres.

La première proposition concerne les vecteurs de rotation selon des géodésiques ayant une auto-intersection ; dans ce cas la géodésique obtenue en prenant le “raccourci” formé par cette auto-intersection est aussi un vecteur de rotation, avec la même vitesse :

Proposition 16.12 ([GM25, proposition 5.1]). — *Soit (α, β) une géodésique de $\tilde{S}$ et T un automorphisme de revêtement non trivial tel que $\text{Card}((\alpha, \beta) \cap T^{-1}(\alpha, \beta)) = 1$. Notons $\{\tilde{p}_0\} = (\alpha, \beta) \cap T^{-1}(\alpha, \beta)$, et supposons que $T\tilde{p}_0 \in (\alpha, \beta)$ soit tel que, pour l'ordre naturel sur (α, β) , la suite $(\alpha, \tilde{p}_0, T\tilde{p}_0, \beta)$ soit croissante (voir la figure 32).*

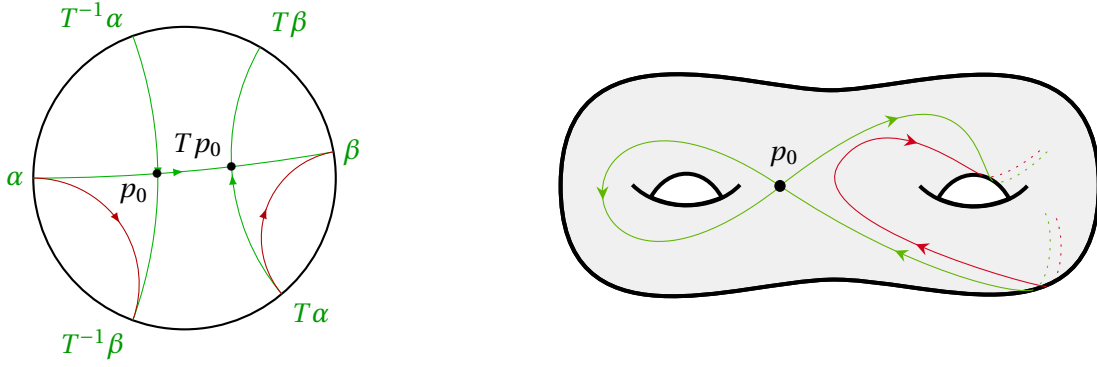


FIGURE 32. Illustration de la proposition 16.12 : si (α, β, v) est un vecteur de rotation homotopique tel que la géodésique (α, β) ait une auto-intersection (en vert), alors $(T\alpha, \beta, v)$ est aussi un vecteur de rotation homotopique (en rouge).

Supposons qu'il existe $v > 0$ tel que $(\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$. Alors $(T\alpha, \beta, v) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$.

La seconde proposition concerne les intersections entre deux géodésiques quelconques, avec une conclusion plus faible.

Proposition 16.13 ([GM25, proposition 5.4]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$, et $(\alpha_1, \beta_1, v_1) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, avec $v_1 > 0$. Soit également (α_2, β_2) une géodésique de $\mathbf{H}^2$ intersectant (α_1, β_1) , et telle qu'il existe $(\tilde{y}_k) \in \mathbf{H}^2$ et $(u_k) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ tels que $\tilde{y}_k \rightarrow \alpha_2$ et $\tilde{f}^{u_k}(\tilde{y}_k) \rightarrow \beta_2$. Alors il existe $v', v'' \geq 0$ satisfaisant $v' + v'' = v_1$ tels que :

- soit $(\alpha_1, \beta_2, v') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, soit $(\alpha_1, \alpha_2, v') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, et
- soit $(\beta_2, \beta_1, v'') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, soit $(\alpha_2, \beta_1, v'') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$.

Les preuves de ces deux dernières propositions sont largement inspirées de celle de la proposition fondamentale de la théorie de forçage de Le Calvez et Tal [LCT18, Proposition 20], avec l'avantage ici qu'il n'y a pas du tout besoin de théorie de Brouwer.

Problème 16.14. — Dans quels cas peut-on se passer d'alternatives dans la conclusion, et affirmer que $(\alpha_1, \beta_2, v') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$ et $(\alpha_2, \beta_1, v'') \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$?

16.5. Réalisation

Des résultats importants en théorie de la rotation sont ceux concernant la réalisation de vecteurs de rotation “rationnels” par des orbites, éventuellement périodiques. Dans le cas qui nous intéresse, des applications directes de résultats de réalisation dans l'anneau [Fra88b, LC05] donnent la proposition suivante :

Proposition 16.15 ([GM25, proposition 4.1]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et prenons $\alpha \neq \beta \in \partial\tilde{S}$ qui définissent une géodésique fermée dans S , de longueur $\ell > 0$. Supposons que $(\alpha, \beta, v_0) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, avec $v_0 = \ell p/q$ (p/q irréductible), et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1. v_0 est maximal, c'est-à-dire $v_0 = \max\{v \in \mathbf{R}_+ \mid (\alpha, \beta, v) \in \rho(f)\}$;
2. f est transitif par chaînes ;
3. il existe $(\alpha_1, \beta_1, v_1), (\alpha_2, \beta_2, v_2) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$, avec $v_1, v_2 > 0$, tels que (α_1, β_1) croise (α, β) positivement et (α_2, β_2) croise (α, β) négativement.

Alors f possède un point périodique de période q et de vecteur de rotation (α, β, v_0) .

La preuve de cette proposition est très simple : elle consiste à considérer l'anneau $\tilde{S}/T$ obtenu en quotientant $\tilde{S}$ par un automorphisme de revêtement primitif (*i.e.* pas multiple d'un autre) T associé à la géodésique fermée de S , puis à appliquer les résultats de [Fra88b, LC05] dans cet anneau. Notons qu'il est parfois utile de travailler dans un anneau fermé : on peut considérer l'anneau fermé $(\tilde{S} \cup \partial\tilde{S} \setminus \{\alpha, \beta\})/T$, dans lequel $\tilde{f}$ devient un homéo qui vaut l'identité sur chaque composante de bord (puisque $\tilde{f}|_{\partial\tilde{S}} = \text{Id}_{\tilde{S}}$).

16.6. De l'utilisation de revêtements pertinents

Le reste (et en fait la grande partie) du travail [GM25] vise à donner des critères d'existence de nouveaux vecteurs de rotation homotopiques à partir d'hypothèses portant sur des vecteurs de rotation selon de géodésiques fermées (et pas seulement d'existence de points périodiques avec certains comportements, comme c'était le cas pour les travaux évoqués à la section 15).

Dans un premier temps, on a obtenu à peu de frais des conséquences faibles lorsque l'ensemble de rotation homotopique contient deux vecteurs associés à deux géodésiques fermées qui se croisent, comme dans la figure 30 page 79.

Proposition 16.16 ([GM25, corollary 8.11]). — *Soient γ_0 et γ_1 deux géodésiques fermées de S qui se croisent. Supposons qu'il existe $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$ tels que $(\gamma_0, v_0), (\gamma_1, v_1) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$. Alors*

1. *L'entropie topologique de f est positive.*
2. *Tout point rationnel de $H_1(S, \mathbf{R})$ à l'intérieur du triangle formé par les points $0, \frac{v_0}{\ell(\gamma_0)}[\gamma_0]_{H_1(S)}$ et $\frac{v_1}{\ell(\gamma_1)}[\gamma_1]_{H_1(S)}$ est réalisé par une orbite périodique.*

L'outil clef de la preuve (assez simple) de cette proposition est la notion de *revêtement associée à deux géodésiques fermées distinctes*, qui est une généralisation de la construction expliquée après la proposition 16.15 au cas de deux géodésiques se rencontrant en un point $x_0 \in S$: c'est le revêtement de S obtenu en quotientant $\tilde{S}$ par le sous groupe de $\pi_1(S, x_0)$ engendré par les géodésiques fermées γ_0 et γ_1 ⁽²⁾. Dans le cas de la proposition, le revêtement est un tore troué, et les conséquences homologiques que nous avons mentionnées sont obtenues en termes d'ensemble de rotation du relèvement de l'homéo initial à ce tore (en particulier, on utilise des résultats existants de théorie de la rotation dans le tore).

Notons que le premier point de cette proposition était déjà connu [Les12, Kra81, IY03], par des méthodes utilisant la classification de Nielsen-Thurston des classes d'homotopie d'homéos de surfaces.

16.7. Une halte : les fers à cheval rotationnels

Toujours dans [GM25], on utilise ce formalisme pour obtenir l'existence d'un fer à cheval rotationnel lorsque f a un vecteur de rotation associé à une géodésique fermée avec auto-intersection.

Commençons par la définition de fer à cheval rotationnel, et avant cela celle d'intersection markovienne.

⁽²⁾Dans le cas où ces deux géodésiques ne sont pas simples, il faut d'abord considérer un revêtement fini dans lequel les relevés de γ_0 sont simples.

Définition 16.17. — Soit S une surface. On appelle *rectangle* de S un sous-ensemble $R \subset S$ satisfaisant $R = h([0, 1]^2)$ pour un homéo $h : [0, 1]^2 \rightarrow h([0, 1]^2) \subset S$. On appelle *côtés* de R l'image par h des côtés de $[0, 1]^2$. Les côtés $R^- = h([0, 1] \times \{0\})$ et $R^+ = h([0, 1] \times \{1\})$ sont appelés *horizontaux* et les deux autres *verticaux*. On dit qu'un rectangle $R' \subset R$ est un *sous-rectangle horizontal* (resp. *vertical*) de R si les côtés verticaux (resp. horizontaux) de R' sont inclus dans ceux de R .

Notons que la relation « être un sous-rectangle horizontal » est transitive : un sous-rectangle horizontal R'' d'un sous-rectangle horizontal R' d'un rectangle R est un sous-rectangle horizontal de R (et il en va de même pour les sous-rectangles verticaux).

Étant donné $x \in \mathbf{R}^2$, on note $\pi_2(x)$ sa deuxième coordonnée. Suivant [ZG04], on définit comme suit les intersections markoviennes :

Définition 16.18. — Soient R_1 et R_2 deux rectangles d'une surface S . On dit que l'intersection $R_1 \cap R_2$ est *pré-markovienne* s'il existe un homéo h d'un voisinage de $R_1 \cup R_2$ vers un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$ tel que (voir figure 33) :

- $h(R_2) = [0, 1]^2$;
- soit $h(R_1^+) \subset \{x \mid \pi_2(x) > 1\}$ et $h(R_1^-) \subset \{x \mid \pi_2(x) < 0\}$,
soit $h(R_1^-) \subset \{x \mid \pi_2(x) > 1\}$ et $h(R_1^+) \subset \{x \mid \pi_2(x) < 0\}$;
- $h(R_1) \subset \{x \mid \pi_2(x) < 0\} \cup [0, 1]^2 \cup \{x \mid \pi_2(x) > 1\}$.

On dit que l'intersection $R_1 \cap R_2$ est *markovienne*, et on note $R_1 \cap_M R_2$, s'il existe un sous-rectangle horizontal R'_1 de R_1 tel que l'intersection $R'_1 \cap R_2$ soit pré-markovienne⁽³⁾.

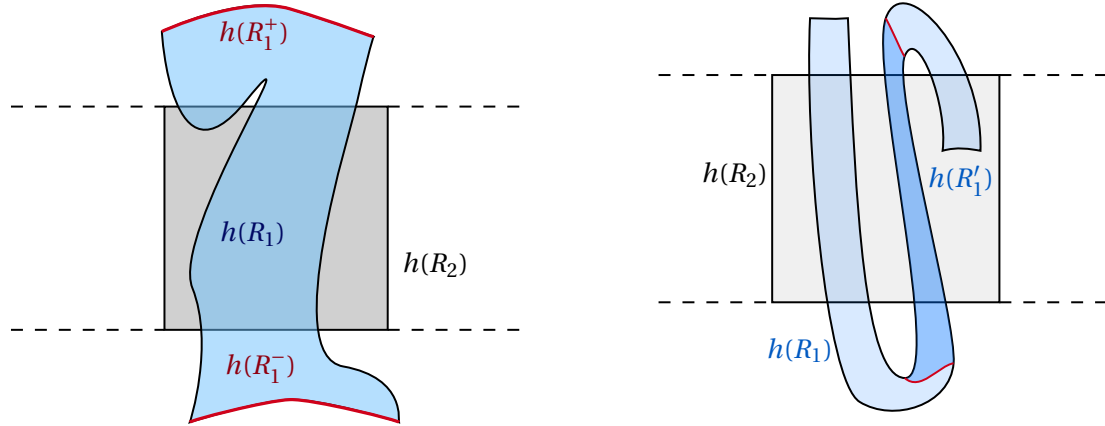


FIGURE 33. Une intersection pré-markovienne (à gauche) et une intersection markovienne (à droite). Le sous-rectangle horizontal de l'intersection pré-markovienne est désigné par R'_1 .

Ce qui suit est un cas particulier de la généralisation de Homma [Hom53] du théorème de Schoenflies.

Théorème 16.19 (Homma). — *Tout homéo de*

$$\left(((\mathbf{R} \times \{0\}) \cup (\mathbf{R} \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1])) \cap B(0, 10) \right) \cup \partial B(0, 10)$$

⁽³⁾De manière équivalente, on peut remplacer cette définition en demandant qu'il existe un sous-rectangle vertical R'_2 de R_2 tel que l'intersection $R_1 \cap R'_2$ soit pré-markovienne.

vers son image dans $\mathbf{R}^2$ peut être étendu à un auto-homéomorphisme de $\mathbf{R}^2$.

Le théorème de Homma sera utilisé pour trouver des rectangles et des intersections markoviennes.

Remarque 16.20. — Le théorème 16.19 de Homma implique aussi que si l'intersection $R_1 \cap R_2$ est pré-markovienne, alors pour tout sous-rectangle vertical R'_1 de R_1 et tout sous-rectangle horizontal R'_2 de R_2 , l'intersection $R'_1 \cap R'_2$ est également pré-markovienne.

La preuve du résultat suivant peut être obtenue en combinant le théorème 16 et le corollaire 12 de [ZG04]. Ceux-ci sont énoncés en termes d'intersections pré-markoviennes (selon notre terminologie), mais la remarque précédente garantit qu'ils sont également valables pour les intersections markoviennes.

Proposition 16.21. — Soient $(R_i)_{0 \leq i \leq n}$ des rectangles et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ des homéomorphismes de S tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'intersection $f_i(R_{i-1}) \cap R_i$ soit markovienne. Alors il existe $x \in \text{int}(R_0)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $f_i f_{i-1} \dots f_1(x) \in \text{int}(R_i)$.

De plus, si $R_0 = R_n$, alors on peut supposer que $f_n f_{n-1} \dots f_1(x) = x$.

Remarquons que les conclusions de ce théorème sont identiques aux propriétés de la relation de recouvrement des intervalles « $\rightarrow$ » définie dans la preuve du théorème A.1 de Sharkovsky; c'est pour cette raison que les relations de semi-conjugaison qu'on va établir pour les fers à cheval des homéomorphismes de surfaces sont très similaires à celles des fers à cheval des endomorphismes de l'intervalle.

Démonstration. — Prouvons que la propriété pour les intersections pré-markoviennes implique la propriété pour les intersections markoviennes.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, l'intersection $f_i(R_{i-1}) \cap R_i$ est markovienne, donc il existe un sous-rectangle horizontal R'_{i-1} de R_{i-1} tel que l'intersection $f_i(R'_{i-1}) \cap R_i$ soit pré-markovienne. En utilisant la remarque 16.20, on en déduit que pour tout $1 \leq i \leq n$, l'intersection $f_i(R'_{i-1}) \cap R'_i$ est pré-markovienne, et on peut appliquer la propriété pour les intersections pré-markoviennes. $\square$

La propriété suivante est une conséquence directe de la définition.

Lemme 16.22. — Soient R_1, R_2 deux rectangles tels que l'intersection $R_1 \cap R_2$ soit markovienne. Il existe alors un voisinage V de Id_S dans $\text{Homeo}(S)$ tel que, pour tout $g \in V$, l'intersection $g(R_1) \cap R_2$ soit markovienne.

La définition suivante est une variante géométrique du concept abstrait de fer à cheval rotationnel défini dans [PPS18] et utilisé dans [LCT22].

Définition 16.23. — Soit S une surface de caractéristique d'Euler négative et f un homéomorphisme de S .

On dit que f possède un *fer à cheval rotationnel associé aux automorphismes de revêtements* $T_1, \dots, T_k$ s'il existe un rectangle $\tilde{R}$ de $\tilde{S}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq k$, l'intersection $T_i \tilde{R} \cap \tilde{f}(\tilde{R})$ soit markovienne.

Pour tout ensemble fini $\{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$, notons $\sigma : \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ le décalage, c'est-à-dire la fonction qui, à une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, associe la suite $(a_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$.

De la proposition 16.21 il découle un résultat de « semi-conjugaison », qui permet de relier notre notion de fer à cheval à celle de [LCT22] :

Proposition 16.24. — Supposons que f possède un fer à cheval rotationnel associés aux automorphismes de revêtement $U_1, \dots, U_k$, et que ceux-ci forment un groupe libre. Alors il existe $q \geq 0$, un sous-ensemble f^q -invariant compact $\tilde{Y}$ de $\tilde{S}$, un homéo g de $\tilde{Y}$ et une application continue surjective $h_1 : \tilde{Y} \rightarrow \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sigma} & \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}} \\ h_1 \uparrow & & \uparrow h_1 \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f^q} & Y \end{array}$$

(π désigne la projection canonique) et de plus

- l'image réciproque par h_1 de toute suite p -périodique pour σ contient un élément qui se projette sur un point p -périodique pour f^q ;
- pour tout $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ et tout $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{qn}(\tilde{y}) &\in U_{h_1(\tilde{f}^{q(n-1)}(\tilde{y}))}^q U_{h_1(\tilde{f}^{q(n-2)}(\tilde{y}))}^q \dots U_{h_1(\tilde{y})}^q(\tilde{Y}), \quad \text{et} \\ \tilde{f}^{-qn}(\tilde{y}) &\in U_{h_1(\tilde{f}^{-qn}(\tilde{y}))}^{-q} U_{h_1(\tilde{f}^{-(n-1)}(\tilde{y}))}^{-q} \dots U_{h_1(\tilde{f}^{-q}(\tilde{y}))}^{-q}(\tilde{Y}). \end{aligned}$$

Des propriétés similaires s'appliquent pour f au lieu de f^q : on obtient certaines conséquences classiques de la semi-conjugaison à un décalage sans la propriété de semi-conjugaison elle-même. Par la suite, on notera $\langle T_1, \dots, T_k \rangle_+$ le semi-groupe engendré par les éléments $T_1, \dots, T_k$.

Proposition 16.25. — Supposons que f ait un fer à cheval rotationnel associé aux automorphismes de revêtement $U_1, \dots, U_k$. Alors

- pour tout mot $T \in \langle U_1, \dots, U_k \rangle_+$ de longueur q , il existe $\tilde{x} \in \tilde{S}$ tel que $\tilde{f}^q(\tilde{x}) = T\tilde{x}$ (en d'autres termes, x est un point q -périodique associé à T) ;
- il existe $D_0 > 0$ tel que, pour tout mot $(w_i)_i \in \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$, il existe $\tilde{x} \in \tilde{S}$ tel que, pour tout $i \geq 0$,

$$d(\tilde{f}^i(\tilde{x}), U_{w_i} \dots U_{w_0} \tilde{x}) \leq D_0, \quad d(\tilde{f}^{-i}(\tilde{x}), U_{w_{-i}}^{-1} \dots U_{w_{-1}}^{-1} \tilde{x}) \leq D_0.$$

- si $U_1, \dots, U_k$ forment un groupe libre, alors l'entropie topologique de f est supérieure à $\ln k$.

Il existe une réciproque à cette dernière conclusion en régularité $C^{1+\alpha}$, démontrée par Katok [Kat80] (tout difféo de surface de classe $C^{1+\alpha}$ et d'entropie topologique positive possède un fer à cheval), qui est fausse en régularité C^0 , par une constructions due à Rees [Ree81].

16.8. Géodésiques fermées non simplés et obtention de fers à cheval rotationnels

On peut maintenant énoncer un critère d'existence de fers à cheval rotationnels en termes de vecteurs de rotation homotopiques :

Théorème 16.26 ([GM25, theorem E]). — Soit γ une géodésique fermée avec une auto-intersection géométrique (comme dans la figure 34) associée à l'automorphisme de revêtement T_1 . Notons T_2 l'automorphisme de revêtement tel que $T = T_1 T_2$ soit l'automorphisme de revêtement associé à la géodésique fermée γ .

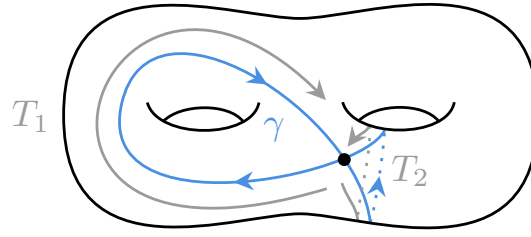


FIGURE 34. Une configuration dans laquelle s'applique le théorème 16.26 : la géodésique γ possède une auto-intersection géométrique.

Supposons que $(\gamma, \ell(\gamma)) \in \text{rot}^{\pi_1}(f)$. Alors, f^7 possède un fer à cheval topologique associé aux automorphismes de revêtement $T_1, T_1^2, T_2, T_1 T_2, T_2 T_1$ et $T_1 T_2 T_1$.

La preuve se découpe en deux parties indépendantes qui font toutes deux intervenir la théorie du forçage de Le Calvez et Tal [LCT18, LCT22]. Pour la première partie, l'idée de départ est la même que pour le résultat précédent (proposition 16.16) : on considère le revêtement associé aux automorphismes T_1 et T_2 , sauf que dans ce cas le revêtement associé est la sphère privée de trois points. Par ailleurs, la proposition 16.15.3. permet d'obtenir des points périodiques tournant dans la direction de γ . On travaille alors dans le revêtement décrit ci-dessus pour démontrer que la trajectoire d'un tel point périodique possède une auto-intersection transverse au sens des feuilletages ; la preuve n'est pas si ardue et consiste à montrer qu'il n'y a en fait qu'un seul cas possible, en particulier que le feuilletage transverse associé est unique à conjugaison près (comme sur la figure 35). La deuxième partie de la preuve suit de très près la preuve d'existence de fer à cheval de [LCT22] et est relativement technique. Si on cherche uniquement à avoir l'existence de nouveaux points périodiques avec certaines propriétés rotationnelles, on peut se contenter de [GM25, proposition 9.26].

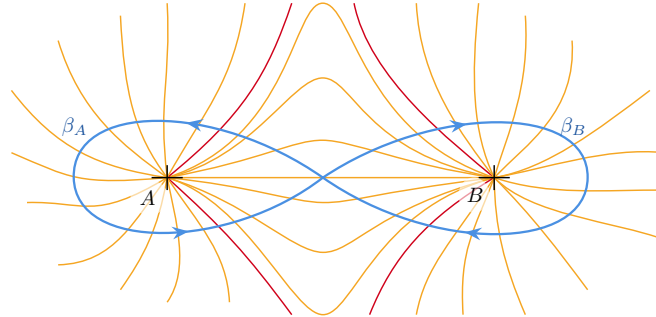
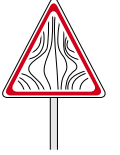


FIGURE 35. Dans le revêtement associé aux automorphismes T_1 et T_2 , le feuilletage transverse doit ressembler à cette configuration. Cela force l'existence d'une auto-intersection transverse au sens des feuilletages.

16.9. Deux géodésiques fermées qui se croisent : plein de points périodiques

On vient de parler de ce qui se passe quand une géodésique fermée correspondant à un vecteur de rotation homotopique possède une auto-intersection, voyons quelles sont les conséquences d'hypothèses un peu plus faibles : lorsque deux géodésiques fermées correspondant à deux vecteurs de rotation homotopiques s'intersectent. Dans ce cas, il y a également existence de fers à cheval rotationnels (c'est une conséquence du prochain théorème

énoncé), mais aucun d'eux n'est suffisant pour décrire tous les nouveaux vecteurs de rotation homotopiques obtenus. La conclusion du théorème suivant est donc énoncée en termes de nouveaux vecteurs de rotation homotopiques.

Théorème 16.27 ([GM25, theorem F]). — Soient γ_1 et γ_2 deux géodésiques fermées de S , qui se relèvent dans $\tilde{S}$ en des géodésiques $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ qui se croisent (voir par exemple les courbes α et β de la figure 30, notons qu'elles peuvent avoir des auto-intersections). Soient T_1 et T_2 les automorphismes de revêtement associés aux géodésiques fermées respectives γ_1 et γ_2 et qui préservent respectivement $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$.

Supposons qu'il existe des vecteurs de rotation non nuls de directions $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ dans $\text{rot}^{\pi_1}(f)$. Alors, pour tout élément w dans $\langle T_1, T_2 \rangle_+ \setminus (\langle T_1 \rangle_+ \cup \langle T_2 \rangle_+)$, il existe des vecteurs de rotation non nuls de direction $\tilde{\gamma}(w)$ (un relevé de la géodésique fermée de S associée à l'automorphisme de revêtement w) dans $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ qui sont réalisés par des orbites périodiques.

Attention : le théorème n'affirme pas qu'il existe des orbites périodiques tournant dans les directions de γ_1 et γ_2 (question : est-ce le cas?).

La preuve de ce théorème se fait elle aussi à l'aide de la théorie du forçage de Le Calvez et Tal [LCT18, LCT22]. Est assez longue et divisée en de nombreux sous-cas. L'une des difficultés réside dans le fait que les chemins transverses associés aux trajectoires réalisant les vecteurs de rotation n'ont pas besoin d'avoir une intersection $\mathcal{F}$ -transverse (l'existence de contre-exemples à ce fait est due à Lellouch [Lel23]).

Notez que nous n'avons rien dit des vitesses des vecteurs de rotation obtenus dans la conclusion : la preuve de ce résultat étant déjà très technique, il nous a semblé qu'ajouter des détails sur ces vitesses ne ferait que perdre un peu plus le lecteur déjà torturé par la démonstration.

Penser à en parler plus tard

Problème 16.28. — Que dire des vitesses associées aux vecteurs de $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ obtenus dans la conclusion du théorème 16.27?

CHAPITRE 17

SUITE DU DÉTOUR PAR L'HOMOTOPIE : LA THÉORIE ERGODIQUE À LA RESCOUSSE

Les résultats de [GM25], bien qu'ils réalisent une avancée par rapport à ceux de la section 15, ne sont que partiellement satisfaisants : leur hypothèse concerne des vecteurs de rotation homotopiques selon des géodésiques fermées. Ils ne sauraient donc s'appliquer de manière pertinente à tous les éléments de $\text{Homeo}_0(S)$, par exemple des temps 1 de flots irrationnels comme décrits au paragraphe 7.2.3.

En commençant à réfléchir à ces questions avec Alejo García et Pablo Lessa, notre intuition était que la théorie ergodique pouvait nous aider à avancer sur ces questions; en particulier les points typiques pour les mesures pouvaient servir de jalon dans la description du comportement rotationnel de tous les points. On avait utilisé le théorème principal de [Les11] dans notre travail [GM25] avec Emmanuel pour obtenir des résultats de réalisation de vecteurs de rotation homotopiques selon des géodésiques fermées par des orbites complètes (et pas seulement des segments d'orbites), et il nous a semblé que ce type de raisonnement pourrait avoir d'autres conséquences intéressantes.

17.1. Ensemble traçant

L'idée centrale de notre travail est que pour toute mesure ergodique de l'homéo, il existe un suivi des orbites typiques pour cette mesure par les orbites du flux géodésique de la surface. En quelque sorte, le comportement des points typiques pour une certaine mesure invariante est codé par une sous-dynamique du flot géodésique, et l'une des tâches consiste à comprendre dans quelle mesure ce parallèle peut être rendu rigoureux. Le même type d'idées avait déjà été formulé par Boyland dans [Boy00]. Introduisons d'abord quelques définitions.

Définition 17.1 (Vitesse de fuite). — La *vitesse de fuite* $\vartheta(x)$ d'un point $x \in S$ est la valeur commune des limites suivantes si elles existent et coïncident :

$$(35) \quad \vartheta(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d(\tilde{x}, \tilde{f}^n(\tilde{x})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d(\tilde{x}, \tilde{f}^{-n}(\tilde{x})).$$

Le lemme suivant exprime que les mesures ergodiques ont une vitesse de fuite.

Lemme 17.2 ([GSGL24, lemma 1.6]). — *Pour toute mesure f -ergodique μ , il existe une constante ϑ_μ , qu'on appelle vitesse de fuite de μ , telle que*

$$\vartheta(x) = \vartheta_\mu,$$

pour μ -presque tous $x \in S$.

Démonstration. — Cela découle directement du théorème ergodique sous-additif de Kingman appliqué aux applications $d(\tilde{x}, \tilde{f}^n(\tilde{x}))$. $\square$

Définition 17.3. — On dit que $x \in S$ admet une *géodésique traçante* γ si $\vartheta(x) > 0$ et si, pour chaque relevé $\tilde{x}$ de x , il existe un relevé $\tilde{\gamma}$ de γ tel que :

$$(36) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{\gamma}(n\vartheta(x))) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} d(\tilde{f}^{-n}(\tilde{x}), \tilde{\gamma}(-n\vartheta(x))) = 0.$$

Autrement dit, l'orbite de $\tilde{x}$ par $\tilde{f}$ s'éloigne de la géodésique $\tilde{\gamma}$ parcourue à vitesse $\vartheta(x)$ à vitesse sous-linéaire.

Les géodésiques traçantes (lorsqu'elles existent) sont uniques à reparamétrisation par translation près, en particulier l'ensemble $\dot{\gamma}(\mathbf{R}) \subset T^1S$ ne dépend pas du choix de la géodésique traçante γ pour x . Par un changement de paramétrisation de la géodésique par translation, on peut normaliser une géodésique traçante en demandant que le point $\tilde{\gamma}(0)$ soit la projection de $\tilde{x}$ sur la géodésique $\tilde{\gamma}(\mathbf{R})$:

Définition 17.4. — Étant donné $x \in S$, on dit qu'une géodésique traçante γ_x est *normalisée* s'il existe des relevés $\tilde{x}, \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$ satisfaisant l'équation (36) et tels que

$$(37) \quad d(\tilde{x}, \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(0)) = d(\tilde{x}, \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(\mathbf{R}))$$

Notons que chaque point x admettant une géodésique traçante admet une unique géodésique traçante normalisée γ_x .

Notons $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta>0}(f)$ l'ensemble des mesures ergodiques f -invariantes vérifiant $\vartheta_\mu > 0$ (définie par le lemme 17.2). Le résultat suivant implique en particulier que si $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta>0}(f)$ n'est pas vide, alors il existe des points admettant des géodésiques traçantes.

Théorème 17.5 (Géodésiques traçantes, [GSGL24, theorem B])

L'ensemble S_T des points de S qui admettent une géodésique traçante (définition 17.3) est borélien et est de mesure totale pour tout $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta>0}(f)$. De plus, il existe une application borélienne $x \mapsto \gamma_x$ associant à chaque $x \in S_T$ sa géodésique traçante normalisée $\gamma_x : \mathbf{R} \rightarrow S$ (voir la définition 17.4).

Le théorème 17.5 avait déjà été essentiellement prouvé pour toute variété de courbure sectionnelle strictement négative satisfaisant la propriété de visibilité dans [Les11, theorem 2 et corollary 21]. Pour la courbure négative constante, la preuve est cependant beaucoup plus simple ; elle met en jeu principalement la géométrie du plan hyperbolique et la théorie ergodique.

Un résultat à peu près équivalent pour les flots sur des fibrés sur une variété hyperbolique de base avait également été prouvé dans [Boy00, Lemmas 2.2 et 2.3]. Ce travail peut être adapté au cas des difféomorphismes C^1 sur une surface hyperbolique fermée en considérant son flot de suspension. Je ne sais pas si cette stratégie de preuve peut être directement adaptée au cas C^0 .

L'étape suivante consiste à comprendre ce qui se passe collectivement pour les géodésiques traçantes associées à une mesure f -ergodique μ dont la vitesse de fuite est positive.

Définition 17.6. — On dit qu'une géodésique γ s'*équidistribue* sur une mesure ν de T^1S si, pour toute fonction continue $\varphi : T^1S \rightarrow \mathbf{R}$, on a

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\dot{\gamma}(t)) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 \varphi(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_{T^1S} \varphi(v) d\nu(v).$$

Rappelons que le support d'une mesure est le plus petit ensemble fermé de mesure totale. Le théorème qu'on s'appête à énoncer exprime que les géodésiques traçantes associées à une mesure ergodique s'équidistribuent presque toutes selon une mesure de proba sur T^1S :

Théorème 17.7 ([GSGL24, theorem C]). — *Pour chaque $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$, il existe une mesure de probabilité ν_μ sur T^1S telle que γ_x s'équidistribue sur ν_μ pour μ -presque tout $x \in S$. De plus, la mesure ν_μ est invariante et ergodique pour le flot géodésique sur T^1S . Son support est égal à*

$$(38) \quad \dot{\Lambda}_\mu := \text{supp}(\nu_\mu) = \overline{\dot{\gamma}_x(\mathbf{R})}$$

pour μ -presque tout $x \in S$.

On notera Λ_μ la projection de $\dot{\Lambda}_\mu$ sur S .

La preuve du théorème 17.7 est relativement directe. L'existence de la mesure ν_μ se fait en définissant la bonne fonctionnelle sur $C^0(T^1S)$ et en appliquant le théorème de représentation de Riesz. L'ergodicité se déduit de celle de μ en étendant la fonctionnelle précédente aux indicatrices de mesurables. La dernière assertion du théorème se démontre elle aussi par des arguments assez élémentaires de théorie ergodique.

Définition 17.8. — On définit l'ensemble traçant de $f \in \text{Homeo}_0(S)$ comme étant

$$\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f) = \bigcup_{\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)} \dot{\Lambda}_\mu \subset T^1S.$$

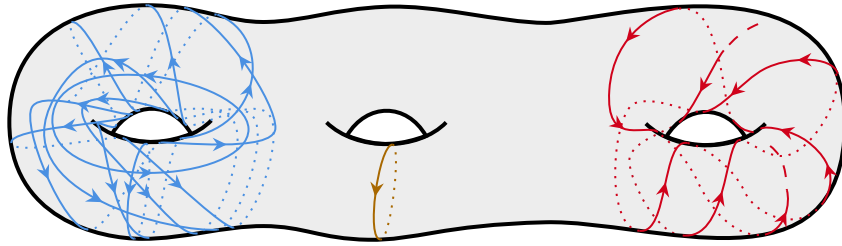


FIGURE 36. Un exemple d'ensemble traçant : on a une géodésique fermée isolée (en marron au centre), une lamination géodésique minimale (en rouge à droite), et un tas de géodésiques avec une quantité considérable d'intersections (en bleu à gauche). On verra plus tard que ce sont les seuls cas possibles.

Voir la figure 36 pour un exemple de tel ensemble.

Cet ensemble est invariant par le flot géodésique et les théorèmes qu'on va énoncer tantôt expriment des contraintes sur sa structure. Cette étude de l'ensemble traçant est un élément clé de la preuve du théorème 18.2 à venir.

On peut également vouloir garder en mémoire la donnée des vitesses, ce qui donne un sous-ensemble de TS invariant par le flot géodésique, en choisissant la vitesse de parcours des géodésiques traçantes d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ comme étant égale à ϑ_μ .

Le lemme suivant est trivial :

Lemme 17.9. — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Alors toute géodésique traçante (au sens de la définition 17.3) appartient à $\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f)$ (voir la définition 16.7).*

Attention : il n'y a pas de raison pour qu'on ait l'inclusion $\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f) \subset \pi_{T^1S}(\text{rot}^{\pi_1}(f))$ en général (voir la définition 16.7). En effet, l'ensemble $\text{rot}^{\pi_1}(f)$ n'est pas toujours fermé (comme expliqué dans [GM25, section 7.3]). Il serait intéressant de faire le calcul pour vérifier si cette inclusion est vraie dans le cas d'un flot irrationnel non totalement irrationnel arrêté sur une surface plate de genre 2.

Bilan. — À chaque mesure f -ergodique μ est associée une vitesse de fuite à l'infini ϑ_μ . Si cette vitesse est non nulle, alors μ -presque tout point a ses relevés à $\tilde{S}$ qui suivent des géodésiques qu'on appelle “traçantes”. On peut alors définir l'ensemble $\dot{\Lambda}_\mu$ des géodésiques traçantes associées à la mesure μ , comme étant le support de la mesure de T^1S sur laquelle s'équidistribuent les géodésiques traçantes. L'union de ces ensembles $\dot{\Lambda}_\mu$ sur toutes les mesures ergodiques μ à vitesse de fuite positive donne un invariant dynamique qu'on appelle ensemble traçant. Il peut parfois être utile de visualiser cet ensemble comme un sous-ensemble de S (par projection).

17.2. Géodésiques traçantes simples

Rappelons qu'une *lamination géodésique* est un ensemble fermé $\Lambda \subset S$ de la forme (voir page 69)

$$\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} \beta_x(\mathbf{R}),$$

où chaque β_x est une géodésique simple avec $\beta_x(0) = x$, et où pour tous les $x, y \in \Lambda$, on a que $\beta_x(\mathbf{R})$ et $\beta_y(\mathbf{R})$ soit sont disjoints, soit coïncident.

Dans le cas où les géodésiques traçantes sont simples, les ensembles $\Lambda_m u$ sont des laminations géodésiques minimales :

Théorème 17.10 ([GSL24, theorem D]). — *Supposons que $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ soit telle que γ_x soit simple pour μ -presque tout $x \in S$. Alors Λ_μ est une lamination géodésique minimale.*

Il est donc naturel de rechercher un critère garantissant que les géodésiques traçantes soient simples. C'est ce qui sera fait au paragraphe 17.4.

La preuve du théorème 17.10 est assez élémentaire et fait appel à la description des laminations géodésiques minimales sur les surfaces hyperboliques [CB88] : une lamination géodésique y est minimale si et seulement si elle est connexe et sans feuille isolée.

Dans un travail plus récent [GT25b], on démontre avec Fabio Tal que ces laminations sont orientables :

Théorème 17.11 ([GT25b, theorem A]). — *Sous les hypothèses du théorème 17.10, la lamination géodésique minimale Λ_μ est orientable.*

Contrairement à celle du théorème 17.10, la preuve de ce résultat fait appel à la théorie du forçage, et demande un peu de travail.

17.3. Quelques résultats élémentaires

Considérons un domaine fondamental borné $D \subset \tilde{S}$ pour S . On sait qu'il existe au moins un point fixe de $\tilde{f}$ dans D (c'est le théorème de point fixe de Lefschetz). Par conséquent, si $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ est non vide, alors d'après le théorème 17.5, le diamètre de $\tilde{f}^n(D)$ doit croître linéairement. La proposition ci-dessous montre que cette condition est en fait suffisante pour que $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ soit non vide. Cette propriété était la motivation initiale du projet [GSL24].

Proposition 17.12 ([GSGL24, proposition 4.1]). — Soit D un domaine fondamental borné de S . Si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \operatorname{diam}(\tilde{f}^n(D)) = C > 0,$$

alors il existe $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ tel que $\vartheta_\mu \geq C/2$.

Exercice 17.13. — Montrer de manière élémentaire que si $\liminf \operatorname{diam}(\tilde{f}^n(D))/n = 0$, alors $\limsup \operatorname{diam}(\tilde{f}^n(D))/n = 0$.

En déduire que si le diamètre des itérés d'un domaine fondamental croît linéairement, alors l'ensemble traçant est non trivial, et donc l'ensemble de rotation homotopique est non trivial (avec en plus une vitesse minorée).

L'ensemble traçant et l'ensemble de rotation homotopique capturent donc toutes les dynamiques rotationnelles à vitesse au moins linéaire, ce qui n'est pas le cas pour les ensembles de rotation homologiques (penser à un homéo d'une surface de genre 2 supporté dans un anneau essentiel séparant).

La preuve de la proposition 17.12 n'est pas très difficile et consiste en une application de la stratégie de Krylov-Bogolyubov, en utilisant comme il faut la division euclidienne pour découper les segments d'orbite (comme à la preuve de la proposition 3.4).

La propriété élémentaire suivante fait le lien entre ensemble traçant et ensemble de rotation homologique : si on connaît le premier, alors on peut en déduire l'ensemble de rotation ergodique de la définition 5.1. En d'autres termes plus informels, l'ensemble de rotation ergodique est une projection de l'ensemble traçant.

Rappelons que les chemins δ_x (respectivement $\bar{\delta}_x$) relient un point base o au point x (respectivement x à o), voir l'équation (17) page 24 et les paragraphes précédents.

Définition 17.14 (Classe d'homologie pour les géodésiques). — Étant donnée une géodésique paramétrée $\tilde{\gamma} \subset \tilde{S}$, sa classe d'homologie $[\tilde{\gamma}]$ est définie par (lorsque la limite est bien définie) :

$$[\tilde{\gamma}] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} [\bar{\delta}_{\gamma(t)} \gamma|_{[0,t]} \delta_{\gamma(0)}].$$

La rotation homologique des mesures ergodiques est égale à celle de leurs géodésiques traçantes :

Proposition 17.15 ([GSGL24, proposition 4.6]). — Soit $f \in \operatorname{Homeo}_0(S)$. Si μ est une mesure f -invariante ergodique pour laquelle $\rho_f(\mu) \neq 0$, alors $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$ et de plus, pour μ -presque tous $x \in S$,

$$\rho_f(\mu) = [\tilde{\gamma}_x].$$

Le preuve de cette propriété est assez directe et utilise le lemme de Svarč-Milnor.

La dernière proposition exprime que si deux mesures ergodiques ont leurs vecteurs de rotation homologiques qui s'intersectent (au sens de la proposition 6.1), alors les géodésiques traçantes de leurs points typiques respectifs s'intersectent. C'est une propriété cruciale car, on le verra plus tard, les intersections de géodésiques traçantes doivent être étudiées pour comprendre la forme des ensembles de rotation homologiques.

Proposition 17.16 ([GSGL24, proposition 4.7]). — Soit $f \in \operatorname{Homeo}_0(S)$. Si μ_1, μ_2 sont des mesures f -invariantes ergodiques pour lesquelles $\rho_f(\mu_1) \wedge \rho_f(\mu_2) \neq 0$, alors pour x_1 typique pour μ_1 et x_2 typique pour μ_2 , leurs géodésiques traçantes γ_{x_1} et γ_{x_2} s'intersectent transversalement.

Encore une fois, la preuve de cette proposition est élémentaire. Il s'agit tout d'abord d'utiliser la récurrence d'une géodésique traçante d'une première mesure afin de la refermer avec un petit segment. On majore ensuite le nombre d'intersection géométrique de ce petit segment avec un bout de géodésique traçante pour la seconde mesure, puis on minore le nombre d'intersection total entre la géodésique refermée et la géodésique traçante de la seconde mesure. On conclut par un petit calcul.

17.4. Intersections de géodésiques traçantes

On peut maintenant présenter le résultat technique principal de [GSGL24]. Celui-ci donne toute une série de conséquences à l'existence d'une intersection transverse entre deux géodésiques traçantes. En particulier, celle-ci implique l'existence d'un fer à cheval rotationnel (définition 16.23) ayant de bonnes propriétés. Cela donne également des contraintes sur la forme de l'ensemble traçant.

Définition 17.17. — Soient $\mu, \mu' \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial > 0}(f)$. On dit que μ et μ' sont *dynamiquement transverses* s'il existe une géodésique de $\dot{\Lambda}_\mu$, et une de $\dot{\Lambda}_{\mu'}$, qui s'intersectent transversalement.

Notons que si μ et μ' sont dynamiquement transverses, alors par (38) toutes les géodésiques traçantes de μ et μ' s'intersectent transversalement.

Théorème 17.18 ([GSGL24, theorem 5.8]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial > 0}(f)$ qui sont dynamiquement transverses. Alors :

- L'homéo f possède un fer à cheval rotationnel (voir la définition 16.23), en particulier l'entropie topologique de f est positive.
- Pour μ_1 -presque tout $x_1 \in S$ et μ_2 -presque tout $x_2 \in S$, choisissons des relevés $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ de x_1 et x_2 tels que $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}$ et $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_2}$ s'intersectent transversalement. Alors les triplets $(\alpha(\tilde{x}_1), \omega(\tilde{x}_2), \max(\vartheta_{\mu_1}, \vartheta_{\mu_2}))$ et $(\alpha(\tilde{x}_2), \omega(\tilde{x}_1), \max(\vartheta_{\mu_1}, \vartheta_{\mu_2}))$ sont dans $\text{rot}^{\pi_1}(f)$.
- Pour tout $r \in H_1(S, \mathbf{R})$ dans le triangle engendré par $0, \rho_f(\mu_1), \rho_f(\mu_2)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point périodique $z \in S$ et quatre relevés $(\tilde{z}_j)_{1 \leq j \leq 4}$ de z à $\tilde{S}$ tels que, en notant d la distance sur les géodésiques induite par la distance euclidienne sur $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ sur les couples de leurs extrémités (voir la figure 37),
 - $\rho_f(z) \in B(r, \varepsilon)$;
 - $d(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}, \tilde{\gamma}_{\tilde{z}_1}) < \varepsilon$;
 - $d(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_2}, \tilde{\gamma}_{\tilde{z}_2}) < \varepsilon$;
 - $d((\alpha(\tilde{x}_1), \omega(\tilde{x}_2)), \tilde{\gamma}_{\tilde{z}_3}) < \varepsilon$;
 - $d((\alpha(\tilde{x}_2), \omega(\tilde{x}_1)), \tilde{\gamma}_{\tilde{z}_4}) < \varepsilon$.

En particulier, considérant les géodésiques traçantes des points périodiques z obtenus, on voit que l'existence d'intersections transverses dans l'ensemble traçant implique la présence de tout un tas d'autres géodésiques dans cet ensemble traçant.

D'autre part, ce théorème implique que si un homéo est sans fer à cheval (a fortiori s'il est d'entropie nulle), alors les géodésiques de son ensemble traçant ne possèdent pas d'intersections transverses ; en particulier (par le théorème 17.10) tous les ensembles Λ_μ sont des laminations géodésiques minimales et l'ensemble traçant $\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f)$ est une union disjointe de laminations géodésiques minimales. Par la théorie des laminations géodésiques sur les surfaces [CB88], cette union doit être finie. Ainsi, la dynamique des points typiques est décrite par une union finie de laminations géodésiques minimales.

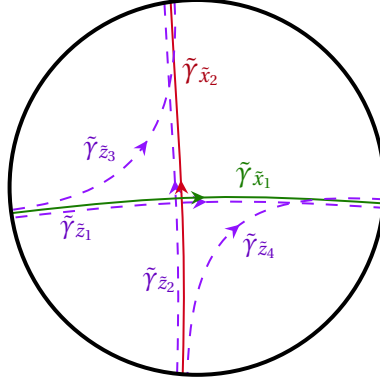


FIGURE 37. Les deux géodésiques traçantes $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}$ et $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_2}$ initiales, et les quatre relevés du point périodique z détectés par le théorème 17.18.

Notons que ce théorème améliore strictement les premiers théorèmes de la thèse de Gabriel Lellouch [Lel23, théorème A, théorème C] : Gabriel y démontre que si on remplace l'hypothèse « dynamiquement transverse » par celle plus forte⁽¹⁾ « $\rho_f(\mu_1) \wedge \rho_f(\mu_2) \neq 0$ », alors f possède un fer à cheval rotationnel et pour tout $r \in H_1(S, \mathbf{R})$ dans le triangle engendré par $0, \rho_f(\mu_1), \rho_f(\mu_2)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point périodique $z \in S$ tel que $\rho_f(z) \in B(r, \varepsilon)$.

Ce théorème 17.18 est capital pour le reste de la théorie : presque tout ce qui suit dans ce mémoire est basé sur ce théorème.

Problème 17.19. — *Sous quelles conditions les résultats de ce chapitre peuvent-ils s'étendre au cas des surfaces non compactes ?*

Je résiste à la tentation de donner des éléments de la preuve du théorème 17.18 ici : elle se base sur la théorie du forçage des homéos de surfaces et est assez longue et technique. C'est d'ailleurs la partie la plus difficile du travail [GSGL24]. Elle utilise en particulier des idées de preuves de la thèse de Gabriel [Lel23], un lemme technique d'un travail commun avec Patrice Le Calvez et Alejandro Passeggi [GLCP25] et une amélioration (très) technique d'un résultat technique de [LC08].

À la place, je propose de donner des idées d'une démonstration de l'énoncé suivant, qui est bien plus faible :

Proposition 17.20. — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ sans fer à cheval topologique (en particulier, ça inclut le cas où f est d'entropie topologique nulle). Alors toutes les géodésiques traçantes de f sont simples.*

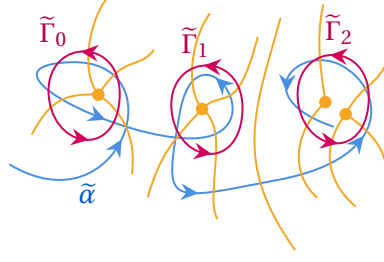
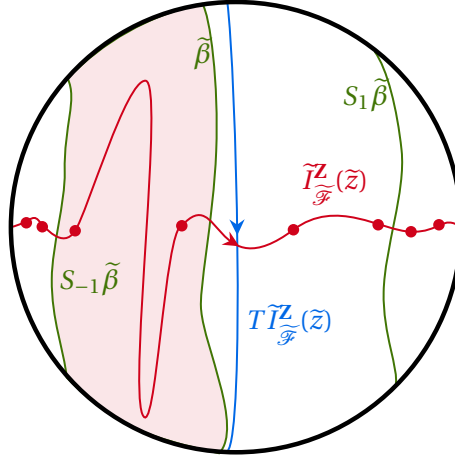
Idées de preuve. — Soit $\mu \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial > 0}(f)$ et z un point μ -typique. On considère une trajectoire transverse $I_{\mathcal{F}}^Z(z)$ de z , un relevé $\tilde{z}$ de z à $\tilde{S}$ et la trajectoire transverse $I_{\tilde{\mathcal{F}}}^Z(\tilde{z})$ associée. On suppose que la géodésique traçante $\tilde{\gamma}_{\tilde{z}}$ de $\tilde{z}$ n'est pas simple, et on veut montrer que $h_{\text{top}}(f) > 0$.

1^{ère} étape : on montre que si la trajectoire transverse $I_{\tilde{\mathcal{F}}}^Z(\tilde{z})$ n'est pas simple, alors $h_{\text{top}}(f) > 0$. Pour cela, on va montrer une propriété plus forte : si la trajectoire transverse $I_{\tilde{\mathcal{F}}}^Z(\tilde{z})$ croise deux fois une même feuille du relevé $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ à $\tilde{S}$, alors $h_{\text{top}}(f) > 0$.



dessiner

⁽¹⁾Le fait que cette hypothèse est plus forte est une conséquence de la proposition 17.16.

FIGURE 38. Le lemme 17.21 : le chemin $\tilde{\alpha}$ doit avoir une auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse.FIGURE 39. Comment montrer que la trajectoire transverse de $\tilde{z}$ « suit » la géodésique $\tilde{\gamma}_{\tilde{z}}$. On utilise $T \in \mathcal{G}$ tel que $T\tilde{\gamma}_{\tilde{z}}$ croise $\tilde{\gamma}_{\tilde{z}}$. Si $\tilde{f}^n(\tilde{z})$ est entre deux relevés de β , et proche de $\text{Fix}(I)$, alors $I_{\mathcal{F}}(\tilde{f}^n(\tilde{z}))$ reste entre ces deux relevés.

Puisque la trajectoire $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ croise deux fois une même feuille de $\mathcal{F}$, celle-ci dessine un lacet transverse simple $\tilde{\Gamma}$. Par récurrence de $I_{\mathcal{F}}^Z(z)$, et du fait que l'orbite de $\tilde{z}$ est propre dans $\tilde{S}$, on en déduit qu'il existe deux automorphismes de revêtement T_1, T_2 telles que $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ dessine également $T_1\tilde{\Gamma}$ et $T_2\tilde{\Gamma}$; on peut en outre choisir T_1, T_2 de telle sorte que $\tilde{\Gamma}, T_1\tilde{\Gamma}$ et $T_2\tilde{\Gamma}$ ne s'intersectent pas, et qu'aucun d'entre eux ne soit inclus dans la composante connexe bornée du complémentaire d'un autre. On applique alors le lemme suivant, qui est une conséquence directe de [LCT22, proposition 24] :

Lemme 17.21 ([GT25a, lemma 2.20]). — Soient $\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2 : \mathbf{S}^1 \rightarrow \tilde{S}$ trois courbes fermées simples non équivalentes et $\mathcal{F}$ -transverses, telles qu'aucune d'entre elles n'est incluse dans la composante connexe bornée du complémentaire d'une autre (voir la figure 38). Si un chemin transverse $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \tilde{S}$ dessine $\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1$ et $\tilde{\Gamma}_2$, alors $\tilde{\alpha}$ a une auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse.

Ainsi, la trajectoire $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ a une auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse, et donc par le théorème A.15 f possède un fer à cheval topologique.

2^{ème} étape : on montre que la trajectoire transverse $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ tend vers $\alpha(\tilde{\gamma}_{\tilde{z}})$ en $-\infty$ et vers $\omega(\tilde{\gamma}_{\tilde{z}})$ en $+\infty$ ([GSGL24, proposition 5.11]). C'est une partie très technique : bien sûr la propriété est vraie pour l'orbite $(\tilde{f}^n(\tilde{z}))_{n \in \mathbb{Z}}$ ou même la trajectoire sous l'isotopie $I^Z(\tilde{z})$, mais l'avoir pour la trajectoire transverse $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ est une autre paire de manches.

def dessine, quelques outils de forçage à la fin de l'annexe (bande, croisement, accumulation, approximation...

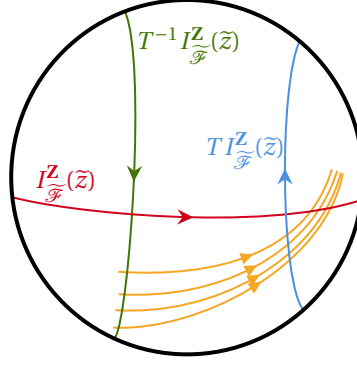


FIGURE 40. Il est impossible que les trajectoires $I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ et $T^{-1}I_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ soient équivalentes en $+\infty$: les feuilles, ici représentées en orange, devraient alors croiser la trajectoire $TI_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ dans le mauvais sens. Le même phénomène empêche l'équivalence en $-\infty$.

Un petit argument de compacité montre qu'étant donné un voisinage U de $\text{Fix}(\mathcal{F})$, les trajectoires transverses en temps un $I_{\mathcal{F}}(\tilde{x})$ issues d'un relevé de $x \in S \setminus U$ ont leur diamètre uniformément borné. Le gros de travail consiste à montrer qu'étant donné un voisinage V de $\text{Fix}(I)$, il existe un voisinage U de $\text{Fix}(I)$ tel que les trajectoires transverses de points de U restent dans V ([GSGL24, proposition 5.7], qui est une amélioration d'un résultat de [LC08]). À partir de là, on s'en sort : par récurrence de la géodésique traçante γ_z et le fait qu'elle n'est pas simple, on trouve un lacet transverse β qu'elle croise de manière syndétique (le temps entre deux croisements est uniformément borné), lequel lacet transverse est obtenu comme approximation de la trajectoire transverse de z (il a un relevé « proche » de $T\tilde{\gamma}_z$, où $T \in \mathcal{G}$ est tel que $T\tilde{\gamma}_z$ croise $\tilde{\gamma}_z$). On considère alors un voisinage V de $\text{Fix}(I)$ disjoint de β , ce qui assure par exemple que si $f^n(x)$ est proche de $\omega(\tilde{\gamma}_z)$, alors il est situé à droite d'un certain relevé de β (voir la figure 39), et donc $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ reste à droite de ce relevé de β et par conséquent proche de $\omega(\tilde{\gamma}_z)$.

3^{ème} étape : on montre que si $T \in \mathcal{G}$ est tel que $T\tilde{\gamma}_z$ croise $\tilde{\gamma}_z$, alors $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ et $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ s'intersectent $\tilde{\mathcal{F}}$ -transversalement. Par l'étape 1, on peut supposer que la trajectoire transverse $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ est simple. Par l'étape 2, les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ et $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ se croisent. On montre alors que :

- l'une de $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ ou $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ ne peut pas s'accumuler dans l'autre : c'est un résultat de Gabriel [Lel23, lemme 2.1.3] ;
- les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ et $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ ne sont pas équivalentes en $\pm\infty$: c'est une conséquence du fait que celles-ci sont simples, et de l'ordre des points à l'infini des différentes trajectoires $T^k\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (voir la figure 40).

On montre sans trop de problème que cela implique que les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ et $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^Z(\tilde{z})$ s'intersectent $\mathcal{F}$ -transversalement. On conclut à l'existence d'un fer à cheval topologique par le théorème A.15. $\square$

La preuve du théorème 17.18 doit prendre en compte plusieurs complications par rapport à celle de la proposition 17.20 :

- On ne peut pas utiliser gratuitement [Lel23, lemme 2.1.3], car on traite non pas deux relevés d'une même trajectoire mais de deux trajectoires différentes. Il faut donc traiter à part l'éventuel cas d'accumulation.
- Si une géodésique γ a une auto-intersection, alors ses différents relevés s'intersectent de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche. Ce n'est plus vrai lorsqu'on traite deux trajectoires distinctes.
- La conclusion du théorème 17.18 est bien plus forte et il faut travailler avec un peu plus de soin pour obtenir un fer à cheval rotationnel associé à un automorphisme de revêtement permettant d'obtenir les diverses conclusions.

CHAPITRE 18

ENSEMBLES DE ROTATION ERGODIQUES

Déviissage. Outil d e déviissage : mesures ergodiques, pas seulement les points périodiques comme le disait Poincaré.

beware,
faire plus de
blabla au
début des
chapitres

18.1. Énoncés et commentaires

Il s'avère que le théorème 17.18 a des conséquences assez importantes concernant l'ensemble de rotation ergodique. En combinant ce théorème avec une idée d'Emmanuel utilisée dans notre travail commun [GM23], on obtient un théorème de classification des ensembles de rotation ergodiques.

Cette idée d'Emmanuel, c'est de définir une relation d'équivalence sur les mesures de $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$ (son idée portait sur les mesures de vecteur de rotation homologique non nul et la relation d'équivalence portait sur les intersections en homologie).

Cette relation d'équivalence est en gros la relation d'intersection transverse des Λ_μ transitive (la relation d'intersection transverse n'est pas transitive). Plus formellement, la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$ est définie par $\mu_1 \sim \mu_2$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée (voir juste après le théorème 17.7 pour la définition de l'ensemble Λ_μ) :

- $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$;
- il existe $\tau_1, \dots, \tau_m \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$ telles que $\tau_1 = \mu_1$, $\tau_m = \mu_2$ et pour tout $1 \leq j < m$, les mesures τ_j et τ_{j+1} sont dynamiquement transverses.

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence est banal.

Définition 18.1. — On note $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in I} = \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f) / \sim$ les classes d'équivalence de $\sim$. On appelle $I^1 = I^1(f)$ l'ensemble des classes ayant pour propriété que deux mesures quelconques μ_1 et μ_2 de $\mathcal{N}_i$ satisfont $\Lambda_{\mu_1} = \Lambda_{\mu_2}$. On note $\Lambda_i = \bigcup_{\mu \in \mathcal{N}_i} \Lambda_\mu$ et partitionne I^1 en deux sous-ensembles : ceux pour lesquels Λ_i est une géodésique fermée, noté $I_{\text{fer}} = I_{\text{fer}}(f)$, et les autres, notés $I_{\text{min}} = I_{\text{min}}(f)$. Les classes $\mathcal{N}_i$ pour $i \in I_{\text{fer}}$ sont appelées les *classes fermées* et celles avec $i \in I_{\text{min}}$ les *classes minimales*.

Soit $I_h = I_h(f)$ l'ensemble des autres classes, celles pour lesquelles pour tout $\mu \in \mathcal{N}_i$ avec $i \in I_h$, il existe $\mu' \in \mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$ tel que μ et μ' sont dynamiquement transverses. Les classes de I_h seront appelées *hyperboliques*.

On a ainsi

$$I = I^1 \sqcup I_h = I_{\text{fer}} \sqcup I_{\text{min}} \sqcup I_h.$$

Une remarque : d'après le théorème 17.18, pour $\mu \in I^1(f)$, les géodésiques correspondant aux vecteurs de $\dot{\Lambda}_\mu$ sont simples. Plus précisément, si $i \in I_{\text{fer}}$, alors Λ_i est une géodésique

fermée simple, et en utilisant les théorèmes 17.10 et 17.11, on voit que si $i \in I_{\min}$, alors Λ_i est une lamination géodésique minimale orientable sans feuille fermée. Le terme de classe *hyperbolique* sera justifié par la section 20.3.

Cette décomposition en classes conduit au théorème principal de [GSGL24], qui améliore la décomposition de [GM23] (où il y avait des sous-espaces totalement isotropes de $H_1(S, \mathbf{R})$ dans lesquels on ne savait rien dire). Ce résultat exprime que l'ensemble de rotation ergodique se décompose en un nombre fini de pièces, qui sont de deux types : les premières sont incluses dans des droites, les secondes donnent lieu à des fers à cheval rotationnels, avec plein de conséquences à la clé.

Théorème 18.2 (Décomposition de l'ensemble de rotation ergodique, [GSGL24, theorem F])

Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Écrivons

$$\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial > 0}(f) = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{N}_i = \bigsqcup_{i \in I^1} \mathcal{N}_i \sqcup \bigsqcup_{i \in I_h} \mathcal{N}_i$$

la décomposition de l'ensemble des mesures ergodiques à vitesse de fuite positive en classes d'équivalence pour la relation $\sim$, et notons pour $i \in I$,

$$\rho_i = \{\rho_f(\mu) \mid \mu \in \mathcal{N}_i\}, \quad V_i = \text{Vect}(\rho_i), \quad \Lambda_i = \bigcup_{\mu \in \mathcal{N}_i} \Lambda_\mu.$$

Alors :

1. Pour tout $i \in I^1$,
 - Λ_i est une lamination géodésique minimale de S ;
 - $\rho_{I^1} = \bigcup_{i \in I^1} \rho_i$ est inclus dans une union d'au plus $3g - 3$ droites vectorielles (i.e. passant par 0) de $H_1(S, \mathbf{R})$.
2. Si $I_h \neq \emptyset$, alors f possède un fer à cheval topologique (et en particulier, est d'entropie topologique positive), et pour chaque $i \in I_h$:
 - le sous-espace linéaire V_i est rationnel (il a une base formée par des éléments de $H_1(S, \mathbf{Z})$);
 - l'ensemble $\overline{\rho_i}$ est un convexe contenant 0;
 - on a $\text{int}_{V_i}(\overline{\rho_i}) = \text{int}_{V_i}(\rho_i)$ (en d'autres termes, ρ_i est convexe à ceci près que les éléments de $\partial_{V_i}(\rho_i) \setminus \text{extrem}(\rho_i)$ peuvent être dans le complément de ρ_i);
 - chaque élément de $\text{int}_{V_i}(\rho_i) \cap H_1(S, \mathbf{Q})$ est le vecteur de rotation d'une orbite f -périodique (puisque V_i a une base rationnelle, ces éléments sont denses dans $\text{int}_{V_i}(\rho_i)$).
3. Pour $i, j \in I$, $i \neq j$, pour $v_i \in V_i$ et $v_j \in V_j$, on a $v_i \wedge v_j = 0$. De plus, si $i, j \in I^1$, alors $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$.
4. $\text{Card}(I) \leq 5g - 5$. Plus précisément, $\text{Card}(I^1) \leq 3g - 3$ et $\text{Card}(I_h) \leq 2g - 2$.

Ce théorème important pour notre sujet part d'une unique hypothèse ($f \in \text{Homeo}_0(S)$) mais présente un certain nombre de conclusions, cela amène à plusieurs commentaires.

Comparaison avec l'ensemble de rotation. — L'exemple de la figure 41 montre qu'il existe des homéos de la surface fermée S de genre 2 avec un ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ ayant un intérieur non vide, mais tels que $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ soit inclus dans l'union de deux plans de $H_1(S, \mathbf{R})$. Ainsi, les ensembles $\text{int}(\text{rot}(f))$ et $\text{int}(\text{rot}_{\text{erg}}(f))$ sont en général différents. Cela suggère que les deux invariants $\text{rot}(f)$ et $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ ont leur intérêt propre; le théorème 18.2 montre en

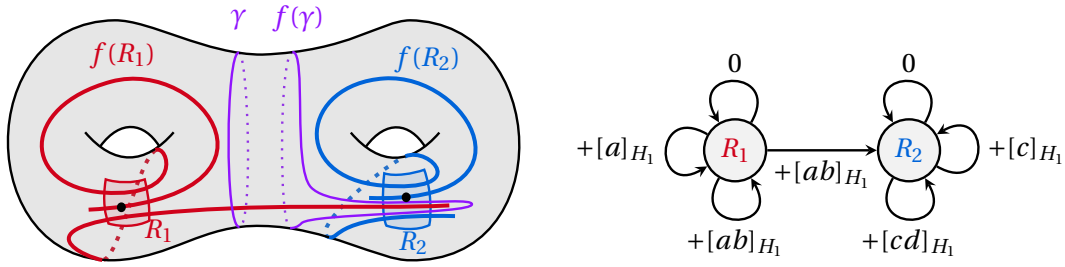


FIGURE 41. Exemple d'homéo de surface de genre 2 ayant un ensemble de rotation homologique avec un intérieur non vide, mais un ensemble de rotation homologique ergodique inclus dans l'union de deux plans. Les points noirs sont des points fixes contractiles, les lignes épaisses représentent les images par f des rectangles R_1 et R_2 ; les intersections de tous les rectangles sont supposées markoviennes (voir la figure 5).

particulier que $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ encode la rotation des points périodiques et les fers à cheval rotationnels de f , alors que ceux-ci ne peuvent être déduits de $\text{rot}(f)$ comme on peut le voir sur la figure 41 (ce dernier ensemble contient tout de même des informations importantes sur la dynamique errante de f). Cet exemple répond par la négative à la question de Boyland [Boy94, section 11.6] relative à la réalisation de points rationnels dans l'intérieur de l'ensemble de rotation par des points périodiques, mais le théorème 18.2 y répond positivement si on remplace rot par rot_{erg} !

Enfin, on verra à la section 19 que l'ensemble de rotation ergodique est le bon invariant pour caractériser dynamiquement l'action d'un homéo sur le graphe fin des courbes.

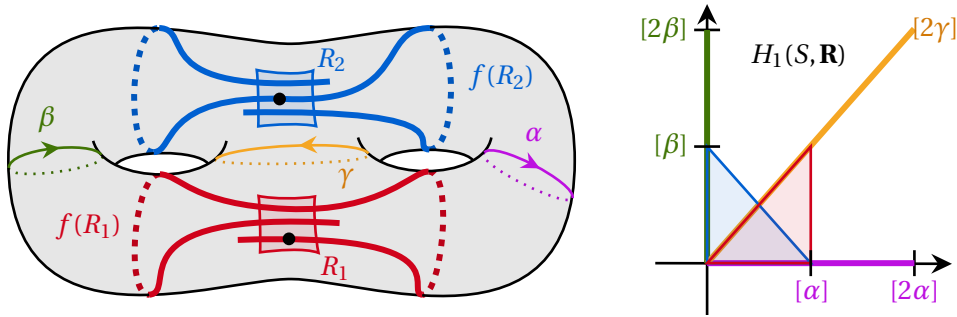


FIGURE 42. La figure de droite représente l'ensemble de rotation ergodique de $f \in \text{Homeo}_0(S)$ représenté à gauche. Les images des deux rectangles R_1 et R_2 sont représentées par des lignes épaisses, toutes les intersections sont markoviennes. L'homéo f possède également des orbites périodiques tournant comme $[2\alpha]$, $[2\beta]$ et $[2\gamma]$, et son support est inclus dans un petit voisinage de $\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup R_1 \cup R_2 \cup f(R_1) \cup f(R_2)$ (notons que $[\alpha] + [\beta] = [\gamma]$). Les deux points noirs sont des points fixes contractiles de f . La construction précise des intersections markoviennes (à l'aide des arguments de Kwapisz [Kwa92], voir le théorème 11.7) est représentée sur la figure 43.

Non convexité des intersections avec les V_i . — Attention, le théorème 18.2 n'affirme pas que pour $i \in I_h$, l'intersection $\overline{\text{rot}_{\text{erg}}(f)} \cap V_i$ est un ensemble convexe. Il est en fait possible qu'il

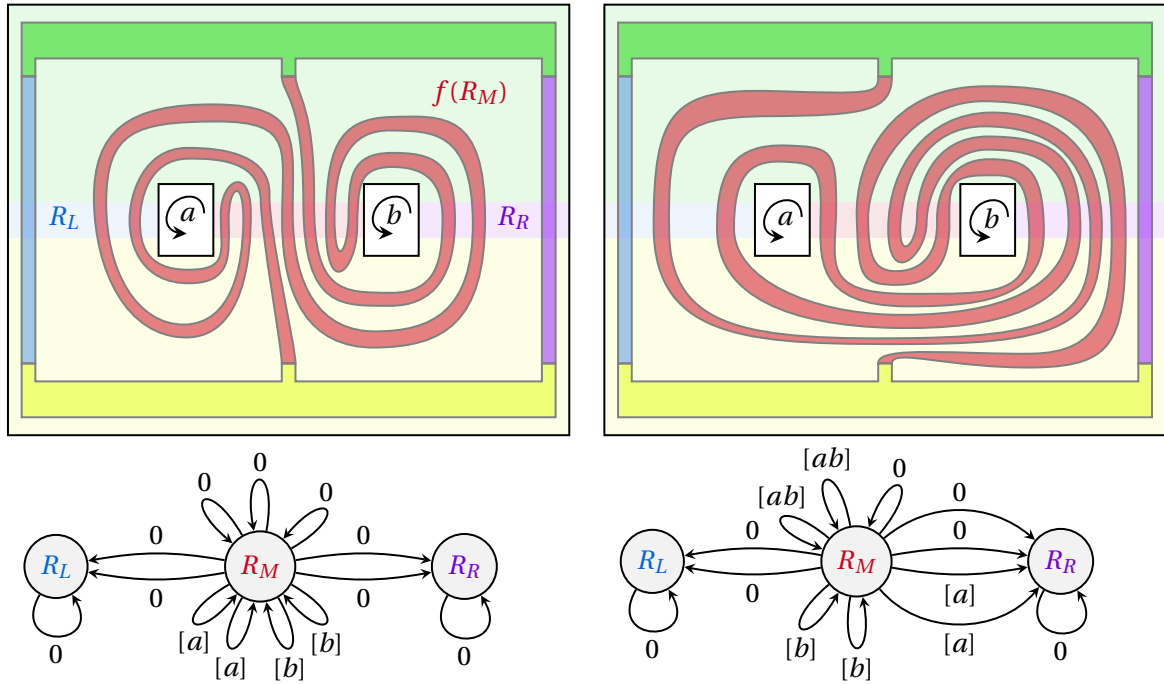


FIGURE 43. L'adaptation des arguments de [Kwa92] pour construire deux homéos d'un pantalon (voir la figure 18 page 60), le premier (à gauche) ayant un ensemble de rotation (ergodique) égal à $\text{conv}(0, [a], [b])$ et le second (à droite) ayant un ensemble de rotation (ergodique) égal à $\text{conv}(0, [ab], [b])$. L'union des ensembles de couleur claire est un pantalon qui est envoyé sur l'union des ensembles de couleur foncée, donc strictement dans lui-même. Ceux-ci peuvent être utilisés pour construire l'exemple de la figure 42. Toutes les intersections entre les rectangles R_L , R_M et R_R et leurs images sont markoviennes. Les diagrammes du bas sont les graphes de transition de la dynamique discrète associée aux différentes intersections markoviennes. En adaptant les arguments de [Kwa92], on peut s'assurer que l'ensemble de rotation des homéos est réduit à celui de la restriction à l'ensemble invariant maximal engendré par les rectangles.

y ait deux classes $i, j \in I_h$ telles qu'on ait $V_i = V_j$, comme sur la figure 42. Dans ce cas, il est tout à fait possible que $\text{rot}_{\text{erg}}(f) \cap V_i$ soit une union finie de convexes.

Non convexité des pièces de I_h . — Notons également qu'il existe des exemples d'homéos du tore avec un ensemble de rotation d'intérieur non vide dont les ensembles de rotation ergodiques $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ ne sont pas convexes (plus précisément, les éléments de $\partial(\text{rot}_{\text{erg}}(f)) \setminus \text{extrem}(\text{rot}_{\text{erg}}(f))$ n'appartiennent pas à $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$), voir l'exercice 7.12. Cette construction peut être facilement adaptée à des surfaces de genre supérieur (par exemple, en éclatant un point fixe en un cercle de points fixes, et en y recollant un autre tore privé d'un disque sur lequel on étend l'homéo en l'identité) pour montrer qu'on ne peut espérer obtenir la convexité complète des ensembles ρ_i pour $i \in I_h$.

Les classes de I^1 . — Attention : le théorème n'affirme pas que pour tout $i \in I^1$, l'ensemble ρ_i est inclus dans une droite vectorielle de $H_1(S, \mathbf{R})$. En fait, il y a des exemples où ce n'est pas le cas et où ρ_i est inclus dans une union finie de telles droites : sur toute surface de genre ≥ 2 il existe des laminations géodésiques minimales et orientables portant au moins

2 mesures transverses ergodiques distinctes [MT02, section 3] (ce fait est équivalent à celui, désormais bien connu des spécialistes, qu'il existe des échanges d'intervalles minimaux non uniquement ergodiques [Vee69]). On peut compléter le flot par longueur d'arc sur une telle lamination en un flot sur la surface comme à la figure 25 et obtenir ainsi l'exemple qui nous intéresse (en utilisant la proposition 17.15 pour vérifier que c'est bien un tel exemple).

Dans le cas où Λ_i est constitué d'une unique géodésique fermée simple, l'ensemble ρ_i est bien inclus dans une droite vectorielle (c'est une conséquence de la proposition 17.15).

Problème 18.3. — Si $i \in I_{\min}$, est-ce que ρ_i est un ensemble fini? Est-ce que, si on écrit $L_1, \dots, L_m$ la famille minimale de droites vectorielles de $H_1(S, \mathbf{R})$ contenant ρ_i , alors pour tout j on a $\text{Card}(\rho_i \cap L_j) = 1$?

La réponse à cette question est peut-être plus facile lorsque l'homéo f préserve l'aire.

Des résultats pour le tore généralisés par le théorème 18.2. — Le théorème 18.2 généralise au genre supérieur de nombreux résultats qui n'étaient connus jusque là que pour le tore :

- Le théorème 8.1.1. de Franks de réalisation des points à coordonnées rationnelles dans l'intérieur de l'ensemble de rotation par des orbites périodiques est vrai en genre supérieur par le dernier item du point 2.
- Le théorème 9.1 de Llibre et Mackay de positivité de l'entropie topologique d'un homéo ayant un ensemble de rotation d'intérieur non vide se retrouve en genre plus grand dans la première phrase du point 2. Une remarque : par les propositions 5.7 et 17.16 (en fait, on peut se contenter d'utiliser un théorème de Lellouch [Lel23]), un homéo tel que $I_h = \emptyset$ a forcément son ensemble de rotation contenu dans un sous-espace totalement isotrope de $H_1(S, \mathbf{R})$, en particulier est inclus dans un sous-espace de dimension g (et donc est d'intérieur vide).
- La réalisation de tout point intérieur de l'ensemble de rotation comme vecteur de rotation d'une mesure ergodique, dû pour le tore à Misuirewicz et Ziemian (théorème 9.4), trouve ici son équivalent dans le troisième item du point 2.
- La convexité de l'ensemble de rotation pour les homéos du tore, due à Misuirewicz et Ziemian (théorème 7.1), se traduit ici en une version faible avec le fait que les pièces $\bar{\rho}_i$, pour $i \in I_h$, sont convexes.

Optimalité des constantes. — La figure 44 représente un exemple montrant que les estimations du théorème 18.2 sur le nombre de classes de I^1 et I_h sont optimales dans le cas $g = 3$. Cet exemple se généralise facilement à toutes les surfaces de genre ≥ 2 , par la décomposition de telles surfaces en pantalons.

Questions ouvertes. — Ce théorème laisse tout de même de la place pour un bon nombre de questions ouvertes, dont les suivantes :

Problème 18.4. —

1. Kwapisz a donné une estimation de l'entropie topologique d'un homéo en fonction de la forme de son ensemble de rotation dans [Kwa93] (théorème 9.2) : est-ce qu'il existe une minoration de l'entropie topologique de l'homéo en fonction de la taille des pièces ρ_i pour $i \in I_h$? La preuve de Jarek repose sur la théorie de Nielsen-Thurston, peut-on faire de même avec le forçage?
2. À ma connaissance, il n'existe qu'une seule restriction connue empêchant un sous-ensemble compact et convexe du plan d'être l'ensemble de rotation d'un homéo du

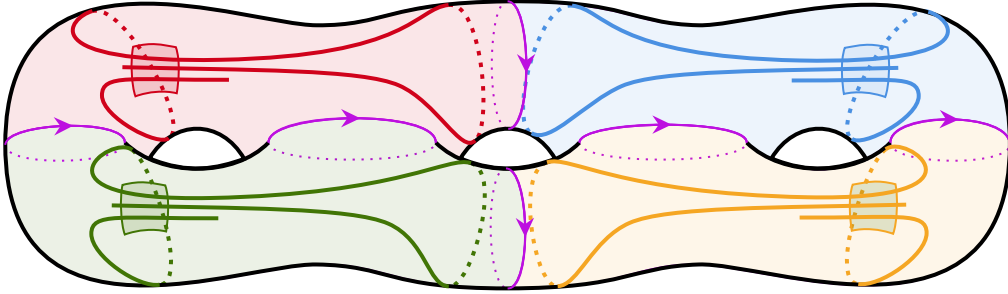


FIGURE 44. Dans cet exemple, l'homéo f est supporté dans des voisinages suffisamment petits des six courbes fermées roses, des rectangles et de leurs images (en traits épais). Les courbes roses sont supposées stables par la dynamique et la restriction de l'homéo à celles-ci est une rotation. On obtient alors dix classes pour $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\theta>0}(f)$, les courbes roses représentant les mesures de I_{fer} , et les autres couleurs les mesures de I_h .

tore, due à Patrice et Fabio (théorème 11.4, [LCT18, theorem C]). Par analogie, on peut penser qu'obtenir des restrictions sur les formes possibles des ensembles $\overline{\rho}_i$ pour $i \in I_h$ est un problème très difficile. Généraliser le théorème 11.4 pour les bords de pièces $\overline{\rho}_i$ serait déjà une jolie première étape (voir le corollaire 20.15 pour la généralisation de ce résultat aux segments).

3. Est-ce qu'il existe une classification similaire pour les surfaces non compactes? Non orientables?
4. La conclusion 3. du théorème 18.2 n'aborde que les classes de I^1 . Que dire des classes de I_h ; plus précisément, est-il vrai que si γ est une géodésique incluse dans $\Lambda_i \cap \Lambda_j$, alors γ est une géodésique fermée et est égale à un Λ_k pour un certain $k \in I_{\text{fer}}$?
5. Que dire des homéos non homotopes à l'identité? Dans le cas d'homéos homotopes à un twist de Dehn il est possible de définir un ensemble de rotation transverse « orthogonal à la direction du twist » (voir la définition 19.11); est-il possible de classifier les ensembles de rotation ergodiques orthogonaux?
6. À quel point est-ce qu'il est possible de généraliser les résultats de réalisation de convexes de Kwapisz au cas du genre supérieur? Quelles sont les unions de polygones qui sont des ensembles de rotation (ergodiques)? Quels sont les couples $(\text{rot}(f), \text{rot}_{\text{erg}}(f))$ qu'on peut obtenir avec les idées de [Kwa92] (théorème 11.7)? Une réponse partielle est esquissée dans les figures 42 et 43.
7. Dans le même ordre d'idées, que donnent les idées de [Kwa95b] (théorème 11.10) en genre plus grand? Peut-on obtenir des pièces $\overline{\rho}_i$ qui sont des « polygones à une infinité de côtés » pour des $i \in I_h$ tels que S_i (surface définie bientôt) ne soit pas un tore privé d'un nombre fini de disques? Quid de la généralisation de [BdCH16]?

18.2. Éléments de preuve

Expliquons comment déduire le théorème 18.2 des résultats de la section précédente, en particulier du théorème 17.18.

Classes de I^1 . — La preuve pour ces classes est très simple. Choisissons $i \in I^1$. D'après le théorème 17.18, toutes les géodésiques de Λ_i sont simples. En effet, si elles ne l'étaient pas, alors le théorème 17.18 produirait une orbite périodique dont la géodésique traçante intersecterait une géodésique traçante pour μ . La mesure uniforme sur cette orbite périodique appartiendrait à $\mathcal{N}_i$, et donc Λ_i serait réduit à une seule géodésique fermée. Par hypothèse, cette géodésique n'est pas simple. Mais d'après le théorème 16.26 (ou bien le théorème 17.18), cette géodésique croise la géodésique traçante d'un autre point f -périodique, contradiction. Le même raisonnement prouve également que $I^1 \cap I_h = \emptyset$.

D'après le théorème 17.10, l'ensemble Λ_i est une lamination géodésique minimale et

$$\overline{\gamma_x(\mathbf{R})} = \Lambda_i$$

pour tout $\mu \in \mathcal{N}_i$ et μ -presque tout $x \in S$.

Convexité des classes de I_h . — Supposons que $I_h \neq \emptyset$ et choisissons $i \in I_h$. Le théorème 17.18 implique directement la positivité de l'entropie topologique de f (puisque dans ce cas il existe deux mesures dynamiquement transverses).

Considérons maintenant deux mesures ergodiques $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{N}_i$. On montre à l'aide du théorème 17.18 que tout le triangle de $H_1(S, \mathbf{R})$ de sommets $0, \rho_f(\mu_1), \rho_f(\mu_2)$ est accumulé par des vecteurs de rotation de points périodiques appartenant à $\mathcal{N}_i$ (autrement dit, de mesures uniformes portées par les orbites de ces points périodiques). En effet, choisissons $r \in H_1(S, \mathbf{R})$ dans l'intérieur de ce triangle. Par définition, il existe une chaîne de mesures $\mu_1 = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m = \mu_2$ appartenant à $\mathcal{N}_i$ et telles que pour tout j , les mesures τ_j et τ_{j+1} soient dynamiquement transverses. On construit alors par récurrence, en appliquant le théorème 17.18, une autre chaîne de mesures $\mu_1 = \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_m$ telles que :

- pour tout j , la mesure τ'_j est portée par une orbite périodique et appartient à $\mathcal{N}_i$;
- pour tout j , il existe une géodésique traçante de τ'_j proche d'une géodésique traçante de τ_j ;
- pour tout $j < m$, le vecteur de rotation $\rho_f(\tau'_j)$ est proche de $\rho_f(\mu_1)$ et $\rho_f(\tau'_m)$ est proche de r .

Cela assure en particulier que pour tout j , les mesures τ'_j et τ'_{j+1} sont dynamiquement transverses et que donc $\tau'_m \in \mathcal{N}_i$. Puisqu'on a choisi $\rho_f(\tau'_m)$ proche de r , on en déduit que $\overline{\rho_i}$ est convexe, et que tout point de ρ_i est accumulé par des vecteurs de rotation d'orbites périodiques de $\mathcal{N}_i$. Au passage, ça implique aussi que V_i possède une base rationnelle.

Tout point de $\text{int}_{V_i}(\rho_i)$ est vecteur de rotation d'une mesure de $\mathcal{N}_i$. — La preuve de [GSGL24] utilise la théorie de Nielsen-Thurston : c'est maintenant devenu un résultat de folklore⁽¹⁾ que si on enlève à S une union finie F d'orbites périodiques dans $\mathcal{N}_i$ et dont les vecteurs de rotation engendrent V_i , le représentant de Nielsen-Thurston de la classe d'homotopie de l'homéo f dans $S \setminus F$ possède une composante pseudo-Anosov donc une sous-surface de S contenant l'ensemble fini F . On combine alors les résultats de [MZ91] (qui se basent sur [LM91]) et [Pol92, Theorem 2], en remplaçant le résultat de semi-conjugaison de Handel

⁽¹⁾Dans [Boy94, Theorem 11.9], Philip attribue cette remarque à une conversation avec John Franks.

[Han85] pour les homéos pseudo-Anosov par celui de Boyland [Boy99] pour les *composantes* pseudo-Anosov.

Si $r \in \Delta^n$ le simplexe de dimension n , alors il existe μ ergodique pour le shift $\sigma : [1, n]^{\mathbb{Z}} \rightarrow [1, n]^{\mathbb{Z}}$ tel que pour tout $j \in [1, n]$, on ait

$$\int_{[1, n]^{\mathbb{Z}}} \mathbb{1}_{\omega_0=j} d\mu = r_j.$$

Plus de détails : suite sturmienne

Une autre méthode, plus récente (mais moralement très similaire : on exhibe un codage de Markov de la dynamique sur un sous-ensemble) et basée sur la théorie du forçage pour les homéos de surface [LCT18, LCT22], consiste à construire un graphe fortement connexe de fers à cheval rotationnels, c'est-à-dire une collection de fers à cheval rotationnels $(R_j)_{j \in J}$ (voir la définition 16.23), associés à des automorphismes de revêtement T_j , tels qu'il existe des points périodiques tournant dans la direction T_j et appartenant à $\mathcal{N}_i$, et tels que pour tout $j \neq j' \in J$, il existe un entier $k_{j,j'}$ et un automorphisme de revêtement $T_{j,j'}$ tels que l'intersection $\tilde{f}^{k_{j,j'}}(R_j) \cap T_{j,j'}R_{j'}$ soit markovienne. C'est une conséquence des résultats de [Gui25a] qu'on évoquera à la sous-section 20.3.2, où on étudie plus en détail les graphes de fers à cheval et leurs composantes connexes.

Bornes sur le nombre de classes de I^1 et les ensembles de rotation associés. — Expliquons maintenant comment obtenir la borne $\text{Card}(I^1) \leq 3g - 3$ du point 4. du théorème 18.2. C'est une propriété assez simple. Les laminations géodésiques $(\Lambda_i)_{i \in I^1}$ sont minimales et disjointes, elles sont donc à distance positive les unes des autres. On peut alors refermer des géodésiques des laminations Λ_i pour obtenir des géodésiques fermées simples $(\gamma_i)_{i \in I^1}$ deux-à-deux disjointes; il est bien connu que pour une surface de genre g le nombre maximal de telles géodésiques est $3g - 3$, ce qui borne donc le cardinal de I^1 .

La borne sur le nombre de droites vectorielles dans lequel $\rho_{I^1} = \bigcup_{i \in I^1} \rho_i$ est inclus requiert pour sa part l'utilisation d'un résultat difficile. L'union des laminations géodésiques minimales $\{\Lambda_i\}_{i \in I^1}$ est elle-même une lamination (éventuellement non minimale) Λ^1 . D'après la proposition 17.15, il suffit de borner le nombre de vecteurs de rotation homologues associés aux géodésiques de cette lamination. D'après le théorème ergodique de Birkhoff, cela se ramène à borner le nombre de mesures transverses ergodiques pour cette lamination. D'après [Kat73] (voir aussi [McM13]), ce nombre est majoré par $3g - 3$.

18.3. Des surfaces associées aux classes

Définition des surfaces S_i . — Pour tout $i \in I$, on définit une sous-surface S_i de S contenant Λ_i , qui est

- égale à une géodésique fermée simple Λ_i si $i \in I_{\text{fer}}$;
- dans le cas contraire, une surface ouverte et d'intérieur non vide dont la frontière est faite d'une union finie de géodésiques fermées simples, et minimale pour l'inclusion avec cette propriété. Voir la figure 45 pour un exemple de telles surfaces.

L'existence et la caractérisation de ces surfaces S_i se fait différemment selon que Λ_i est une lamination géodésique minimale ($i \in I_{\text{min}}$) ou bien contient deux géodésiques s'intersectant ($i \in I_h$). Dans le premier cas, on utilise la théorie classique des laminations géodésiques minimales sur les surfaces : suivant la terminologie définie page 70, S_i est l'union des polygones idéaux du complémentaire de la lamination Λ_i avec les couronnes associées aux composantes de bord de Λ_i . Lorsque Λ_i n'est pas une lamination, on relève Λ_i à $\tilde{S}$, on prend

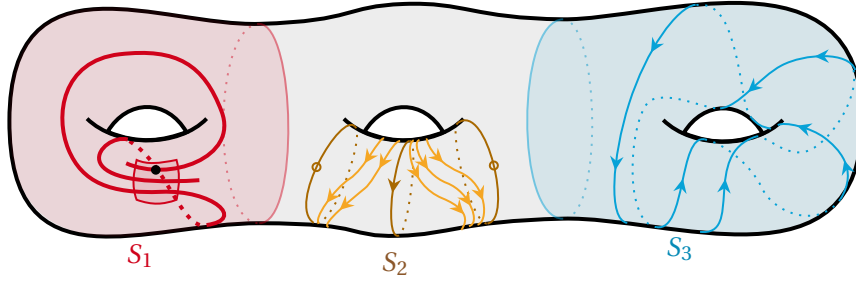


FIGURE 45. Un exemple d'homéo de la surface de genre 3, possédant 3 classes $\mathcal{N}_i$ de mesures, et leurs surfaces associées S_i : une classe $1 \in I_h$ dite « de fer à cheval », telle que la surface S_1 associée est un tore privé d'un disque, une classe $2 \in I^1$, dont la surface associée est une unique géodésique fermée simple, et une classe $3 \in I^1$, dont l'ensemble traçant associé Λ_3 est une lamination géodésique minimale sans géodésique fermée, et telle que la surface S_3 associée est un tore privé d'un disque.

une de ses composantes connexes, puis l'enveloppe connexe de cette composante connexe, et on projette celle-ci sur S . Il faut alors travailler un petit peu pour montrer que la surface obtenue a bien les propriétés requises.

La propriété fondamentale de ces surfaces S_i est que, en plus de contenir les ensembles Λ_i , elles sont deux-à-deux disjointes.

On peut voir cette décomposition de S en surfaces S_i (et le complémentaire de leur union) comme une version rotationnelle de la classification de Nielsen-Thurston pour les homéos homotopes à l'identité. Cette heuristique sera un peu plus justifiée quand on démontrera des résultats de déviations bornées à la section 20.2.

Borne sur le nombre de classes de I_h . — Maintenant qu'on sait que les surfaces S_i sont deux à deux disjointes, un calcul de caractéristique d'Euler donne directement la borne sur le nombre de classes de I_h . Si on veut être plus précis, on peut associer à chaque classe $\mathcal{N}_i$ une caractéristique d'Euler, ce qui peut donner, suivant les cas, une meilleure borne sur le nombre de classes de I .

Quelles restrictions sur les S_i ? — On verra plus tard que lorsque $i \in I^1$, l'ensemble Λ_i est une lamination *orientable*. Or il est connu que la sphère privée d'un nombre fini de points ne possède pas de lamination géodésique remplissante orientable (c'est le théorème de Poincaré-Bendixson), tandis que toute surface orientable de genre ≥ 1 privée d'un nombre fini (éventuellement nul) de points en possède une. Plus précisément, sur de telles surfaces, on peut construire un homéo qui est le temps 1 d'un flot, qui préserve l'aire, et qui a un unique ensemble Λ_i associé, qui est une lamination géodésique orientable remplissante.

D'autre part, sur toute surface du type S_i (sous-surface ouverte de S à bord formé de géodésiques fermées simples deux-à-deux disjointes), on peut construire un fer à cheval rotationnel dont les automorphismes de revêtement associés engendrent le π_1 de cette sous-surface. On en déduit la propriété suivante :

Proposition 18.5. — *Soit S' une sous-surface ouverte de S à bord formé de géodésiques fermées simples deux-à-deux disjointes. Alors :*

- *Il existe $f \in \text{Homeo}_0(S)$ tel que $I_h(f) = \{i_0\}$, avec $S_{i_0} = S'$ et $f|_{S \setminus S'} = \text{Id}_{S \setminus S'}$.*

- Il existe $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $i_0 \in I_{\min}(f)$ tel que $S_{i_0} = S'$ si et seulement si S' est de genre ≥ 1 . Dans ce cas, il existe $f \in \text{Homeo}_0(S)$ qui est le temps 1 d'un flot préservant l'aire tel que $I_h(f) = \emptyset$, $I^1(f) = \{i_0\}$, $S_{i_0} = S'$ et que $f|_{S \setminus S'} = \text{Id}_{S \setminus S'}$.

Attention : dans le premier cas, je n'affirme pas que $I^1(f) = \emptyset$. Il me semble qu'on ne peut l'assurer que si le genre de S' est ≥ 1 ; dans le cas contraire je pense qu'on peut montrer que $I^1(f)$ contient nécessairement au moins une géodésique fermée simple (exercice!).

Problème 18.6. — Dans le cas où S' est une sphère privée de k disques, quel est, en fonction de k , le nombre minimal de classes de I^1 ?

18.4. Une astuce utile de revêtement

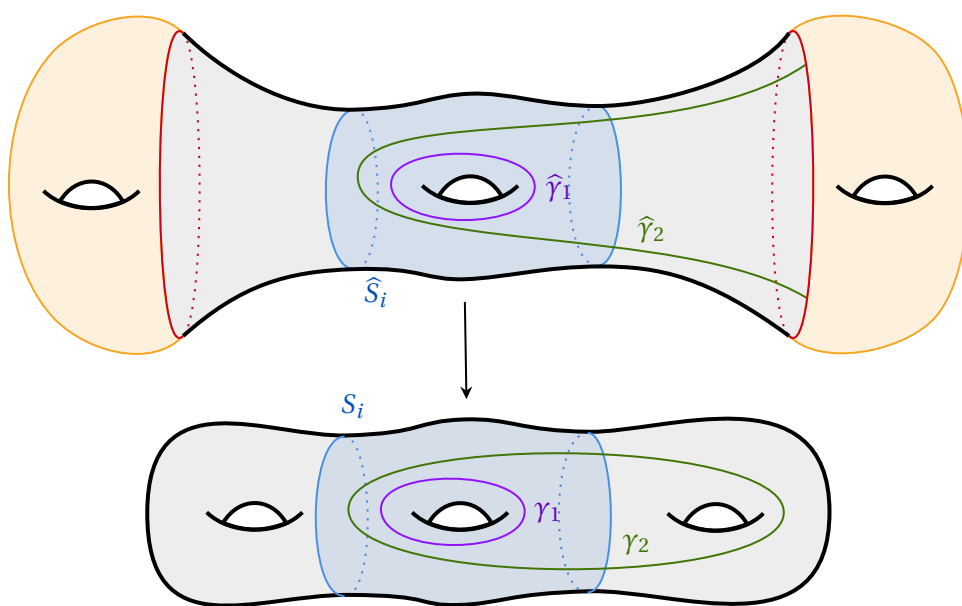


FIGURE 46. L'astuce du revêtement $\hat{S}$ associé à la surface S_i . En rouge : le bord à l'infini de ce revêtement $\hat{S}$. On peut ajouter les surfaces en orange (des tores privés d'un disque) pour obtenir une surface compacte sans bord $\hat{S}_{\text{aug}}$. Sur le dessin, le lacet γ_1 se relève en un lacet de $\hat{S}$, contrairement au lacet γ_2 qui ne se relève qu'en des courbes propres. L'homéo f se relève en un homéo $\hat{f}$ de $\hat{S}$, et se prolonge en un homéo $\hat{f}_{\text{aug}}$ de $\hat{S}_{\text{aug}}$.

Voilà une astuce assez utile basée sur les revêtements. À chaque surface S_i on peut associer un revêtement $\hat{S}$ de S qui ne détecte que la rotation dans les directions de S_i (voir la figure 46). Plus précisément, on se débrouille pour que :

- toute courbe fermée essentielle homotope à une courbe incluse dans S_i se relève en une unique courbe fermée de $\hat{S}$;
- mais que toute courbe fermée essentielle non homotope à une courbe incluse dans S_i ne se relève qu'en des courbes non fermées de $\hat{S}$.

En pratique, on choisit une famille (finie) de courbes fermées $(\alpha_j)_j$ engendrant $\pi_1(S_i, x_0)$, on choisit un relevé $\tilde{x}_0$ de x_0 à $\tilde{S}$ et on relève ces courbes en les courbes propres $(\tilde{\alpha}_j)_j$ de $\tilde{S}$.

basées en $\tilde{x}_0$. On quotientte alors $\tilde{S}$ par le sous-groupe des automorphismes de revêtement engendré par ceux dont les axes sont un des $\tilde{\alpha}_j$. Cela donne un revêtement non galoisien $\hat{S}$ de S satisfaisant les propriétés décrites plus haut (attention : contrairement à ce que laisse penser la notation, ce revêtement dépend bien sûr de la surface S_i).

On peut compactifier la surface $\hat{S}$ ainsi obtenue en ajoutant le quotient du bord à l'infini de $\tilde{S}$. On obtient alors une surface compacte (qu'on note toujours $\hat{S}$) ayant autant de composantes de bord que S_i . Puisque le relevé $\tilde{f}$ de l'homéo f à $\tilde{S}$ se prolonge en l'identité au bord, le projeté de $\tilde{f}$ de $\tilde{S}$ sur $\hat{S}$ se prolonge en un homéo de cette compactification qui vaut l'identité au bord $\partial\hat{S}$. Notons que tout ce qu'on a dit marche aussi bien dans le cas où S_i est une courbe fermée simple, la surface $\hat{S}$ est alors un anneau.

Si on veut appliquer la théorie de la rotation sur les surfaces fermées à l'homéo $\hat{f}$ de la surface à bord $\hat{S}$, on peut écraser chaque composante de bord en un point pour obtenir une surface notée $\hat{S}_{\text{fer}}$ de même genre que S_i et sans bord. Dans ce cas, le plus petit sous-espace vectoriel de $H_1(S_{\text{fer}}, \mathbf{R})$ engendré par des éléments de $H_1(S_{\text{fer}}, \mathbf{Q})$ et contenant $\text{rot}_{\text{erg}}(f_{\text{fer}})$ est $H_1(S_{\text{fer}}, \mathbf{R})$ lui-même. Malheureusement, cette opération fait qu'on risque de perdre de l'information rotationnelle : par exemple si S_i n'a pas de genre, alors $\hat{S}_{\text{fer}}$ est une sphère et $H_1(S_{\text{fer}}, \mathbf{R}) = \{0\}$.

Si on ne veut pas perdre d'information sur la rotation, on peut adjoindre à $\hat{S}$ autant de tores à un trou que de composantes de bord de $\hat{S}$ (en orange sur la figure 46) pour obtenir une surface notée $\hat{S}_{\text{aug}}$. On peut prolonger $\hat{f}$ en un homéo de $\hat{S}_{\text{aug}}$ par l'identité là où $\hat{f}$ n'est pas défini. On obtient alors un homéo $\hat{f}_{\text{aug}}$ de $\hat{S}_{\text{aug}}$ tel que $I(f)$ est composé d'un élément correspondant à i plus éventuellement des éléments j tels que Λ_j est une géodésique de bord de $\hat{S}_i$. Ces géodésiques de bord séparant la surface $\hat{S}_{\text{aug}}$, les ensembles de rotation associés ρ_j sont triviaux. Par conséquent, notant ι_* l'inclusion naturelle de $H_1(S_i, \mathbf{R})$ dans $H_1(\hat{S}_{\text{aug}}, \mathbf{R})$, on a $\text{rot}_{\text{erg}}(\hat{f}_{\text{aug}}) = \iota_*(\rho_i)$.

En appliquant la proposition 5.7 à l'homéo $\hat{f}_{\text{aug}}$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 18.7. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $i \in I$. Alors $\text{extr}(\overline{\rho_i}) \subset \text{rot}_{\text{erg}}(f)$.

Démonstration. — On applique la proposition 5.7 à l'homéo $\hat{f}_{\text{aug}}$: tout $r \in \text{extr}(\overline{\rho_i})$ est le vecteur de rotation d'une mesure ergodique $\hat{\mu}$ pour $\hat{f}_{\text{aug}}$. Si $r = 0$, il n'y a rien à faire car f possède un point fixe par Lefschetz. Sinon, l'ergodicité de $\hat{\mu}$ combinée à $r \neq 0$ implique que $\hat{\mu}(\hat{S}) = 1$. Ainsi, en notant $\pi : \hat{S} \rightarrow S$ la projection canonique, la mesure image $\mu = \pi_* \hat{\mu}$ est bien définie et f -invariante. On vérifie alors que $\rho_f(\mu) = r$ et que cette mesure est f -ergodique. De plus, $\dot{\Lambda}_\mu \subset S_i$ (défini au théorème 17.7) : soit $\mu \in \rho_i$, soit $\dot{\Lambda}_\mu$ est une géodésique de bord de S_i . □

Notons que les techniques de [Gui25b] s'appliquent à cet homéo $\hat{f}_{\text{aug}}$ (soit en vérifiant que les preuves marchent pareil dans ce cas, soit en prolongeant l'homéo $\hat{f}$ non pas en l'identité sur les tores ajoutés, mais en un homéo ayant un fer à cheval rotationnel avec deux directions de rotation dans chacun de ces tores). En particulier, une conséquence de [Gui25b, corollary I] est le résultat suivant, qui met en jeu la notion de point exposé : étant donné un convexe compact $C \subset \mathbf{R}^n$, un point $x \in C$ est dit *exposé* s'il existe un hyperplan affine $H \subset \mathbf{R}^n$ tel que $C \cap H = \{x\}$; on note $\text{exp}(C)$ l'ensemble des points exposés de C . Un théorème de Straszewicz [Str35] affirme que $\overline{\text{exp}(C)} = \text{extr}(C)$.

Théorème 18.8. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $i \in I_h$. Alors, pour tout $r \in \text{exp}(\overline{\rho_i})$, il existe un ensemble compact f -invariant $K_r \subset S$ tel que, pour tout $x \in K_r$, on a $\rho_f(x) = r$. De plus, on

Modifier
[Gui25b] en
fonction?

peut supposer que les déviations y sont bornés : il existe $L_0 > 0$ (indépendant de r) tel que pour tout $x \in K_r$ et tout $n \in \mathbf{N}$ (Δ_f^n est défini en (5)),

$$d(\Delta_f^n(x), nr) \leq L_0.$$

Démonstration. — Comme à la preuve précédente, on peut supposer $r \neq 0$. On applique [Gui25b, corollary I] à $\hat{f}_{\text{aug}}$ et on vérifie que le compact $\hat{K}$ obtenu est inclus dans l'intérieur de $\hat{S}$ (puisque $\hat{f}|_{\partial\hat{S}} = \hat{\text{Id}}_{\partial\hat{S}}$). Il se projette donc en un compact f -invariant de S . De plus, le fait que sa distance à $\partial\hat{S}$ soit strictement positive implique que la propriété de déviation bornée valable dans $\hat{S}_{\text{aug}}$ devient bien la bonne propriété de déviation bornée lorsqu'on la projette sur S . $\square$

18.5. Des problèmes de réalisation

On a vu au théorème 8.1 des résultats de réalisation des points rationnels de $\text{rot}(\tilde{f})$ par des orbites périodiques dans le cas du tore, tous dus à Franks.

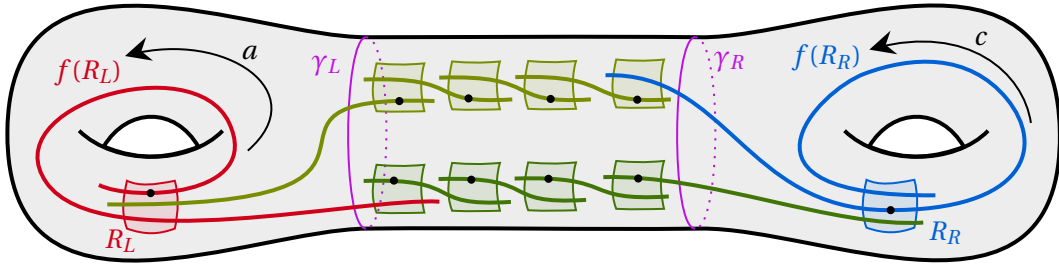


FIGURE 47. Les images des deux rectangles R_L et R_R sont représentées par des lignes épaisses et toutes les intersections entre les rectangles sont supposées markoviennes. Les points noirs sont des points fixes contractiles de f . On peut construire l'homéo f de telle sorte que les intersections $f^n(\gamma_L) \cap \gamma_R$ soient vides pour tout $|n| \leq n_0$ (dans cet exemple, $n_0 = 5$). Ainsi, tout point périodique réalisant un vecteur non nul de l'homologie et colinéaire à $[ac]_{H_1}$ doit avoir une période supérieure à $2n_0$. Cependant, en étudiant la dynamique discrète associée aux intersections markoviennes, on peut voir que pour tout nombre rationnel $p/q \in [0, 1)$, le vecteur d'homologie $p/q[ac]_{H_1}$ est réalisé par une orbite périodique. En particulier, $1/2[ac]_{H_1}$ est réalisé par une orbite périodique, mais par aucune orbite périodique de période 2 : la propriété d'« exactitude » de Franks pour les périodes dans le cas du tore [Fra89] ne se vérifie pas en genre supérieur.

On a déjà noté que le théorème 18.2 donne une version en genre plus grand du point 1. du théorème 8.1 de réalisation de Franks. Rappelons que celui-ci précise que la période du point périodique associé au vecteur de rotation rationnel p/q , avec $p \in H_1(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ et $q \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux, est égale au dénominateur q (ce qu'on peut appeler « propriété d'exactitude de la période »). En genre plus grand, un tel résultat est faux, comme le montre l'exemple de la figure 47.

Problème 18.9. — La preuve du théorème 18.2 donne tout de même un résultat plus faible : pour $i \in I_h$, pour tout ensemble fini $F \subset \text{int}_{V_i}(\rho_i)$, notant $R = \text{conv}(\{0\}, F)$, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $p/q \in R \cap H_1(S, \mathbf{Q})$, avec $p \in H_1(S, \mathbf{Z})$ et $q \in \mathbf{N}^*$, il existe un point f -périodique dont la période divise Mq et dont le vecteur de rotation est p/q . Un résultat plus fort est-il vrai ? Il est possible que la constante M ne dépende en fait que de la classe $i \in I_h$ et non de l'ensemble fini F .

Pour ce qui est du point 2, il serait intéressant d'essayer d'obtenir une version en genre plus grand.

Problème 18.10. — Pour $i \in I$, si p/q , avec $p \in H_1(S, \mathbf{Z})$ et $q \in \mathbf{N}^*$, est un point extrémal de $\overline{\rho_i}$, est-ce qu'il existe un point périodique de vecteur de rotation p/q ⁽²⁾ ?

Notons que par l'astuce décrite au paragraphe 18.4, cette question se réduit à l'énoncé suivant : Si p/q , avec $p \in H_1(S, \mathbf{Z})$ et $q \in \mathbf{N}^*$, est un point extrémal de $\text{conv}(\text{rot}(f))$, est-ce qu'il existe un point périodique de vecteur de rotation p/q ?

Finalement, concernant le point 3., on peut voir notre travail récent [GLCP25] comme une version en genre plus grand de [Fra95].

En effet, en remplaçant [GLCP25, lemma 5.1] par [GT25a, proposition 3.1] dans la preuve du théorème principal de [GLCP25], on obtient le théorème suivant (qui utilise des notations du théorème 18.2) :

Théorème 18.11 ([GLCP25]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$ préservant l'aire. Alors pour tout $i \in I_{\text{fer}}$ et tout $r \in \rho_i \cap H_1(S, \mathbf{Q})$, il existe un point f -périodique de vecteur de rotation r .

Une remarque importante est que sous l'hypothèse du théorème, l'ensemble ρ_i est un segment de pente rationnelle (dirigée par la classe d'homologie de la géodésique fermée associée) passant par 0, donc les éléments rationnels sont denses dans ρ_i (ainsi le théorème n'est pas vide). En particulier, on en déduit que :

Corollaire 18.12. — Si f préserve l'aire et si $I_{\min} \cup I_h \neq \emptyset$, alors f possède un nombre infini d'orbites périodiques.

Le théorème original de [GLCP25] donne une conclusion similaire sous une hypothèse un peu différente, motivée par des questions venant de la dynamique symplectique :

Théorème 18.13 ([GLCP25]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$ préservant l'aire λ , tel que $\rho_f(\lambda) \in \mathbf{R}H_1(S, \mathbf{Q})$ (autrement dit, le vecteur de rotation de l'aire, défini rappelons-le à la définition 5.1, est dans une direction rationnelle). Alors pour tout $v \in \mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, pour tout $r \in [0, \rho_f(v)]$, il existe un point f -périodique de vecteur de rotation r .

Une version un peu plus précise de ce théorème implique que sous la même hypothèse $\rho_f(\lambda) \in \mathbf{R}H_1(S, \mathbf{Q})$, l'homéo f possède un nombre infini de points périodiques. Le même résultat a été démontré indépendamment par Rohil Prasad [Pra25] avec des techniques symplectiques (l'homologie de Floer périodique). La preuve des théorèmes de [GLCP25] met en jeu elle (encore une fois) la théorie de forçage des homéos de surfaces [LCT18, LCT22].

⁽²⁾Attention, on peut construire des exemples où ces points périodiques n'appartiennent pas à $\mathcal{N}_i$, comme celui présenté à la figure 44.

Les deux théorèmes 18.11 et 18.13 concernent deux types de résultats différents : homotopiques pour le premier, homologique pour le second. L'expérience montre que lorsque c'est possible, il est la plupart du temps plus pratique de travailler en homologie, qui offre souvent des raccourcis de calcul par rapport aux raisonnements homotopiques. En revanche, certains résultats plus fins (comme par exemple le théorème 18.2) requièrent l'utilisation de l'homotopie.

On peut d'ailleurs se demander s'il n'est pas possible d'obtenir des informations supplémentaires sur le comportement homotopique des points périodiques dans une classe de mesures donnée :

Problème 18.14. — *Peut-on obtenir des propriétés supplémentaires de l'ensemble Λ_i lorsque $i \in I_h$? Que peut-on dire de l'ensemble des automorphismes de revêtements associés aux points périodiques de $\mathcal{N}_i$? Y a-t-il des propriétés semblables à [AZdPJ21, Theorem 1] pour chaque classe $\mathcal{N}_i$?*

Concernant la réalisation de points périodiques, citons [Par06] où est établie la réalisation de tout vecteur de rotation d'un point périodique par un autre point périodique ayant une tresse simple.

CHAPITRE 19

INTERMÈDE LUDIQUE : LE GRAPHE DES COURBES FIN ET LA CLASSIFICATION DE SES ISOMÉTRIES

Le graphe des courbes fin est un outil introduit récemment dans [BHW22] par Bowden, Hensel et Webb dans le but d’avoir une version du graphe des courbes classiques adapté à l’étude de $\text{Homeo}_0(S)$ (le graphe des courbes classique s’intéresse aux classes d’isotopies d’homéos de surfaces). C’est un objet à première vue absurde (la non dénombrabilité locale qu’on aura remarqué dans quelques lignes devrait rebuter n’importe quelle personne saine d’esprit) mais au final très excitant et prometteur, visiblement très puissant pour l’étude de l’énorme groupe $\text{Homeo}(S)$, source de questions passionnantes en théorie de la rotation, mais aussi un pont entre les communautés de la théorie géométrique des groupes et plus précisément des homéotopies (*mapping class group*) et celle de la dynamique topologique sur les surfaces et plus précisément de la théorie de la rotation.

Ce chapitre peut être lu de manière relativement indépendante du reste du texte. Voir aussi les notes de cours [GLR24].

19.1. Qui est le graphe des courbes fin ?

Voici la définition du graphe des courbes fin $\mathcal{C}^+(S)$ associé à une surface fermée S de genre $g \geq 2$ (voir la figure 48).

- Ses sommets sont les courbes fermées simples non contractiles⁽¹⁾ sur la surface S .
- On place une arête entre deux sommets (qui sont des courbes) si les courbes sont disjointes⁽²⁾.

Ce graphe a la fâcheuse propriété d’être non localement dénombrable : tout sommet possède un nombre indénombrable de voisins. En revanche, il possède deux atouts majeurs. D’une part le groupe des homéos de f agit dessus par isométries (si deux courbes sont disjointes, leur images par un homéo le sont aussi)⁽³⁾. D’autre part il est Gromov-hyperbolique :

⁽¹⁾Certaines lectrices connaîtront déjà le *graphe des courbes*, bien plus connu et compris, qui a la même définition que le graphe des courbes fin à ceci près qu’on ajoute partout les mots « à homotopie libre près ».

⁽²⁾On peut donner une définition similaire dans le cas où S est le tore ; dans ce cas il faut adapter un peu le critère pour avoir une arête en autorisant les deux courbes à avoir au plus un point d’intersection.

⁽³⁾Et même mieux : toute isométrie du graphe des courbes fin vient en fait de l’action d’un homéo de la surface [LMP⁺25, LRW24, BMS25].

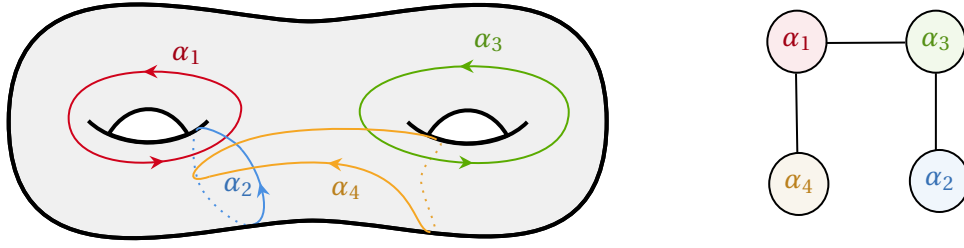


FIGURE 48. 4 courbes fermées simples sur une surface S de genre 2, et le sous-graphe de $\mathcal{C}^\dagger(S)$ associé (à droite). Par exemple : α_1 et α_3 sont des sommets de $\mathcal{C}^\dagger(S)$; ces lacets sont disjoints, donc il y a une arête entre eux dans $\mathcal{C}^\dagger(S)$.

Définition 19.1. — On dit qu'un graphe G est *Gromov-hyperbolique* s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tous segments géodésiques⁽⁴⁾ $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, a]$ (autrement dit, pour tout triangle géodésique), on a $[c, a] \subset V_\delta([a, b]) \cup V_\delta([b, c])$, où $V_\delta(E)$ désigne l'ensemble des points à distance $< \delta$ de l'ensemble A .

Cette définition présente juste une des caractérisations de l'hyperbolicité au sens de Gromov, pour d'autres voir par exemple les livres [GdlH90, DSU17].

L'expérience montre qu'avoir un ensemble Gromov-hyperbolique sur lequel le groupe qui nous intéresse agit fidèlement par isométries permet de comprendre certaines propriétés du groupe lui-même.

On s'était donc arrêtés au fait que le graphe des courbes fin $\mathcal{C}^\dagger(S)$ est Gromov-hyperbolique.

Théorème 19.2 ([BHW22]). — Pour toute surface fermée S de genre $g \geq 1$, le graphe des courbes fin $\mathcal{C}^\dagger(S)$ est Gromov-hyperbolique.

Les auteurs de [BHW22] en déduisent des propriétés remarquables de $\text{Homeo}_0(S)$, en particulier ils répondent à une question de Burago, Ivanov et Polterovich⁽⁵⁾ :

Théorème 19.3 ([BHW22, Corollary 1.3]). — Si S est une surface fermée de genre ≥ 1 , alors le groupe $\text{Homeo}_0(S)$ n'est pas uniformément parfait, et la norme de fragmentation y est non bornée.

Précisons qu'un groupe est dit *uniformément parfait* si tout élément peut s'écrire comme le produit d'un nombre borné de commutateurs, et que la norme de fragmentation y est bornée si tout élément peut s'écrire comme le produit d'un nombre borné d'homéos supportés dans des disques topologiques.

Le graphe des courbes fin est un outil très prometteur et il faut comprendre un peu mieux l'action des homéos sur celui-ci avant de pouvoir l'exploiter plus avant. Les isométries des ensembles Gromov-hyperboliques ont été classifiées par Gromov (dans [Gro87]) et sont de

Dire 2
mots de
la preuve :
graphe fin,
épointer

⁽⁴⁾On note ici $[a, b]$ un segment géodésique allant de a à b , mais cette notation cache le fait qu'il peut très bien y avoir plusieurs tels segments.

⁽⁵⁾Leur théorème est énoncé pour le groupe des difféomorphismes mais la même preuve fonctionne pour le groupe des homéos.

trois types : elliptiques, paraboliques et loxodromiques (ou hyperboliques suivant les auteurs). Une isométrie est dite *elliptique* si elle possède une orbite bornée (et dans ce cas, elles le sont toutes). Une isométrie f est dite *loxodromique* si sa longueur de translation

$$\ell(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(f^n(o), o)}{n},$$

définie à partir d'un point base o , est strictement positive (on vérifie facilement que cette longueur de translation ne dépend pas du point base choisi, et l'utilisation de suites sous-additives permet de montrer que la limite existe toujours). Une isométrie est dite *parabolique* si elle n'est ni elliptique ni loxodromique. La réaction la plus saine face à une telle classification est de dire qu'elle est complètement idiote puisque la dernière catégorie est définie en y jetant tout ce qui ne tombe pas dans les deux premières.

Cette classification est en fait tout à fait légitime quand on regarde les actions des isométries sur le bord ∂X de l'ensemble Gromov-hyperbolique X . Celui-ci est défini comme étant l'ensemble des points limites des quasi-géodésiques de X , correctement quotienté (on consultera [GdlH90, DSU17] pour plus de détails). Pour le plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$, on retrouve bien un cercle, tandis que pour le graphe de Cayley d'un groupe libre à 2 éléments ce bord est un Cantor. Il s'avère que toute isométrie de X s'étend de manière unique en un homéo de $X \cup \partial X$.

Théorème 19.4 (Gromov). — *Une isométrie parabolique possède un unique point fixe dans $X \cup \partial X$, et celui-ci est dans ∂X .*

Une isométrie loxodromique possède deux points fixes dans $X \cup \partial X$, et ceux-ci sont dans ∂X . De plus, la dynamique de la restriction de l'isométrie à ∂X est du type nord-sud.

La description du bord à l'infini d'un ensemble Gromov-hyperbolique peut se révéler éclairante pour la compréhension de l'ensemble lui-même, comme ça a été le cas pour le graphe des courbes classique [Kla22]. Dans le cas du graphe des courbes fin, l'étude du bord est intimement liée à celle des points fixes au bord des isométries paraboliques et loxodromiques.

La détermination du type des isométries de $\mathcal{C}^\dagger(S)$ et des points du bord associés peut également permettre d'obtenir des résultats concernant la structure de groupe de $\text{Homeo}(S)$. Par exemple, si deux isométries loxodromiques ont des points fixes au bord tous distincts alors, en jouant au ping-pong, on montre que des itérés de ceux-ci engendrent un groupe libre. Illustrons cette stratégie par l'énoncé d'un théorème récent de Sebastian et Frédéric :

Théorème 19.5 ([HLR25]). — *Soient $f, g \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$, tels que $\text{rot}(f)$ et $\text{rot}(g)$ soient d'intérieur non vide et non homothétiques. Alors il existe $N > 0$ tel que le groupe engendré par f^N et g^N soit libre.*

Une autre conséquence désormais classique de la détermination des éléments loxodromiques est la construction de quasi-morphismes non bornés sur le groupe d'isométries, dont l'existence est intimement liée à celle d'éléments dont la *longueur stable des commutateurs*⁽⁶⁾ est non bornée. Tout cela n'est que la partie émergée de l'iceberg des propriétés algébriques du groupe $\text{Homeo}_0(S)$ et est bien défini et expliqué dans la pré-publication récente [HLR25] de Sebastian et Frédéric, où ils en déduisent un critère pour qu'un élément ait sa longueur stable des commutateurs strictement positive :

⁽⁶⁾Tout élément de $\text{Homeo}_0(S)$ s'écrit comme un produit de commutateurs. La longueur des commutateurs de f est $\text{cl}(f) = \min \{k \mid f = [g_1, g'_1] \dots [g_k, g'_k]\}$. La longueur stable des commutateurs de f est $\text{scl}(f) = \lim_n \text{cl}(f^n)/n$

Théorème 19.6 ([HLR25, theorem 1.3]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$, tel que $\text{rot}(f)$ et $-\text{rot}(f)$ soient d'intérieur non vide et non homothétiques. Alors $\text{scl}(f) > 0$.

J'espère avoir convaincu la lectrice de l'utilité de la détermination des homéos agissent de manière loxodromique sur $\mathcal{C}^\dagger(S)$, c'est en tous cas la section qui vient.

19.2. Qui sont les loxodromiques?

La détermination du type isométrique d'un homéo de S (via son action sur $\mathcal{C}^\dagger(S)$) est donc un problème important, et il s'avère que ce type est intimement lié aux propriétés rotationnelles de l'homéo. Le premier résultat dans cette direction est dû à Bowden, Hensel, Mann, Milton et Webb :

Théorème 19.7 ([BHM⁺22]). — Un homéo $f \in \text{Homeo}_0(\mathbf{T}^2)$ agit de manière loxodromique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbf{T}^2)$ si et seulement si $\text{rot}(f)$ est d'intérieur non vide.

Un des buts d'Emmanuel, en commençant à travailler sur notre projet [GM25], était de généraliser ce théorème au genre plus grand, potentiellement en termes d'ensemble de rotation homotopique. Il s'avère en fait que le bon invariant à considérer est l'ensemble de rotation ergodique :

Théorème 19.8 ([GM23]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$. Prenons un homéo $f \in \text{Homeo}_0(S)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f agit de manière loxodromique sur $\mathcal{C}^\dagger(S)$;
- (ii) $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ est d'intérieur non vide ;
- (iii) il existe un ensemble fini $F \subset S$, stable par f , tel que $f|_{S \setminus F}$ est homotope à un homéo pseudo-Anosov.

La lectrice attentive aura remarqué que ce théorème s'adapte parfaitement à l'énoncé du théorème 19.7 et qu'il est donc également vrai dans le cas $g = 1$ (l'équivalence avec le troisième point est aussi vraie dans ce cas).

La preuve de ce théorème inclut une classification des ensembles de rotation ergodiques plus faible que le théorème 18.2 (mais, de très peu, antérieure). Donnons des idées d'une preuve un peu plus moderne⁽⁷⁾.

Démonstration. — L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ découle d'arguments classiques déjà mentionnés ([LM91], [Pol92]) ; pour $(iii) \Rightarrow (i)$ on adapte directement des arguments de [BHM⁺22, BHW22] consistant à retirer des points de la surface et à appliquer des résultats « bien connus » sur le graphe des courbes (pas fin) de cette surface épointée.

Le cœur de la preuve est de montrer l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$: si $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ est d'intérieur vide, alors f n'agit pas de manière loxodromique. Par la classification des ensemble de rotation ergodiques du théorème 18.2, on a alors deux cas :

1. une des surfaces S_i de la décomposition de la section 18.3 est différente de S ;
2. il existe i tel que $S_i = S$ mais que $i \notin I_h$ (autrement dit, Λ_i est une lamination géodésique minimale remplissante).

⁽⁷⁾La preuve originale de [GM23] est quand même un peu plus élémentaire que celle qu'on va expliquer, puisqu'elle est basée *de facto* sur [Lel23, théorèmes A et C] et pas sa généralisation le théorème 17.18

Ces cas se traitent à l'aide d'astuces de revêtement intéressantes, qu'on pourra ranger dans sa tête à côté de celle présentée à la section 18.4.

Dans le premier cas, on considère une géodésique de bord c de la surface S_i . Si la géodésique c ne sépare pas la surface (autrement dit son complémentaire est connexe), on considère le revêtement périodique associé à celle-ci, comme à la figure 6 page 17. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 19.9 ([GM23, lemma 18]). — *Pour tout lacet α de S librement homotope à c , on a*

$$d_{\mathcal{C}^+(S)}(\alpha, c) \leq i_c(\alpha) + 1,$$

où $i_c(\alpha)$ désigne le nombre de relevés de c que rencontre un relevé de α à S_c .

La preuve de ce lemme est élémentaire et se fait par récurrence, en effectuant à chaque étape une chirurgie sur la courbe c , voir la figure 49.

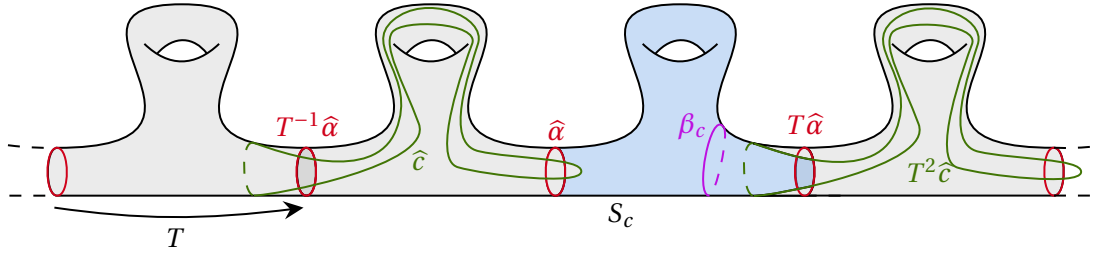


FIGURE 49. Preuve du lemme 19.9. Les relevés à S_c sont désignés par des $\hat{}$.

Puisqu'aucun vecteur de rotation n'a d'intersection avec la classe d'homologie de c , la suite $(i_c(f^n(c)))_n$ croît sous-linéairement avec n , et donc $d_{\mathcal{C}^+(S)}(f^n(c), c)$ croît sous-linéairement en n , ce qui montre que f n'agit pas de manière loxodromique. Une remarque qui servira plus tard est qu'il est possible de généraliser cette construction à toute géodésique fermée (par forcément simple) non nulle en homologie qui est orthogonale à tout élément de $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$.

Si la géodésique c sépare la surface S , il faut passer par un revêtement intermédiaire d'ordre 2 qui permet de transformer la courbe c en une courbe séparante (autrement dit, on l'a mentionné il y a bien longtemps, non nulle en homologie), comme sur la figure 50; on applique alors le raisonnement précédent à ce revêtement d'ordre 2. Cela clôt la preuve du cas 1.

Il reste à traiter le cas 2 : l'ensemble traçant est une lamination géodésique minimale remplissante, et l'ensemble de rotation homologique est inclus dans un hyperplan H de $H_1(S, \mathbf{R})$. On considère alors une suite (c_n) de géodésiques fermées dont les classes d'homologie sont de plus en plus orthogonales à H : étant donnée une base $(\beta_1, \dots, \beta_{2g-1})$ de H , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} [c_n] \wedge \beta_i = 0$ (en dimension 2, ça vient du fait que pour tout irrationnel α , il existe une infinité de rationnels p/q tels que $|\alpha - p/q| \leq 1/q^2$). On applique le raisonnement fait au début du cas précédent à chacune de ces géodésiques c_n , et un petit calcul permet de s'assurer que cette manière de faire est licite et que l'homéo n'agit pas loxodromiquement sur $\mathcal{C}^+(S)$. $\square$

La caractérisation des homéos agissant de manière loxodromique dans le cas non homotope à l'identité est à ce jour ouverte pour les surfaces de genre ≥ 2 .

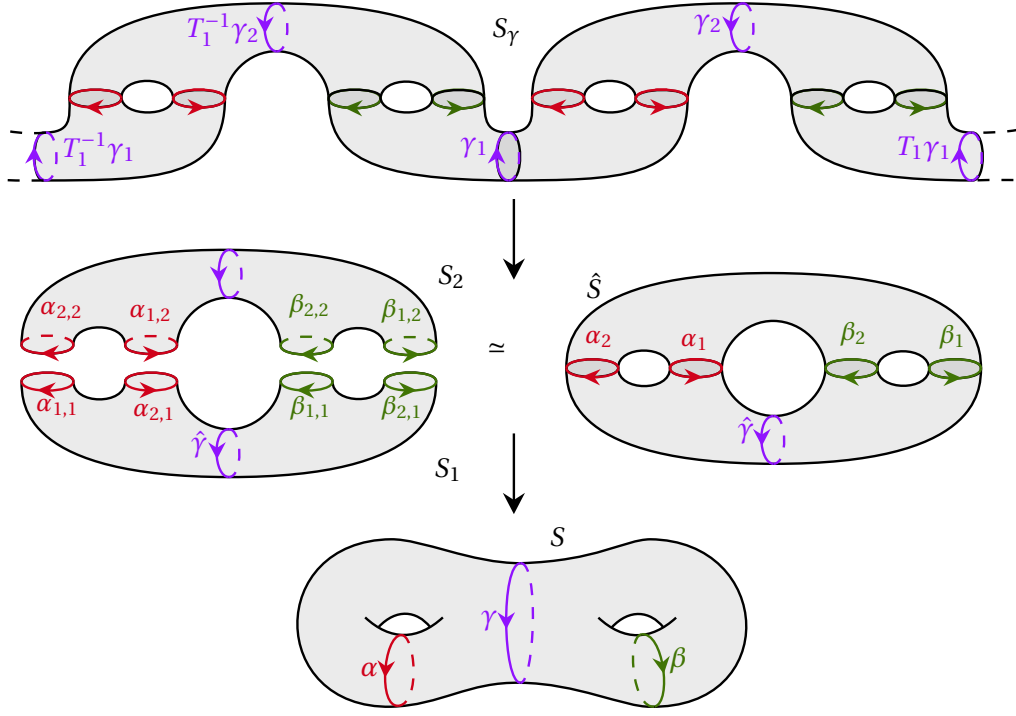


FIGURE 50. Un revêtement double qui relève une géodésique séparante en une géodésique non séparante. Les surfaces S_1 et S_2 sont obtenues en découpant S le long des courbes α et β .

Conjecture 19.10. — *Un homéo homotope à un twist de Dehn agit de manière loxodromique si et seulement si son ensemble de rotation transverse est d'intérieur non vide.*

Je dois bien sûr faire quelques commentaires sur cette conjecture. D'abord, quelques définitions. Le *twist de Dehn* dans l'anneau est l'application

$$D : [0, 1] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow [0, 1] \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \\ (t, \theta) \longmapsto (t, \theta + t),$$

qui vaut l'identité au bord de l'anneau. Un *twist de Dehn* sur une surface S est une application qui est égale à D sur un anneau fermé essentiel plongé dans S , et l'identité ailleurs.

Pour un homéo homotope à un twist de Dehn, on peut noter γ un lacet simple essentiel inclus dans l'anneau associé au twist de Dehn. On vérifie alors que l'action f_* de f sur l'homologie est triviale au quotient par $[\gamma] : f_* : H_1(S, \mathbf{R}) / \langle [\gamma] \rangle \rightarrow H_1(S, \mathbf{R}) / \langle [\gamma] \rangle = \text{Id}$. Cela permet d'adapter la définition donnée à la section 6.2 d'ensemble de rotation homologique au quotient $H_1(S, \mathbf{R}) / \langle [\gamma] \rangle$. En effet, fixons $\tilde{D}$ un domaine fondamental de S dans $\tilde{S}$ et un relevé $\tilde{f}$ de f fixant un relevé de γ (ou en tous cas ses points au bord). Pour $\tilde{x} \in \tilde{S}$, soit $T_{\tilde{x}}^n \in \mathcal{G}$ défini par $\tilde{f}^n(\tilde{x}) \in T_{\tilde{x}}^n \tilde{D}$ (voir (22) page 27). Alors (exercice!) $[T_{\tilde{x}}^n] \in H_1(S, \mathbf{R}) / \langle [\gamma] \rangle$ est indépendant du choix du relevé $\tilde{x}$ de x , et on peut définir :

Définition 19.11. — L'ensemble de rotation transverse de f est

$$\text{rot}^T(\tilde{f}) = \left\{ r \in H_1(S, \mathbf{R}) / \langle [\gamma] \rangle \mid \exists (x_k) \in S^{\mathbf{N}}, n_k \rightarrow +\infty : \frac{[T_{\tilde{x}_k}^{n_k}]}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r \right\}.$$

Problème 19.12. — *Quelle est la forme de rot^Γ ? A-t-on un analogue du théorème 18.2 pour l'ensemble $\text{rot}_{\text{erg}}^\Gamma$? En particulier, est-ce qu'on a réalisation des points rationnels par des points périodiques dans certains cas ?*

La conjecture 19.10 pourrait alors se déduire de cette dernière : le point crucial est d'obtenir des énoncés d'existence de points périodiques sous des hypothèses du type « l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide ».

Une autre direction de recherche, consistant là aussi à généraliser en genre plus grand ce qu'on sait déjà pour le tore, est d'obtenir des analogues des théorèmes 19.5 et 19.6.

Problème 19.13. — *Sous quelles conditions sur les S_i et les ρ_i associés à deux homéos f et g peut-on assurer qu'ils engendrent un groupe contenant un groupe libre à deux générateurs ?*

Pour donner une réponse partielle à cette question, on peut utiliser l'astuce de revêtement de la section 18.4. Cela marche d'ores et déjà pour des homéos f, g ayant des classes $i \in I_h(f)$, $j \in I_h(g)$ telles que S_i et S_j contiennent un même tore avec des composantes de bord : si leurs ensembles de rotation dans le revêtement $\widehat{S}_{\text{fer}}$ ne sont pas homothétiques, alors on devrait pouvoir montrer sans trop de problème que des itérés engendrent un groupe libre. Si on veut obtenir des conditions suffisantes plus générales, il faudra sans doute définir correctement un graphe fin des courbes ou des arcs pour des surfaces à bord.

Une autre conjecture concerne la longueur stable des commutateurs en genre plus grand :

Conjecture 19.14. — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ tel qu'il existe $i \in I_h$ tel que ρ_i n'est pas symétrique par rapport à 0. Alors $\text{scl}(f) > 0$.*

Pour ces deux derniers problèmes, une piste utile (sans doute l'étape après la définition de graphe des courbes pour les surfaces à bord) est la définition d'un complexe de projection comme celui de Mladen Bestvina, Ken Bromberg et Koji Fujiwara [BBF15, BBFS] (basé sur les résultats de [MM99, MM00]), ce qui a permis à ces auteurs d'obtenir un critère fort de $\text{scl} > 0$ dans le *mapping class group* [BBF16].

Problème 19.15. — *Caractériser les points du bord de $\mathcal{C}^\dagger(S)$ comme des sous-ensembles de S invariants par la dynamique. Ce problème est relié au problème 10.4.*

Pour répondre à cette question, des travaux du type [GST24] et [Mil24] semblent être des outils très utiles. On notera les résultats partiels [BHW24, HLR25] dans le cas du tore.

19.3. Qui sont les elliptiques ?

La caractérisation des éléments elliptiques (ou de manière équivalente, puisqu'on vient de caractériser les loxodromiques, paraboliques) fait elle aussi intervenir des propriétés rotationnelles de l'homéo : les déviations bornées.

Il s'avère que c'est la notion définie à la définition 10.2 qui est pertinente pour la caractérisation de l'ellipticité :

Théorème 19.16 ([GM24]). — *Soit $f \in \text{Homeo}(\mathbb{T}^2)$. Alors f agit elliptiquement sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si f admet des déviations bornées dans une direction rationnelle $v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$.*

À l'aide de résultats déjà connus à propos des déviations bornées dans le cas du tore, on peut en déduire la classification suivante en termes de forme de l'ensemble de rotation (dans sa version « homotope à l'identité ») :

Corollaire 19.17. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$. Alors

- f agit de manière hyperbolique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si $\rho(f)$ est d'intérieur non vide;
- f agit de manière parabolique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si $\rho(f)$ est un segment de pente irrationnelle, ou si $\rho(f)$ est un segment de pente rationnelle ne passant pas par un point rationnel, ou si f est une pseudo-rotation avec des déviations non bornées dans toute direction $v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$;
- f agit de manière elliptique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si $\rho(f)$ est un segment de pente rationnelle passant par un point rationnel, ou si f est une pseudo-rotation avec des déviations bornées dans une certaine direction $v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$.

Expliquons comment déduire ce corollaire du théorème 19.16. Le premier point est le théorème 19.7. Il s'agit donc de distinguer les homéos qui agissent de manière elliptique de ceux qui ne le font pas.

D'après Passeggi et Sambarino [PS20], tout homéo dont l'ensemble de rotation est un segment non trivial de pente rationnelle ne passant pas par un point rationnel est à déviations non bornées dans la direction orthogonale à ce segment, et donc, d'après le théorème 19.16, agit de manière parabolique.

De plus, d'après le théorème 10.5, version Dávalos [Dáv18], tout homéo dont l'ensemble de rotation est un segment de pente rationnelle v passant par un point rationnel est à déviations bornées dans la direction $v^\perp$, et donc, d'après le théorème 19.16, agit de manière elliptique.

Si l'on suppose vraie la conjecture 11.3 de Franks-Misiurewicz, on a une amélioration suivante du deuxième point : f agit de manière parabolique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ si et seulement si $\rho(\tilde{f})$ est un segment de pente irrationnelle, ou si f est une pseudo-rotation avec déviations non bornées dans au moins une direction $v \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{0\}$. En particulier, tout f dont l'ensemble de rotation est un segment à direction rationnelle agit de manière elliptique sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$.

Notons qu'il existe à la fois des pseudo-rotations à déviations bornées dans une direction rationnelle (comme les rotations réelles) et des pseudo-rotations à déviations non bornées dans n'importe quelle direction rationnelle (voir le théorème 10.13 pour les pseudo-rotations rationnelles et le théorème 10.16 pour les pseudo-rotations irrationnelles). On ne peut donc pas distinguer complètement les types d'actions possibles des homéos sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ uniquement en termes d'ensembles de rotation.

Nastaran Einabadi a amélioré l'exemple de [KK09] dans [Ein24] pour montrer qu'il existe des homéos « exotiques » agissant de manière parabolique mais non propre sur $\mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ (voir le théorème 10.18) : il existe $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et un sommet $\alpha \in \mathcal{C}^\dagger(\mathbb{T}^2)$ tels que $\liminf_n d(f^n(\alpha), \alpha) < +\infty$ et $\limsup_n d(f^n(\alpha), \alpha) = +\infty$ (c'est à ma connaissance un des seuls exemples quelque peu naturels d'existence d'isométries paraboliques non propres d'espace Gromov-hyperboliques). La stratégie de base est d'utiliser la méthode d'Anosov-Katok, qui fournit même des exemples *rigides*⁽⁸⁾ elle ne s'adapte donc pas immédiatement aux surfaces de genre ≥ 2 .

Conjecture 19.18. — Il n'existe aucun homéo agissant de manière parabolique et non propre sur $\mathcal{C}^\dagger(S)$ pour des surfaces S de genre ≥ 2 .

⁽⁸⁾Un homéo est dit rigide s'il possède une suite d'itérés positifs tendant C^0 vers l'identité. Dans le cas présent, la convergence est même C^∞ .

Comme première étape, on peut résoudre l'exercice difficile suivant :

Exercice 19.19. — Utiliser les feuilletages transverses de Patrice (ou, si on en ressent le besoin, la théorie du forçage), pour montrer qu'il n'existe pas d'homéo rigide différent de l'identité en genre ≥ 2 .



Une étape importante de la preuve du théorème 19.16 est de définir des « ensembles de rotation généralisés », qui sont analogues aux ensembles de rotation capables de capturer des vitesses sous-linéaires : au lieu de diviser par le temps, on divise par une suite réelle tendant vers l'infini. Plus précisément, on fixe un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbf{R}^2$, un domaine fondamental $D \subset \mathbf{R}^2$ de l'action de $\mathbf{Z}^2$, et $\tilde{x}_0 \in D$. Un ensemble de rotation généralisé est une valeur d'adhérence (pour la convergence de Hausdorff sur tout compact) d'une suite du type

$$\frac{1}{a_k} (\tilde{f}^{n_k}(D) - \tilde{f}^{n_k}(\tilde{x}_0)),$$

pour a_k et n_k tendant vers $+\infty$. Une propriété fondamentale des ensembles de rotation généralisés est qu'ils sont convexes ; la preuve de ce fait est quasiment identique à celle de la convexité des ensembles de rotation des homéos du tore (théorème 7.1).

Si le problème de réalisation des formes d'ensembles de rotation pour les homéos du tore est encore largement ouvert — à savoir : quels sont les sous-ensembles convexes compacts du plan qui sont l'ensemble de rotation de quelqu'un ? (voir le chapitre 11) —, Nastaran a obtenu un résultat assez frappant pour les ensembles de rotation généralisés [KK09] : il existe un homéo du tore tel que tout ensemble convexe compact symétrique par rapport à un point est un de ses ensembles de rotation généralisés.

Il reste un cas à traiter si on veut obtenir une classification complète des isométries des graphes fins des courbes (au moins pour celles issues d'homéos homotopes à l'identité) :

Conjecture 19.20. — *Les homéos de surfaces de genre $g \geq 2$ agissant de manière elliptique sont ceux ayant des déviations bornées par rapport à une géodésique fermée simple.*

Ici, « avoir des déviations bornées par rapport à une géodésique fermée simple » s'entend au sens de ce qui est énoncé au corollaire 20.6 : il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que tout segment d'orbite a un nombre d'intersection géométrique avec cette géodésique inférieur à N . On verra au corollaire 20.3 une réponse (très) partielle à cette conjecture, qui ne laisse, pour les homéos homotopes à l'identité, qu'un seul cas à traiter : celui des homéos dont l'ensemble de rotation est trivial. Une étape importante consistera sûrement à définir une bonne notion d'ensemble de rotation homotopique généralisé.

CHAPITRE 20

VERS L'ENSEMBLE DE ROTATION GÉNÉRAL : COMMENT TOURNENT LES ORBITES NON TYPIQUES?

On a vu à la section précédente qu'on comprend désormais bien mieux l'ensemble de rotation ergodique, qui décrit les propriétés rotationnelles des orbites typiques, et donc en particulier récurrentes. Si on veut comprendre la dynamique rotationnelle de tous les points, et en particulier les points errants, il faut considérer l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$. Commentons par un exemple.

20.1. Un premier exemple : le cas C^0 générique

Il n'y a pour l'instant aucun théorème général de structure pour les ensembles de rotation $\text{rot}(f)$ du type du théorème 18.2. Il existe tout de même un résultat dans ce sens, qui traite du cas C^0 -générique, et dû à Juan Alonso, Joaquín Brum et Alejandro Passeggi :

Théorème 20.1 ([ABP23]). — *Pour toute surface fermée S de genre $g \geq 2$, il existe un ensemble C^0 ouvert et dense de $\text{Homeo}_0(S)$ sur lequel l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ de tout élément f est une union d'au plus 2^{5g-3} ensembles convexes contenant 0.*

Un point important ici est que la borne obtenue est exponentielle en le genre, alors que celle majorant le nombre de pièces dans le théorème 18.2 est $5g - 5$ (et celle-ci est optimale). Ce n'est pas un hasard : pour toute surface fermée de genre $g \geq 2$, il existe un homéo de cette surface dont l'ensemble de rotation est une union de $2^{\lfloor g/2 \rfloor}$ ensembles convexes, et ne peut pas s'écrire comme l'union de moins d'ensembles convexes (voir la figure 51) : en général, on ne peut pas espérer que l'ensemble de rotation s'écrive comme l'union d'un nombre sous-exponentiel en g d'ensembles convexes (voir l'exercice 20.24).

La preuve de ce théorème passe par l'utilisation de difféomorphismes appelés *fitted axiom A*, qui sont denses dans $\text{Homeo}_0(S)$ et tels que chaque homéo dans un de leur voisinage leur est semi-conjugué (et en particulier, a le même ensemble de rotation) ; ces faits sont désormais classiques [SS75, Nit71]. Il s'agit ensuite d'étudier la dynamique rotationnelle de ces difféomorphismes axiome A, et on a alors toute la théorie hyperbolique à notre disposition, qu'il faut mélanger comme il faut avec de la topologie des surfaces.

Le thème général des propriétés rotationnelles de « la plupart » des applications de surfaces (dans un sens à spécifier) a été un peu exploré dans le cas du tore, très peu pour les autres surfaces. On reparlera un peu plus tard (proposition 20.31) des propriétés de régularité de l'application $f \mapsto \text{rot}(f)$, voici déjà quelques questions relatives à ce problème.

Problème 20.2. —

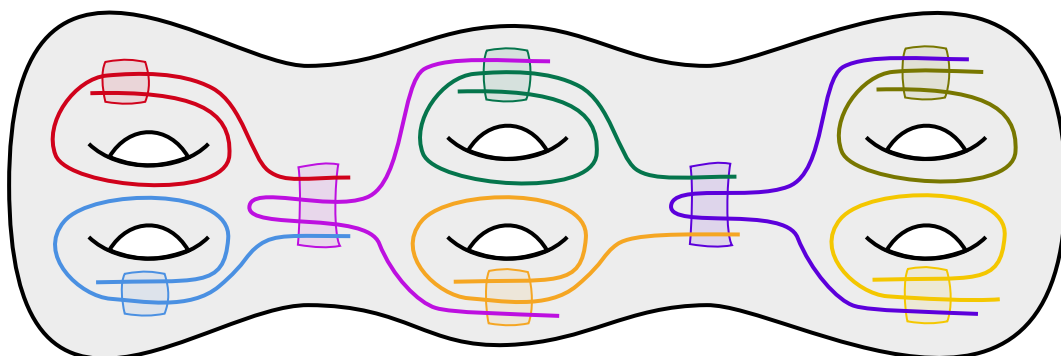


FIGURE 51. Un exemple d'homéo f d'une surface de genre 6 pour lequel l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ est une union de $2^3 = 8$ convexes et pas moins. Ces convexes sont chacun de dimension 3, mais on peut aussi modifier l'exemple pour qu'ils soient tous de dimension 6 (en modifiant chaque fer à cheval rotationnel pour qu'il soit associé à deux automorphismes de revêtement au lieu de 1).

1. *Que dire du cas préservant l'aire? Peut-on généraliser les techniques du travail commun avec Andrés [GK17] (voir le théorème 12.3)?*
2. *Est-il possible de dire des choses du cas C^1 générique, voire en régularité plus grande?*

Dans le voisinage de la question 2., le seul résultat que je connaisse est ma note [Gui16]. Citons aussi le joli résultat de Patrice et Martin [LCS25], relié aux questions 1. et 2. : pour tout $1 \leq r \leq +\infty$, l'ensemble de rotation d'un difféo générique de $\text{Diff}_{\omega,0}^r(S)$ (où l'indice ω signifie la préservation de l'aire) engendre un sous-espace vectoriel de $H_1(S, \mathbf{R})$ de dimension $\geq g$ (et le papier en question contient plus de détails sur cet énoncé). La constante g apparaissant dans cet énoncé est optimale dans le cas $r \geq 3$: la théorie KAM implique qu'il existe des ouverts de $\text{Diff}_{\omega,0}^3(S)$ sur lesquels l'ensemble de rotation engendre un sous-espace vectoriel de dimension $\leq g$.

20.2. Ensemble de rotation et déviations bornées

Dans un travail commun avec Fabio Tal, découpé en deux parties [GT25a, GT25b], on s'intéresse à des questions de déviations bornées comme celles décrites en section 10 (pour le tore) pour les homéos de surfaces de genre ≥ 2 . Cette étude relativement complète aborde les déviations bornées par rapport aux géodésiques fermées (qui sont l'équivalent en genre supérieur du cas des homéos du tore dont l'ensemble de rotation est un segment à pente rationnelle) d'une part, et les déviations bornées par rapport aux géodésiques simples non fermées (qui sont l'équivalent en genre supérieur du cas des homéos du tore dont l'ensemble de rotation est un segment à pente irrationnelle) d'autre part. Ces résultats sont une première application du principe stipulant que l'ensemble traçant, même s'il n'est défini qu'à partir des points typiques, dicte la dynamique de tous les points de S .

Énonçons déjà une application directe de ces résultats :

Corollaire 20.3 ([GT25a, corollary C]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Supposons qu'il y ait une classe $\mathcal{N}_i$ telle que $S_i \neq S$. Alors f agit elliptiquement sur $\mathcal{C}^+(S)$.

Ainsi, on connaît le type d'action de $f \in \text{Homeo}_0(f)$ sur $\mathcal{C}^+(S)$ dans beaucoup de cas :

- s'il y a une classe $\mathcal{N}_i$ telle que $S_i \neq S$, alors f agit elliptiquement;
- s'il y a une classe $\mathcal{N}_i$ telle que $S_i = S$ (et donc $I = \{i\}$), et si $i \in I_{\min}$, alors f agit paraboliquement (car dans ce cas Λ_i est une lamination géodésique minimale remplissante, et on peut appliquer un critère similaire à [BHM⁺22, Construction 6.2], en utilisant le fait que le relevé d'une telle lamination à un revêtement fini reste minimal et remplissant);
- s'il y a une classe $\mathcal{N}_i$ telle que $S_i = S$ (et donc $I = \{i\}$), et si $i \in I_h$, alors f agit loxodromiquement (car dans ce cas $\text{int}(\text{rot}_{\text{erg}}(f)) \neq \emptyset$ et on peut appliquer le théorème 19.8).

Il reste le cas des pseudo-rotations à traiter : il y a des exemples d'homéos dont l'ensemble de rotation est réduit à $\{0\}$ qui agissent elliptiquement (par exemple l'identité) ou paraboliquement (par exemple un exemple de Koropec-Tal, voir le théorème 10.13 et sa généralisation (presque) directe en genre plus grand [GM25, section 7.2], ou un exemple de Katok avec ensemble de rotation trivial, voir la remarque 7.15).

20.2.1. Déviations par rapport à une géodésique fermée. — Dans la première partie de notre travail commun avec Fabio, on s'intéresse au problème de bornitude des déviations par rapport à une géodésique simple de $\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f)$ (voir la définition 17.8).

Plus précisément, étant donnés $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et une géodésique fermée $\gamma \subset S$ qui est une géodésique traçante pour une mesure de $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$, on cherche à savoir s'il existe une borne sur le nombre d'intersection géométrique entre un segment d'orbite de f et γ . Définissons formellement ce nombre d'intersection géométrique.

Définition 20.4. — Soit γ une géodésique fermée de S , $x_0 \in S$ et $n_0 \geq 0$. Le nombre d'intersection géométrique entre γ et l'orbite de x_0 en temps n_0 est le nombre minimal de relevés de γ à $\tilde{S}$ qu'une courbe homotope à $\tilde{I}^{[0, n_0]}(\tilde{x}_0)$ (relativement à ses extrémités) croise.

La notion de croisement est ici évidente, puisque tout relevé de γ sépare $\tilde{S}$ en deux composantes connexes. Remarquons que cette définition est indépendante du choix de l'isotopie I , puisque (on l'a déjà vu plus tôt) toutes les isotopies entre l'identité et f sont homotopes entre elles (proposition 6.4). Voilà le théorème principal de [GT25a] :

Théorème 20.5 ([GT25a, theorem A]). — Soit S une surface fermée de genre ≥ 2 et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit γ une géodésique fermée de S qui est une géodésique traçante pour une mesure de $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\partial>0}(f)$. Alors il existe $N > 0$ tel que si une orbite $\tilde{y}, \dots, \tilde{f}^{n_0}(\tilde{y})$ croise au moins N relevés distincts de γ , alors il existe une orbite f -périodique dont un relevé à $\tilde{S}$ croise au moins deux de ces relevés de γ .

Notons que l'hypothèse du théorème est formulée en termes d'ensemble de rotation *ergodique* et non topologique, et plus précisément fait intervenir l'ensemble traçant $\text{rot}_{\text{erg}}^{\pi_1}(f)$ (définition 17.8) : l'hypothèse est bien plus faible que si elle faisait intervenir l'ensemble de rotation de « Misiurewicz-Ziemian » (autrement dit, $\text{rot}(f)$). Il en sera de même pour les résultats de la sous-section suivante, et cela jette un nouvel éclairage sur les résultats de déviations bornées sur le tore.

Le conclusion du théorème 20.5 implique en particulier qu'il existe une géodésique traçante croisant γ . Ainsi, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 20.6. — *Étant fixé $f \in \text{Homeo}_0(S)$, il existe $N > 0$ tel que tout segment d'orbite a un nombre d'intersection géométrique avec une géodésique de $\bigcup_{i \in I_{\text{fer}}} \Lambda_i$ (voir la section 18.1) ou de $\bigcup_{i \in I_h} \partial S_i$ inférieur à N .*

Démonstration. — Pour la première conclusion, il suffit de remarquer que f étant fixé, il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques dans $\bigcup_{i \in I_{\text{fer}}} \Lambda_i$.

La seconde conclusion découle du fait que pour tout $i \in I_h$, il existe une famille finie de géodésiques fermées γ_j de Λ_i qui découpent S_i en disques topologiques ou en anneaux périphériques (*i.e.* se rétractant sur une composante de ∂S_i); on voit alors qu'un chemin ayant une grande intersection géométrique avec une composante de ∂S_i doit forcément avoir une grande intersection géométrique avec une de ces géodésiques fermées γ_j de Λ_i . Si ledit chemin est l'orbite d'un point sous l'isotopie, on peut appliquer le théorème 20.5 qui, si on a choisi comme il faut les relevés de γ_j , va nous exhiber une orbite périodique dont la géodésique traçante croise γ_j mais aussi une composante de bord de S_i , ce qui est impossible. $\square$

C'est ce corollaire qu'on désigne comme résultat de « déviations bornées » : les orbites ne peuvent pas croiser trop de relevés d'une géodésique de Λ_i pour $i \in I_{\text{fer}}$.

Dans [GT25a] on démontre en fait des résultats plus forts que le théorème 20.5 : on précise les diverses propriétés qu'on peut requérir de l'orbite périodique obtenue; on obtient également des orbites « rotationnellement errantes » avec certaines propriétés dans le cas où le segment d'orbite de l'hypothèse croise plusieurs fois deux géodésiques fermées distinctes γ_1 et γ_2 . Ces énoncés sont longs et techniques; on reparlera de cette propriété dans la section suivante.

Dans le cas où l'ensemble des points fixes de S est inessentiel, on conjecture qu'un résultat plus fort est vrai : on a existence d'un point périodique dont la trajectoire croise la géodésique fermée γ non seulement si on a un bout d'orbite de $\tilde{f}$ qui croise beaucoup de relevés de γ , mais aussi sous l'hypothèse plus faible qu'un bout d'orbite croise le R -voisinage de $\tilde{\gamma}$. Commençons par rappeler le terme « inessentiel » qu'on a déjà rencontré dans le cas du tore à la définition 10.12.

Définition 20.7. — On dit qu'un ensemble $A \subset S$ est *inessentiel* s'il est inclus dans un disque topologique ouvert (ou, de manière équivalente, s'il possède un voisinage dans lequel tout lacet est contractile dans S). Il est dit *essentiel* s'il n'est pas inessentiel.

Conjecture 20.8. — *Supposons que l'ensemble des points fixes contractiles de f soit inessentiel. Soit γ une géodésique de $\bigcup_{i \in I_{\text{fer}}} \Lambda_i$. Alors il existe $C > 0$ tel que si une orbite $\tilde{\gamma}, \dots, \tilde{f}^{n_0}(\tilde{\gamma})$ de $\tilde{f}$ croise $V_C(\tilde{\gamma}) = \{\tilde{x} \in \tilde{S} \mid d(\tilde{x}, \tilde{\gamma}) < C\}$ pour un certain relevé $\tilde{\gamma}$ de γ , alors il existe une orbite f -périodique dont un relevé à $\tilde{S}$ a sa géodésique traçante qui croise $\tilde{\gamma}$.*

20.2.2. Déviations par rapport à une lamination géodésique minimale sans feuille fermée. — Les géodésiques fermées étant denses dans $\bigcup_{i \in I_h} \Lambda_i$ (voir le théorème 17.18), on peut considérer qu'on a traité le problème des déviations bornées pour les classes de I_h , ainsi que pour les classes de I_{fer} . Il reste donc le cas des classes de I_{min} ; c'est ce que nous faisons dans la deuxième partie de notre travail commun avec Fabio [GT25b].

Fixons S une surface fermée de genre ≥ 2 , un homéo $f \in \text{Homeo}_0(S)$ et $i \in I_{\text{min}}$ (autrement dit, $i \in I^1(S)$ est tel que Λ_i soit une lamination géodésique minimale sans feuille fermée).

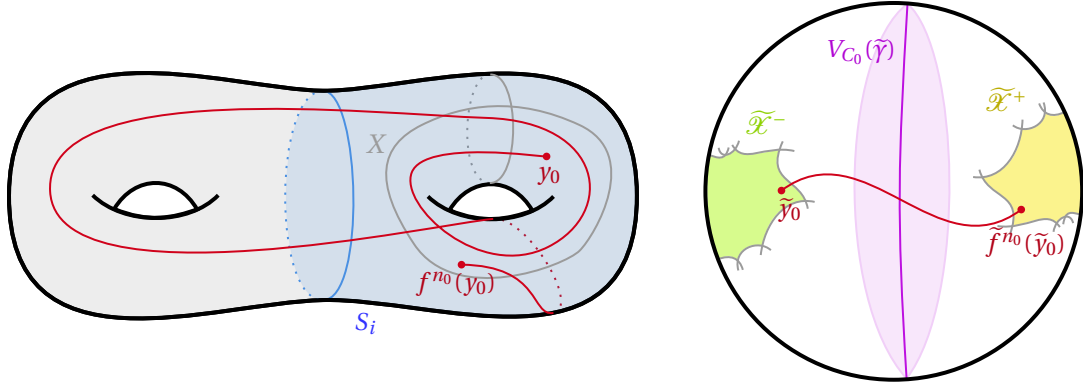


FIGURE 52. Énoncé du théorème 20.9. Les ensembles $\tilde{\mathcal{X}}^-$ et $\tilde{\mathcal{X}}^+$ sont des composantes connexes du complémentaire du relevé de X . Le théorème 20.9 empêche d'avoir une trajectoire telle que celle de y_0 .

Tous d'abord, nous démontrons dans [GT25b] que la lamination géodésique Λ_i est orientable : c'est le théorème 17.11, qui sera utile pour le théorème 20.14 de déviations bornées.

Le premier théorème concernant la bornitude des déviations par rapport à une lamination géodésique sans feuille fermée est un peu technique; pas de panique, je vais donner des explications sous son énoncé. Rappelons avant tout qu'à une lamination géodésique minimale sans feuille fermée Λ_i est associée une surface ouverte S_i , à bord formé de géodésiques fermées deux-à-deux disjointes, minimale pour l'inclusion parmi toutes celles qui contiennent Λ_i (voir la section 18.3).

On note ι l'application d'inclusion dans S .

Théorème 20.9 ([GT25b, theorem B]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit $i \in I_{\min}$ et S_i la surface associée.

Alors il existe $C_0 > 0$ et un ensemble $X \subset S$ d'intérieur vide satisfaisant $\iota_*(\pi_1(S_i)) \subset \iota_*(\pi_1(X))$ tel que la propriété suivante est fausse (voir figure 52) : il existe une géodésique $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{S}$ se projetant sur une géodésique de Λ_i , un point $\tilde{y}_0$ appartenant à une composante connexe $\tilde{\mathcal{X}}^-$ du complémentaire de $\tilde{X}$ (l'union des relevés de X à S) et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{y}_0)$ appartient à une composante connexe $\tilde{\mathcal{X}}^+$ du complémentaire $\tilde{X}$, avec $\tilde{\mathcal{X}}^- \subset L(V_{C_0}(\tilde{\gamma}))$ et $\tilde{\mathcal{X}}^+ \subset R(V_{C_0}(\tilde{\gamma}))$.

Rappelons que $L(V_{C_0}(\tilde{\gamma}))$ désigne la composante connexe à gauche de la « banane » $V_{C_0}(\tilde{\gamma})$, cette banane étant définie comme l'ensemble des points à distance $< C_0$ d'un point de $\tilde{\gamma}$.

L'ensemble X donné par le théorème est construit comme un squelette de la surface S , c'est-à-dire une union finie de lacets essentiels, sur laquelle la surface S_i se rétracte.

Il est peut-être plus simple de comprendre ce que le théorème autorise : il n'interdit pas d'avoir une orbite qui fait un long parcours dans $S \setminus S_i$, rentre dans S_i pour croiser une géodésique γ de Λ_i , ressort de S_i puis fait de nouveau un long parcours dans $S \setminus S_i$. Il est d'ailleurs possible de concocter des exemples où ce type de comportement apparaît. Ce qui est par contre interdit c'est, au terme de ces long parcours, de rentrer de nouveau dans la surface S_i et de croiser le squelette X . Ces subtilités techniques disparaissent lorsqu'on ajoute une hypothèse de non-essentialité de l'ensemble des points fixes :

Théorème 20.10 ([GT25b, theorem D]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit $i \in I_{\min}$, et S_i la surface associée. Supposons que l'ensemble des points fixes contractiles de f soit non essentiel.

idées de
preuve de
l'orientabi-
lité

Adapter K-T
ici

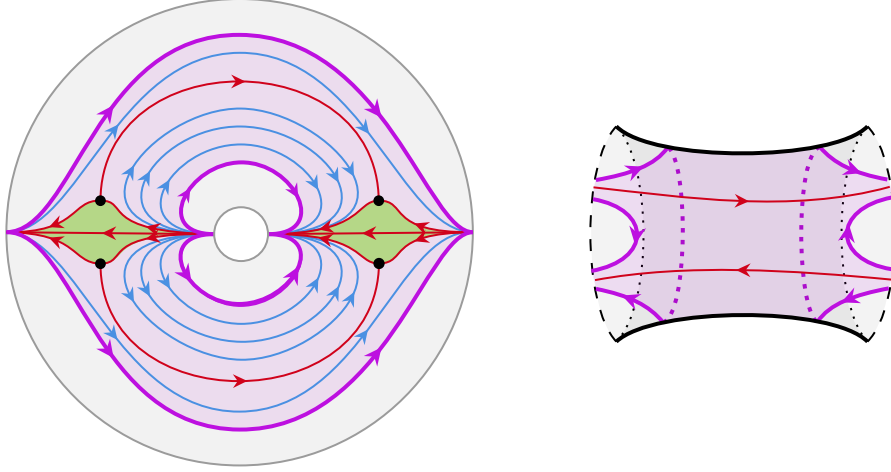


FIGURE 53. Comment définir un flot sur l'union de deux couronnes, dont les orbites pénètrent dans les surfaces S_i ? Image dans un bout de la surface (à droite) et dans le revêtement annulaire associé (à gauche), qui est $\tilde{S}/T$, où T est l'automorphisme de revêtement correspondant à géodésique fermée simple qui est a composante de bord commune aux deux couronnes.

Alors il existe $C_0 > 0$ tel que la propriété suivante est fausse (voir figure 52) : il existe une géodésique $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{S}$ se projetant sur une géodésique de Λ_i , un point $\tilde{y}_0$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tels que $\tilde{y}_0 \in L(V_{C_0}(\tilde{\gamma}))$ et $\tilde{f}^{n_0}(\tilde{y}_0) \in R(V_{C_0}(\tilde{\gamma}))$.

Le théorème 20.9 peut être combiné au corollaire 20.6 pour donner le résultat suivant :

Corollaire 20.11 ([GT25a, corollaire B]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit γ une géodésique fermée qui est une composante de bord de la surface S_i associée à une classe $\mathcal{N}_i$ pour $i \in I$. Soit $\tilde{f}$ le relevé de f à $\tilde{S}$. Alors il existe $N > 0$ tel qu'un segment d'orbite de $\tilde{f}$ ne peut croiser plus de N relevés distincts de γ .

Ainsi, un homéo a des déviations bornées par rapport aux géodésiques de bord des surfaces S_i .

Exercice 20.12. —

1. Démontrer le corollaire 20.11.
2. En déduire le corollaire 20.3.

Exemple 20.13. — On ne peut pas espérer de résultat beaucoup plus fort de bornitude des déviations, du type de celui de la conclusion du théorème 20.10 (aucune orbite ne croise une « banane » assez large définie par le R -voisinage dans $\tilde{S}$ de la géodésique de bord de la surface S_i), et cela même si l'ensemble des points fixes de f est inessentiel. J'en veux pour preuve des exemples, comme celui présenté à la figure 53, de temps 1 de flots avec un nombre fini de singularités et ayant des orbites hétéroclines à deux orbites de deux classes $\mathcal{N}_i$ et $\mathcal{N}_j$ différentes, où $i, j \in I_{\min}$.

Enfin, on a un résultat de déviations bornées dans la direction de la lamination Λ_i (les théorèmes 20.9 et 20.10 doivent être vus comme bornant les déviations transverses à Λ_i) : aucune orbite ne peut reculer le long d'une géodésique de Λ_i . Formellement, ça donne ça :

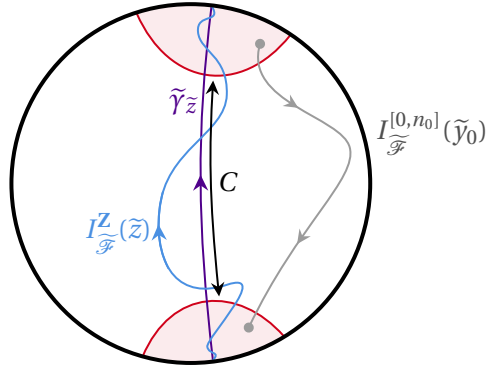


FIGURE 54. Le théorème 20.14 affirme qu'une telle orbite grise ne peut pas exister : elle ne peut pas rencontrer d'abord la région rouge du haut, puis la région rouge du bas (délimitées par des géodésiques orthogonales à $\tilde{\gamma}_{\tilde{z}}$ et à une distance C). On se place ici dans le cas où $\tilde{\gamma}$ est la géodésique pistante d'un point typique $\tilde{z}$.

Théorème 20.14 ([GT25b, theorem E]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit $i \in I_{\min}$ et S_i la surface associée.

Alors il existe $C > 0$ et une orientation de la lamination Λ_i tels que pour tout $\tilde{y}_0 \in \tilde{S}$, toute géodésique $\gamma \subset \Lambda_i$, toute relevé $\tilde{\gamma}$ de γ à $\tilde{S}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a (voir figure 54)

$$\text{pr}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}^n(\tilde{y}_0)) - \text{pr}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{y}_0) \geq -C.$$

Le lecteur pourra objecter que je n'ai jusque là pas choisi de paramétrisation pour la géodésique $\tilde{\gamma}$ et que donc $\text{pr}_{\tilde{\gamma}}$ est mal défini. Ce n'est en fait pas grave : on choisit une paramétrisation de $\tilde{\gamma}$ par longueur d'arc compatible avec son orientation, et on définit $\text{pr}_{\tilde{\gamma}} : \tilde{S} \rightarrow \mathbf{R}$ à l'aide de la projection orthogonale sur $\tilde{\gamma}$ et cette paramétrisation ; la différence $\text{pr}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{f}^n(\tilde{y}_0)) - \text{pr}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{y}_0)$ ne dépend alors pas de la paramétrisation choisie.

Le théorème 20.14 implique le corollaire suivant qui contraint la forme des ensembles de rotation et ensembles de rotation ergodiques :

Corollaire 20.15 ([GT25b, corollary F]). — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$ et $f \in \text{Homeo}_0(S)$.

- S'il existe $r \in \text{rot}_{\text{erg}}(f) \setminus \mathbf{R}H_1(S, \mathbf{Q})$ et un voisinage U de r tel que $\text{rot}_{\text{erg}}(f) \cap U \subset \mathbf{R}r$, alors $\text{rot}_{\text{erg}}(f) \cap \mathbf{R}r \subset \mathbf{R}_+ r$.
- S'il existe $r \in \text{rot}(f) \setminus \mathbf{R}H_1(S, \mathbf{Q})$ et un voisinage U de r tel que $\text{rot}(f) \cap U \subset \mathbf{R}r$, alors $\text{rot}(f)$ est inclus dans un demi-espace $\{\ell > 0\}$, où $\ell \in H_1(S, \mathbf{Q})^*$ vérifie $\ell(r) > 0$.

En particulier, il n'y a aucun homéo dont l'ensemble de rotation est un segment de direction irrationnelle ayant 0 dans son intérieur. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le théorème 11.4 (voir aussi le 2. du problème 18.4).

Conjecture 20.16. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ tel que $\text{Fix}(f)$ soit inessentiel, et soit $i \in I_{\min}$. Alors :

- si f est non errant, alors il existe un ouvert f -invariant homotope à S_i ;
- plus généralement, il existe $C > 0$ tel que si $x \in S$ est tel que son segment d'orbite en temps n croise C fois une géodésique fermée de S_i , alors x est errant et soit $\rho_f(x) \subset V_i$, soit $\rho_{f^{-1}}(x) \subset V_i$.

Ces énoncés de déviations bornées peuvent paraître à première vue un peu abscons. On a déjà vu que des résultats de ce type peuvent avoir des applications remarquables (sections 10.3 et 19.3); on va présenter, dans les sections qui viennent, des conséquences différentes du corollaire 20.3 de ces énoncés bruts, là encore pour des homéos de surfaces de genre ≥ 2 .

20.3. Classes de fers à cheval et gros ensembles de rotation

Rappelons le thème de ce chapitre : on veut comprendre non plus la dynamique rotationnelle des orbites typiques pour des mesures (comme au chapitre 18) mais celle de toutes les orbites possibles. Il faut donc analyser le comportement de ces orbites potentiellement errantes. Une remarque importante : le procédé de Krylov-Bogolyubov nous dit que toute orbite s'approche au futur et au passé de telles orbites typiques, on peut donc se focaliser sur les points qui s'approchent de points typiques pour les mesures.

Dans le cas de classes de I_h , cette approche fonctionne plutôt bien et aboutit à toute une série de résultats qui ressemblent furieusement à la théorie hyperbolique des difféos axiome A [Gui25a] : les classes de I_h représentent des classes homoclines (et on verra très bientôt pourquoi ce parallèle est pertinent) et des connexions hétéroclines entre ces classes, lesquelles sont caractérisées par de multiples propriétés, ont des conséquences sur l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ et plus généralement la dynamique rotationnelle. Notons que ce type de comportement est complètement absent de la théorie de la rotation sur le tore, ce qui met en lumière la richesse dynamique du passage en genre supérieur.

Les démonstrations sont basées sur l'application du théorème 20.5, plus précisément ses raffinements énoncés dans [GT25a]. On reparlera de ces stratégies de preuve dans quelques paragraphes.

Cette étude des connexions hétéroclines entre les classes de I_h a des applications plus parlantes aux homéos dont l'ensemble de rotation est « gros », c'est-à-dire tels que $\text{rot}(f)$ engendre $H_1(S, \mathbf{R})$ (au sens espace vectoriel) : dans ce cas, cela permet de bien comprendre la dynamique rotationnelle. Le nombre d'applications dans ce cas particulier illustre la portée de cette théorie « hyperbolique rotationnelle ». Rappelons les quelques cas dans lesquels on avait, jusqu'à ce travail, un idée assez précise de cette dynamique rotationnelle (voir la figure 55).

- L'ensemble des $f \in \text{Homeo}_0(S)$ tels que $\text{int}(\text{rot}_{\text{erg}}(f)) \neq \emptyset$ — cet ensemble est contenu dans celui des homéos avec gros ensemble de rotation et est ouvert dans $\text{Homeo}_0(S)$ (proposition 20.31) — a été étudié dans [GM23] (voir le théorème 19.8). De tels homéos peuvent être considérés comme étant « Anosov du point de vue rotationnel », en particulier ils sont pseudo-Anosov relativement à un ensemble fini invariant par f (voir également [Boy09]).
- L'ensemble des $f \in \text{Homeo}_0(S)$ préservant l'aire et d'entropie nulle est étudié en détail dans l'article en préparation [GLCPT26], où on démontre une classification à la Franks-Handel [FH12, LCT18] (voir le chapitre suivant). Notons que d'après [Lel23], l'ensemble de rotation homologique d'un homéo d'entropie nulle est contenu dans un sous-espace totalement isotrope de $H_1(S, \mathbf{R})$ (pour la forme d'intersection $\wedge$), donc dans un sous-espace vectoriel de dimension $\geq g$.

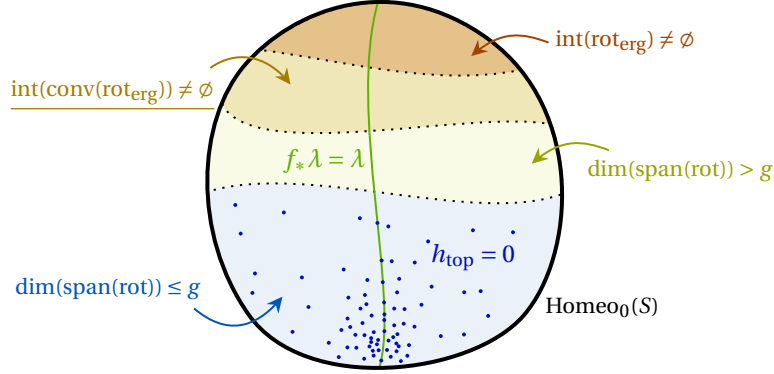


FIGURE 55. Diagramme « à la Palis » de l'espace $\text{Homeo}_0(S)$ d'un point de vue rotationnel. Ici, λ est la mesure de Lebesgue. Notez les inclusions $\{h_{\text{top}} = 0\} \subset \{\dim(\text{span}(\text{rot})) \leq g\}$ et $\{\text{int}(\text{rot}_{\text{erg}}) \neq \emptyset\} \subset \{\text{int}(\text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}})) \neq \emptyset\} \subset \{\dim(\text{span}(\text{rot})) > g\}$. Les points représentent l'ensemble $\{h_{\text{top}} = 0\}$. La section que vous êtes en train de lire traite du cas souligné $\text{int}(\text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}})) \neq \emptyset$.

- L'ensemble des difféos appelés *fitted axiom A* [ABP23] ; cette étude permet à Juan, Joaquim et Alejandro de montrer que sur ouvert dense de $\text{Homeo}_0(S)$, l'ensemble de rotation est l'union d'au plus 2^{5g-3} ensembles convexes contenant 0 (section 20.1).

20.3.1. Homéos à gros ensemble de rotation. — Venons-en aux faits et énonçons les propriétés rotationnelles des homéos à gros ensemble de rotation. Comme partout dans cette partie, S est une surface fermée de genre ≥ 2 . On a parlé des gros ensembles de rotation tout à l'heure, écrivons-le dans une définition officielle.

Définition 20.17. — On dit que $f \in \text{Homeo}_0(S)$ a un *gros ensemble de rotation* si les propriétés équivalentes suivantes sont vraies :

- $\text{int}(\text{conv}(\text{rot}(f))) \neq \emptyset$;
- $\text{int}(\text{conv}(\text{rot}_{\text{erg}}(f))) \neq \emptyset$;
- $\text{int}\{\text{rot}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\} \neq \emptyset$;
- $\text{vect}(\text{rot}(f)) = H_1(S, \mathbf{R})$.

La forme des gros ensembles de rotation. — Tout d'abord, on sait par l'exemple de Matsu-moto (figure 26) que l'ensemble de rotation n'est pas forcément convexe (contrairement au cas du tore). On sait néanmoins que dans ce cas, c'est une union finie de convexes compacts :

Théorème 20.18 ([Gui25b, theorem A]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ dont l'ensemble de rotation est gros. Alors $\text{rot}(f)$ est l'union d'au plus $\max(g, \lfloor g^2/4 \rfloor)$ ensembles convexes compacts ρ'_j contenant 0. Chaque ρ'_j est de la forme

$$\rho'_j = \text{conv}\left(\bigcup_{i \in I_j} \rho_i\right),$$

où I_j est un sous-ensemble de I_h .

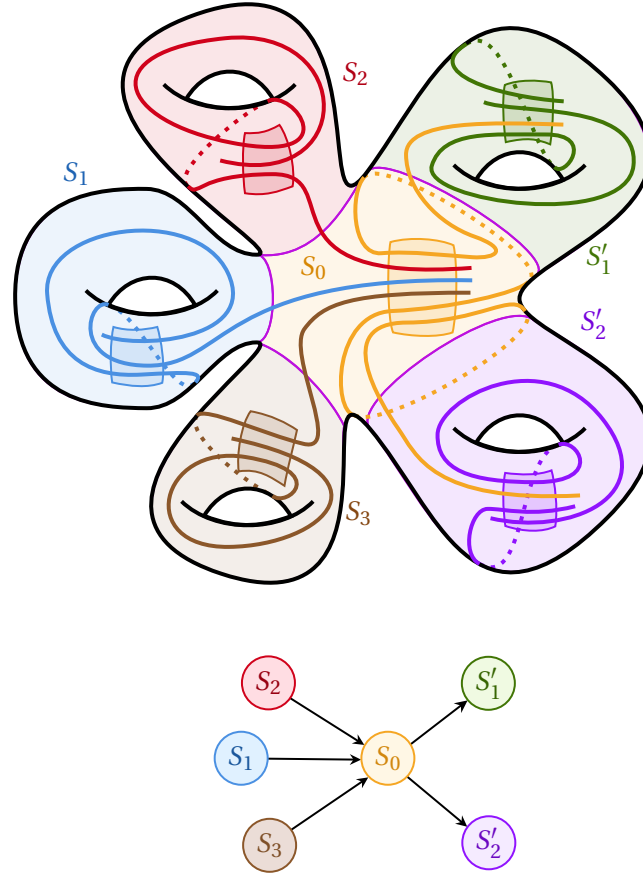


FIGURE 56. Exemple d'homéo avec gros ensemble de rotation qui est l'union de $\lfloor g^2/4 \rfloor$ convexes compacts et pas moins, pour $g = 5$. Sont aussi dessinées les surfaces associées S_i et le graphe $\mathcal{T}$ en-dessous. On a 6 chemins maximaux dans $\mathcal{T}$. Notez que la partie ρ_0 de $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$ associée à S_0 est triviale (comme S_0 n'a pas de genre — c'est une sphère privée de 5 disques —, on a $\iota_*(H_1(S_0, \mathbf{R})) = \{0\}$).

La borne de ce théorème est optimale : pour tout $g \geq 2$ on peut trouver un homéo de la surface fermée de genre g avec gros ensemble de rotation qui est formé de $\max(g, \lfloor g^2/4 \rfloor)$ pièces convexes, et pas moins (voir la figure 56).

Sous des hypothèses supplémentaires, le théorème ci-dessus peut être amélioré :

Théorème 20.19 ([Gui25b, theorem B]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ tel que $\text{int}(\text{rot}(f)) \neq \emptyset$. Alors $\text{rot}(f)$ est convexe.

Plus précisément, si $\text{rot}(f)$ n'est pas inclus dans un hyperplan, ou dans une union de deux sous-espaces vectoriels de codimension 2, alors $\text{rot}(f)$ est convexe et $\text{rot}(f) = \overline{\text{rot}_{\text{erg}}(f)}$.

Notons que la première conclusion prouve que certains ensembles compacts de $\mathbf{R}^{2g}$ ne peuvent pas être réalisés comme l'ensemble de rotation d'un homéo d'une surface de genre g (comme le corollaire 20.15).

La deuxième conséquence est que la même conclusion vaut lorsque f est transitif.

Proposition 20.20 ([Gui25b, proposition C]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ transitif et avec un gros ensemble de rotation. Alors $\text{rot}(f)$ est convexe et $\text{rot}(f) = \overline{\text{rot}_{\text{erg}}(f)}$ (et en particulier $\text{introt}_{\text{erg}}(f) \neq \emptyset$).

La dernière conséquence concerne le cas non errant.

Proposition 20.21 ([Gui25b, proposition D]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ non errant dont l'ensemble de rotation est gros. Alors $\text{rot}(f)$ est l'union d'au plus g ensembles convexes $\rho_1, \dots, \rho_k$, avec $H_1(S, \mathbf{R}) = \bigoplus_i \text{vect}(\rho_i)$.

Cette proposition, combinée à l'exemple de la figure 56, montre en particulier que pour tout $g \geq 5$, il existe un homéo de la surface fermée de genre g dont l'ensemble de rotation (gros) n'est pas l'ensemble de rotation d'un homéo non errant. Cela contraste avec le cas du tore où Alejo et Fabio ont montré que tout ensemble de rotation d'intérieur non vide est l'ensemble de rotation d'un homéo préservant l'aire [GST24]. On peut quand même espérer qu'un résultat identique persiste en genre plus grand sous des hypothèses plus fortes :

Conjecture 20.22. — Tout ensemble de rotation ergodique contenant 0 dans son intérieur est l'ensemble de rotation ergodique d'un homéo préservant l'aire. Est-ce que c'est encore vrai si l'ensemble de rotation ergodique est seulement supposé d'intérieur non vide ?

Revenons au sujet du théorème 20.19, avec en tête la connaissance qu'on a de l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ dans les autres cas décrits sur la figure 55. Dans chacun d'eux, l'ensemble de rotation est une union finie de compacts convexes. Cela étaye la conjecture suivante, qui a été la motivation des travaux [Gui25a, Gui25b] :

Conjecture 20.23. — Il existe une suite $m : \mathbf{N}_{\geq 2} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que, pour toute surface germée S de genre $g \geq 2$ et tout $f \in \text{Homeo}_0(S)$, l'ensemble de rotation $\text{rot}(f)$ est l'union d'au plus m_g compacts convexes contenant 0. De plus, $m_g \leq 2^{5g-5}$.

Bien sûr, si cette conjecture est vraie, on peut se demander quelle est la borne optimale m_g . La constante $5g - 5$ est celle du théorème 18.2 mais, à mon avis, si la conjecture est vraie, elle devrait pouvoir être améliorée substantiellement. Dans tous les cas, la borne optimale m_g ne saurait être inférieure à $2^{\lfloor g/2 \rfloor}$, voir l'exemple [ABP23, section 10.4].

Exercice 20.24. — Améliorer la borne de [ABP23, section 10.4] en construisant un homéo (inspiré un peu de [ABP23, section 10.4]) dont l'ensemble de rotation est l'union de $4^{\lfloor g/3 \rfloor}$ ensembles convexes, et pas moins. Peut-on faire mieux ?

On a réussi à démontrer la conjecture 20.23 pour les homéos à gros ensemble de rotation car dans ce cas il « suffit » de traiter les connexions hétéroclines entre les classes de I_h . Il reste à comprendre si des phénomènes similaires ont lieu pour les autres classes.

Existence d'ouverts f -invariants. — Lorsque l'ensemble de rotation est inclus dans l'union de deux sous-espaces supplémentaires de $H_1(S, \mathbf{R})$, on peut trouver des ouverts f -invariants et deux à deux disjoints.

Proposition 20.25 ([Gui25b, proposition E]). — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ avec gros ensemble de rotation, et supposons qu'il existe des sous-espaces vectoriels $(V_j)_{1 \leq j \leq k}$ de $H_1(S, \mathbf{R})$ tels que $H_1(S, \mathbf{R}) = \bigoplus_j V_j$ et $\text{rot}(f) \subset \bigcup_j V_j$. Alors il existe une famille $B_1, \dots, B_k \subset S$ d'ouverts f -invariants deux à deux disjoints tels que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait $\text{rot}(f|_{B_j}) = V_j \cap \text{rot}(f)$ et que, en notant K le complémentaire de l'union des B_j , on ait $\text{rot}(f|_K) = \{0\}$.

Remarquez que cette proposition peut être appliquée au cas des homéos non errants avec gros ensemble de rotation grâce à la proposition 20.21 : dans ce cas, on obtient $\text{rot}(f|_{B_i}) = \rho_i$.

On peut comparer la proposition 20.25 avec le théorème principal de [GLCPT26] qui affirme également, pour un homéo d'entropie nulle préservant l'aire, l'existence d'une décomposition f -invariante de S en ensembles ouverts dont l'union contient tout le comportement rotationnel de f (on en reparlera bientôt).

Déviations bornées au sens homologique. — Le théorème 20.5 a également des implications sur le problème des déviations bornées par rapport à l'ensemble de rotation homologique :

Théorème 20.26 ([Gui25b, theorem F]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ dont l'ensemble de rotation est gros. Alors les déviations par rapport à $\text{rot}(f)$ sont bornées : il existe $L > 0$ tel que pour tout $x \in S$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a (voir (5) pour la définition de $\Delta_f^n(x)$) :*

$$d(\Delta_f^n(x), n \text{rot}(f)) \leq L.$$

Ce théorème améliore le résultat [Lel23, théorème G] de Gabriel en affaiblissant son hypothèse et en renforçant sa conclusion, résultat de Gabriel qui lui-même améliore un énoncé de Salvador et Bruno [AZdPJ21].

L'hypothèse $\text{int}(\text{conv}(\text{rot}(f))) \neq \emptyset$ est nécessaire car il existe des contre-exemples dus à Koropecski et Tal (théorème 10.13, voir également [GM25, section 7.2]). Cependant, on peut se poser la question suivante :

Problème 20.27. — *Est-il possible d'obtenir des résultats de déviations bornées par rapport à l'ensemble de rotation homologique sous l'hypothèse supplémentaire que l'ensemble des points fixes est non essentiel [KT16, KLCT19] ?*

C'est désormais bien connu des spécialistes : les résultats de déviations bornées impliquent certaines versions de la conjecture de Boyland (voir le théorème 10.19 et les travaux [AZ15b, LCT18, AZdPJ21, Lel23]). Voici ce qu'implique le théorème 20.26 sous nos hypothèses (améliorant [AZdPJ21, theorem 5] et [Lel23, théorème I]) :

Corollaire 20.28 ([Gui25b, corollary G]). — *Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$ préservant une proba borélienne μ de support total. Si f est à gros ensemble de rotation, alors $\rho(\mu) \in \text{int}(\text{conv}(\text{rot}(f)))$.*

Comme dans le cas du tore, cet énoncé est une conséquence d'un résultat de bornitude des déviations pour les mesures dont le vecteur de rotation est sur le bord de l'ensemble de rotation (voir le corollaire 10.25 et son voisinage), et implique un résultat de réalisation des points exposés de l'ensemble de rotation par des compacts (théorème 18.8).

Continuité des ensembles de rotation. — Un point de vue qu'on n'a pas encore adopté dans cette partie est celui de voir $\text{rot}, \overline{\text{rot}}_{\text{erg}}, \text{rot}_{\text{mes}}$ comme des applications $\text{Homeo}_0(S) \rightarrow \mathcal{K}(H_1(S, \mathbb{R}))$, où $\mathcal{K}(H_1(S, \mathbb{R}))$ désigne l'ensemble des compacts de $H_1(S, \mathbb{R})$ muni de la distance de Hausdorff. Rappelons que pour le tore, l'intérieur de l'ensemble de rotation est continu en l'homéo (proposition 12.1). Une première remarque est que la semi-continuité supérieure de l'application $f \mapsto \mathcal{M}(f)$ entraîne directement le lemme suivant :

Lemme 20.29. — *La fonction $f \mapsto \text{rot}_{\text{mes}}(f)$ est semi-continue supérieurement pour la topologie de Hausdorff.*

Autrement dit, $\overline{\lim_{g \rightarrow f} \text{rot}_{\text{mes}}(g)} \subset \text{rot}_{\text{mes}}(f)$: l'ensemble de rotation des mesures ne peut pas exploser localement. On ne peut pas espérer beaucoup plus en général, comme le montre l'exemple suivant :

Enoncer
le résultat
de réalisation
des extrémaux
par des
compacts

Lemme 20.30 ([Gui25b, lemma 6.4]). — *Les applications $f \mapsto \overline{\text{rot}_{\text{erg}}(f)}$ et $f \mapsto \text{rot}(f)$ ne sont pas semi-continues supérieurement, même en restriction aux homéos avec un gros ensemble de rotation.*

L'exemple qui permet de démontrer ce lemme est celui de Matsumoto (voir la figure 26) : c'est un homéo f de la surface de genre 2 dont l'ensemble de rotation est l'union de deux convexes, chacun de dimension 2, dont l'intersection est réduite à $\{0\}$. On trouve alors (voir la figure 47 page 111) une suite d'homéos $(f_n)_n$ tendant vers f , telles que $\text{rot}_{\text{erg}}(f_n)$ soit égal à $\text{conv}(\text{rot}(f))$ (en pratique, pour éviter que la preuve ne soit trop technique, on se contente de montrer que $\text{rot}_{\text{erg}}(f_n)$ contient un ouvert non vide indépendant de n). On peut également produire une suite d'homéos $(g_n)_n$ tendant vers f , telles que $\text{rot}_{\text{erg}}(g_n) = \text{rot}_{\text{erg}}(f)$ mais $\text{rot}(g_n) = \text{conv}(\text{rot}(f))$ (voir la figure 57).

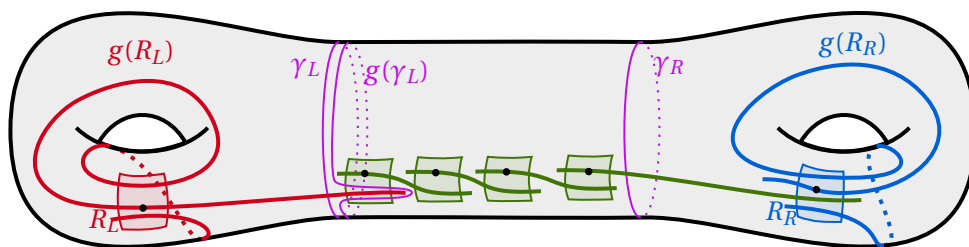


FIGURE 57. Un homéo g proche de l'exemple de Matsumoto f tel que $\text{rot}(g) = \text{conv}(\text{rot}(f))$.

On a cependant une version en genre supérieur de la continuité (voir la proposition 12.1) de la fonction $f \mapsto \text{rot}(f)$ en tout homéo de tore dont l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide.

Proposition 20.31 ([Gui25b, proposition 6.3]). — *Pour tout $\Xi \in \{\text{rot}, \text{rot}_{\text{mes}}, \overline{\text{rot}_{\text{erg}}}\}$, l'application $f \mapsto \Xi(f)$ est continue (pour la topologie de Hausdorff) en tout homéo f tel que $\text{int } \Xi(f) \neq \emptyset$.*

Cette proposition est une conséquence de la structure hyperbolique établie dans [Gui25a] dont on va parler dans quelques lignes.

On peut chercher des propriétés plus fines de régularité de l'ensemble de rotation, comme par exemple :

Problème 20.32. — *Étudier les familles à 1 paramètre génériques :*

1. Les résultats [AZLC18, AZ20] de Salvador et Patrice peuvent-ils être facilement généralisés au genre supérieur ?
2. A-t-on un phénomène d'« escalier du diable » ou « mode locking » pour les applications $\text{rot}, \text{rot}_{\text{mes}}, \overline{\text{rot}_{\text{erg}}}$: en une famille à un paramètre générique, est-ce que ces applications sont constantes sur un ouvert dense (pour le cas du cercle, voir par exemple [Bru74]) ?
3. Ces applications sont-elles hölderiennes sur une famille à un paramètre générique ?

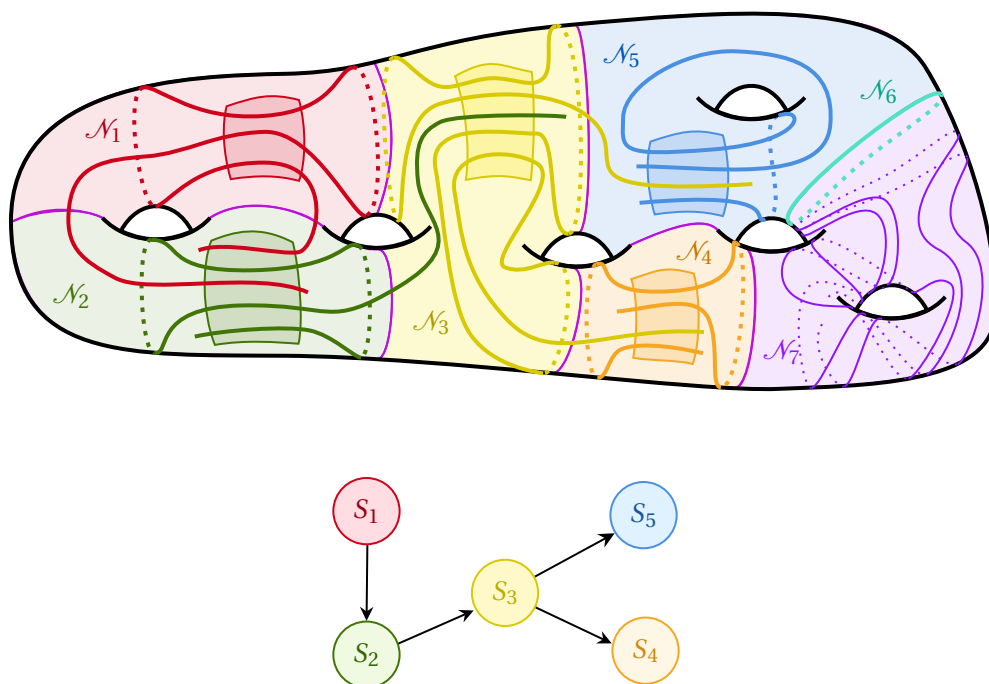


FIGURE 58. Exemple des classes $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ d'un homéo d'une surface fermée de genre 6, et graphe $\mathcal{T}$ associé. Les classes $(\mathcal{N}_i)_{1 \leq i \leq 5}$ appartiennent à I_h , tandis que les classes $\mathcal{N}_6$ et $\mathcal{N}_7$ appartiennent à I^1 . La lamination géodésique $\dot{\Lambda}_6$ est constituée d'une seule géodésique fermée, tandis que $\dot{\Lambda}_7$ est une lamination géodésique minimale sans feuille fermée.

Une dernière remarque : la définition (30) du *kicked Harper model* induit des homéos sur toutes les surfaces à petits carreaux, en particulier celles de genre au moins 2.

Problème 20.33. — Étudier les ensembles de rotation des homéos induits par le *kicked Harper model* de la section 7.2.2 mais pour des surfaces à petits carreaux; en particulier généraliser les résultats de [JKT21].

Plus généralement, que dire des familles à paramètres naturelles (voir [Gra91] pour le cas du cercle)?

Ces parties sont denses, faire une relecture!

20.3.2. Une théorie hyperbolique rotationnelle. — Donnons quelques idées de l'origine des résultats de la sous-section précédente. On a dit plus haut que les classes de I_h peuvent être assimilées à des classes homoclines, commençons par expliquer pourquoi.

Dans [Gui25a, section 4.1], on définit un graphe orienté infini G associé à tout⁽¹⁾ $f \in \text{Homeo}_0(S)$ de la manière suivante. Ses sommets sont des rectangles $(R_\omega)_\omega$ de $\tilde{S}$ tel que chaque R_ω est un fer à cheval rotationnel associé à l'automorphisme de revêtement T_ω pour f^{q_ω} (voir la définition 16.23). On notera $r_\omega = [T_\omega]/q_\omega$ le vecteur de rotation homologique associé. On met une arête orientée entre R_ω et $R_{\omega'}$ dans G s'il existe un automorphisme de revêtement T et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que l'intersection $\tilde{f}^n(R_\omega) \cap T R_{\omega'}$ soit markovienne (définition 16.18); on note alors $R_\omega \rightarrow R_{\omega'}$.

⁽¹⁾Et pas seulement ceux à gros ensemble de rotation.

Dans [Gui25a, section 4.1], on montre que le théorème 17.18 implique qu'on peut choisir la famille $(R_\omega)_\omega$ dénombrable telle que les vecteurs de rotation homologiques $(r_\omega)_\omega$ associés aux fers à cheval soient denses dans $\bigcup_{i \in I_h} \rho_i$. De plus, à chaque rectangle R_ω on peut associer une classe $i \in I_h$ par la condition : « l'axe de l'automorphisme de revêtement T_ω est une géodésique de Λ_i ». On montre alors qu'il y a bijection entre I_h et les composantes fortement récurrentes⁽²⁾ de G par l'application qui à $i \in I_h$ associe l'ensemble des sommets R_ω de G associés à i [Gui25a, proposition 4.18].

On peut alors identifier tous les sommets de chacune de ces composantes fortement récurrentes pour obtenir un graphe orienté $\mathcal{T}$ dont les sommets sont les classes $\mathcal{N}_i$ pour $i \in I_h$ (ou, de manière équivalente, les éléments de I_h , ou même, si on préfère, les surfaces S_i pour $i \in I_h$), et dont on note $\xrightarrow{M}$ les arêtes (voir les figures 56, 58 et 59). Si $\mathcal{N}_i \xrightarrow{M} \mathcal{N}_j$, on dit qu'on a une *connexion hétérocline* de la classe $\mathcal{N}_i$ vers la classe $\mathcal{N}_j$. Cela justifie l'appellation alternative des classes de I_h en « pièces » permettant de décomposer la dynamique rotationnelle.

Il y a d'autres relations qui sont naturellement définies sur les classes. La première définition exprime qu'il existe des segments d'orbites s'approchant d'une mesure de $\mathcal{N}_i$ dans le passé et d'une mesure de $\mathcal{N}_j$ dans le futur.

Définition 20.34. — Si $\mu_1, \mu_2 \in \bigcup_{i \in I_h} \mathcal{N}_i$, on note $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ s'il existe $(x_k) \in S^{\mathbb{N}}$ et quatre suites de temps $n_k^{1,-} < n_k^{1,+} < n_k^{2,-} < n_k^{2,+}$ avec $\lim_k n_k^{1,+} - n_k^{1,-} = \lim_k n_k^{2,+} - n_k^{2,-} = +\infty$ et telles que

$$(39) \quad \frac{1}{n_k^{1,+} - n_k^{1,-}} \sum_{i=n_k^{1,-}}^{n_k^{1,+}-1} \delta_{f^i(x_k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n_k^{2,+} - n_k^{2,-}} \sum_{i=n_k^{2,-}}^{n_k^{2,+}-1} \delta_{f^i(x_k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu_2$$

(pour la topologie faible-*).

Si $i, j \in I_h$, on note $\mathcal{N}_i \xrightarrow{*} \mathcal{N}_j$ s'il existe $\mu_1 \in \mathcal{N}_i$ et $\mu_2 \in \mathcal{N}_j$ telles que $\mu_1 \rightarrow \mu_2$.

La seconde définition s'exprime en termes d'intersections de lacets essentiels :

Définition 20.35. — Pour $i, j \in I_h$, on écrit $\mathcal{N}_i \xrightarrow{\wedge} \mathcal{N}_j$ si, pour tous lacets essentiels α_i, α_j de S tels que $[\alpha_i] \in \pi_1(S_i)$ et $[\alpha_j] \in \pi_1(S_j)$ (les classes d'homotopie libre), il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(\alpha_i) \cap \alpha_j \neq \emptyset$.

La troisième relation concerne les intersections d'ensembles essentiels ouverts.

Définition 20.36. — Pour $i, j \in I_h$, on écrit $\mathcal{N}_i \xrightarrow{O} \mathcal{N}_j$ si, pour tous les ouverts B_i^-, B_j^+ de S tels que :

- pour tout $\mu \in \mathcal{N}_i$ et tout $\mu' \in \mathcal{N}_j$, on a $\mu(B_i^-) = \mu'(B_j^+) = 1$;
- $f^{-1}(B_i^-) \subset B_i^-$ et $f(B_j^+) \subset B_j^+$;
- $i_*\pi_1(S_i) \subset i_*\pi_1(B_i^-)$ et $i_*\pi_1(S_j) \subset i_*\pi_1(B_j^+)$;

il existe $n \geq 0$ tel que $f^n(B_i^-) \cap B_j^+ \neq \emptyset$.

Enfin, il y a une relation $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ définie en termes d'intersections $\mathcal{F}$ -transverses au sens de Le Calvez-Tal (Definition ??).

Le faire

Un des résultats principaux de [Gui25a] est que ces relations coïncident :

Théorème 20.37 ([Gui25a, theorem B]). — Pour tout $f \in \text{Homeo}_0(S)$, les cinq relations $\xrightarrow{\mathcal{F}}$, $\xrightarrow{*}$, $\xrightarrow{M}$, $\xrightarrow{\wedge}$ et $\xrightarrow{O}$ sur les classes $\mathcal{N}_i$ de I_h coïncident et sont des relations d'ordre.

⁽²⁾Dans un graphe orienté G , une composante fortement récurrente est une classe d'équivalence pour la relation « a est équivalent à b si et seulement s'il existe un chemin de a à b et un chemin de b à a ».

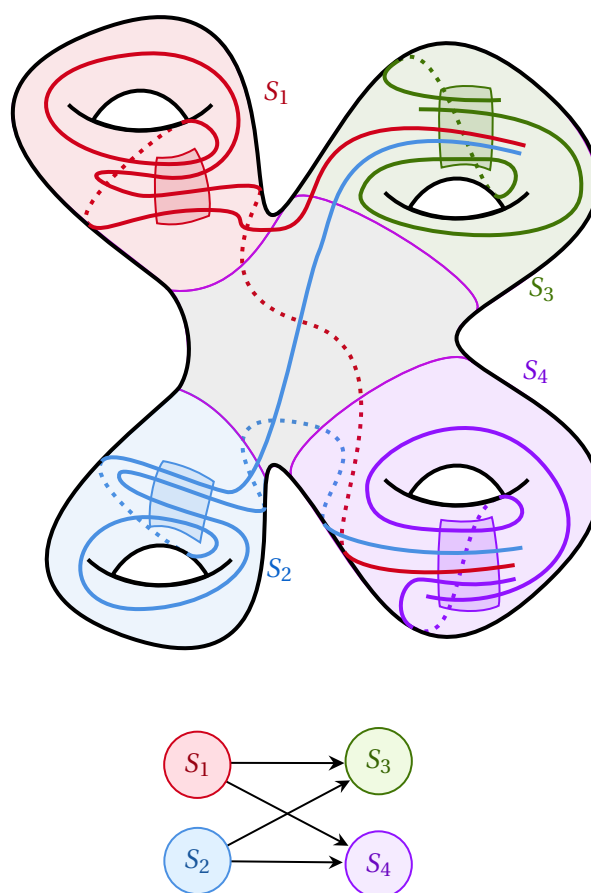


FIGURE 59. Exemple d'homéo d'une surface de genre 4 ayant 5 classes $\mathcal{N}_i$ pour $i \in I_h$, et certains fers à cheval dans ces classes, avec le graphe $\mathcal{T}$ qui lui est associé (en bas). Les images des rectangles sont représentées par des lignes épaisses, on suppose que toutes les intersections représentées sont markoviennes.

Dans ce cas, l'ensemble de rotation ergodique de f est l'union de 4 pièces de dimension 2 (leurs adhérences sont convexes) et l'ensemble de rotation de f est l'union de 4 convexes, chacun de dimension 4. Le graphe orienté $\mathcal{T}$ n'a pas de boucle orientée mais n'est pas pour autant un arbre.

En particulier, $\xrightarrow{M}$ est une relation d'ordre et on n'a donc pas de boucle orientée dans $\mathcal{T}$ (ce qui ne signifie pas que c'est un arbre, voir la figure 59).

C'est la preuve de ce théorème qui est basée sur le théorème 20.5, ou plutôt ses raffinements (voir [GT25a]). Voilà un exemple de preuve d'implication : si $\mu_1 \xrightarrow{*} \mu_2$, avec $\mu_1 \in \mathcal{N}_i$ et $\mu_2 \in \mathcal{N}_j$, $i, j \in I_h$, on choisit une géodésique fermée γ_i de Λ_i et une géodésique fermée γ_j de Λ_j telles que $\rho_f(\mu_1) \wedge [\gamma_i] \neq 0$ et $\rho_f(\mu_2) \wedge [\gamma_j] \neq 0$ (leur existence est assurée par le théorème 17.18, encore lui!). On applique alors [GT25a, proposition 4.7] qui assure l'existence d'une trajectoire $\mathcal{F}$ -transverse avec deux auto-intersections transverses successives comme à la gauche de la figure 60 : la première courbe fermée dessinée est dans la classe d'homotopie libre d'une géodésique fermée de Λ_i , et la seconde dans la classe d'homotopie libre d'une géodésique fermée de Λ_j . [Gui25a, theorem 3.11] assure alors que cela implique l'existence de fers à cheval rotationnels ayant une connexion hétérocline comme à la droite de la figure 60. Ainsi, on a



Enoncer
ce theo-
reme dans
l'annexe A

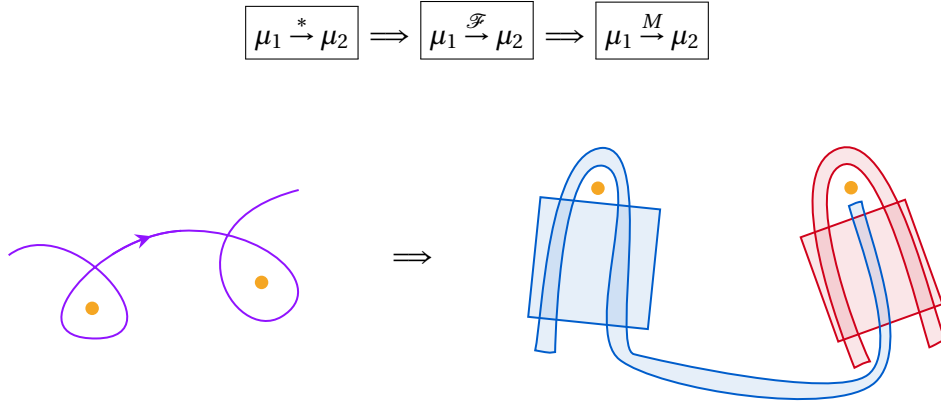


FIGURE 60. Idée de l'énoncé de [Gui25a, theorem 3.11] : s'il existe une trajectoire sous l'isotopie comme celle de gauche dans l'espace des feuilles, alors il existe deux fers à cheval rotationnels pour f ayant une connexion hétérocline.

On montre ensuite (et c'est élémentaire à partir du théorème 20.37) que s'il y a un chemin $\mathcal{N}_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{N}_{i_k}$ dans le graphe $\mathcal{T}$, alors [Gui25a, corollary 4.22]

$$(40) \quad \text{conv}(\overline{\rho_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{\rho_{i_k}}) \subset \rho(f).$$

L'existence de cette « trame » G de fers à cheval rotationnels dont les vecteurs de rotation remplissent les ensembles ρ_i pour $i \in I_h$ amène au résultat de réalisation suivant :

Proposition 20.38. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Alors :

1. Pour tout $i \in I_h$ et tout $r \in \overline{\rho_i}$, il existe $x \in S$, tel que $\rho_f(x) = r$.
2. Si $r \in \text{int}(\rho_i)$ (l'intérieur est pris dans le sous-espace vectoriel engendré par le convexe), alors il existe un compact f -invariant $K_r \subset S$ et $L_r > 0$ tels que pour tout $x \in K_r$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\Delta_f^n(x), n\rho_i) \leq L_r.$$

3. Si $C \subset \text{int}(\rho_i)$ est un compact connexe, alors il existe $x \in S$ tel que $\rho(x) = C$.

Comparer
aux résultats dans le
tore

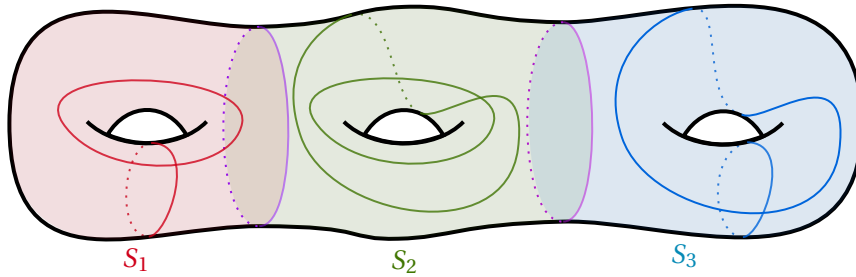


FIGURE 61. Exemple de surface de genre 3 portant un homéo avec gros ensemble de rotation, et surfaces S_i associées. Pour chacune de ces surfaces S_i on peut trouver une ensemble fini de géodésiques traçantes de Λ_i qui découpent S_i en disques topologiques et anneaux essentiels séparant S .

Application aux homéos à gros ensemble de rotation. — Donnons des éléments de preuve des résultats de la sous-section ??, qui sont obtenus à l'aide des outils qu'on vient de construire. Lorsque f a un gros ensemble de rotation, un peu de calcul symplectique dans $(H_1(S, \mathbf{R}), \wedge)$ montre que $H_1(S, \mathbf{R}) = \bigoplus_{i \in I_h} \text{vect}(\rho_i)$: s'il existait $r \in \rho_i \setminus \{0\}$ pour un $i \in I^1$, alors on aurait $\text{rot}(f) \in r^\perp$. En travaillant un tout petit peu plus, on voit que les surfaces S_i , pour $i \in I_h$, ont leur union dense dans S et leurs composantes de bord qui sont des géodésiques fermées séparantes. Il peut y avoir des classes de I_{fer} (celles dont la géodésique traçante est une de ces composantes de bord) mais pas de classe de I_{min} ; la rotation homologique des mesures de I_{fer} est triviale.

On en déduit qu'il existe un nombre fini de géodésiques traçantes pour des mesures de I_h qui séparent la surface S en une union de disques bornés et d'anneaux qui sont homologiquement triviaux (ils ont le type d'homotopie d'un lacet séparant essentiel), voir la figure 61. La rotation homologique peut donc être calculée en fonction du nombre d'intersection avec ces géodésiques. En appliquant de nouveau [GT25a, proposition 4.7] on en déduit deux choses :

- il n'y a pas de vecteur de rotation en dehors de $\text{conv}(\{\overline{\rho_i}\}_{i \in I_h})$;
- si un vecteur de rotation $r \in \text{rot}(f)$ se décompose selon $r = \sum_{i \in I_h} r_i$, avec $r_i \in V_i$ (rappelons que $V_i = \text{vect}(\rho_i)$, et qu'on vient de voir que ces espaces sont en somme directe), et si $I_r = \{i \in I_h \mid r_i \neq 0\}$, alors il existe un chemin dans $\mathcal{T}$ passant par tous les $\mathcal{N}_i$ pour $i \in I_r$.

Ces faits impliquent que dans le cas d'un homéo à gros ensemble de rotation, l'inclusion (40) devient une égalité :

$$(41) \quad \text{rot}(f) = \bigcup_{p \text{ chemin de } \mathcal{T}} \text{conv}(\{\overline{\rho_i}\}_{i \in p}).$$

Cette égalité amène facilement théorème 20.18 : il suffit alors de compter le nombre de chemins *maximaux* (qu'on ne peut pas prolonger) dans $\mathcal{T}$.

Exercice 20.39. — À l'aide du théorème 20.37 et de l'équation 41, montrer le théorème 20.19 et les corollaires 20.20 et 20.21.

Exercice 20.40. — Répondre positivement à la question 7.2 dans les cas des homéos à gros ensemble de rotation.

CHAPITRE 21

CLASSIFICATION DES HOMÉOS CONSERVATIFS D'ENTROPIE NULLE

21.1. Deux exemples paradigmatiques

Commençons par décrire en détail deux exemples de temps 1 de flots sur des surfaces.

Le pendule simple. — Le premier est le temps 1 du flot du pendule simple. Sur la figure 62 il est représenté dans $\mathbf{R}^2$ mais le tout étant (bien sûr) invariant par la variable d'angle, on peut quotienter par $2\pi\mathbf{Z} \times \{0\}$ pour obtenir un flot sur l'anneau ouvert $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$. Enfin, on peut compactifier chacun des bouts de cet anneau pour obtenir une sphère, sur laquelle le flot se prolonge par deux points d'équilibre.

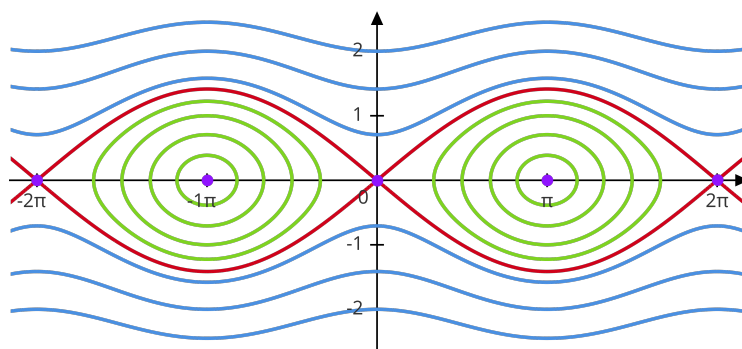


FIGURE 62. Le portrait de phase du pendule simple. Les points violets sont fixes et les orbites rouges homoclines aux points fixes. L'abscisse est l'angle du pendule avec la verticale, l'ordonnée sa vitesse de rotation.

On a plusieurs types d'orbites pour ce flot. Il y a les points d'équilibre, un stable $(\pi, 0)$ qui correspond à la position du pendule au repos, et un instable $(0, 0)$ qui correspond à un pendule immobile dirigé vers le haut. Il y a ensuite les orbites périodiques dans $\mathbf{R}^2$, qui correspondent à des oscillations du pendule. Ces orbites — en vert sur la figure 62 — sont inessentiels dans l'anneau $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$. Il y a aussi les orbites non bornées dans $\mathbf{R}^2$ (en bleu), qui représentent les trajectoires d'un pendule lancé par une expérimentatrice sous stéroïdes qui tourne toujours à vitesse angulaire soit strictement positive (en haut de la figure), soit strictement négative (en bas). Ces trajectoires deviennent périodiques dans l'anneau $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$, elles sont alors essentielles. Enfin, il y a les orbites hétéroclines, qui vont d'un point d'équilibre instable à un autre, en rouge sur le dessin.

On voit que dans l'anneau $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ comme dans sa compactification en sphère, les trajectoires se regroupent en familles : la famille des trajectoires vertes dans la figure 62 qui forme

un anneau, deux familles de trajectoires bleues qui elles aussi forment des anneaux, et des unions de points d'équilibre et de trajectoires hétéroclines, aussi appelées séparatrices. Ces ensembles, invariants par le flot, sont bien sûr également invariants par son temps 1. Chaque anneau est de plus feuilleté par les orbites qui sont toutes essentielles dans cet anneau; sur chaque cercle de ce feuilletage le nombre de rotation est bien défini et constant, on peut même voir ces cercles comme des fibres du nombre de rotation.

Des flots linéaires reparamétrisés. — Le deuxième exemple est construit à partir d'un flot linéaire reparamétrisé sur le tore (voir la figure 63).

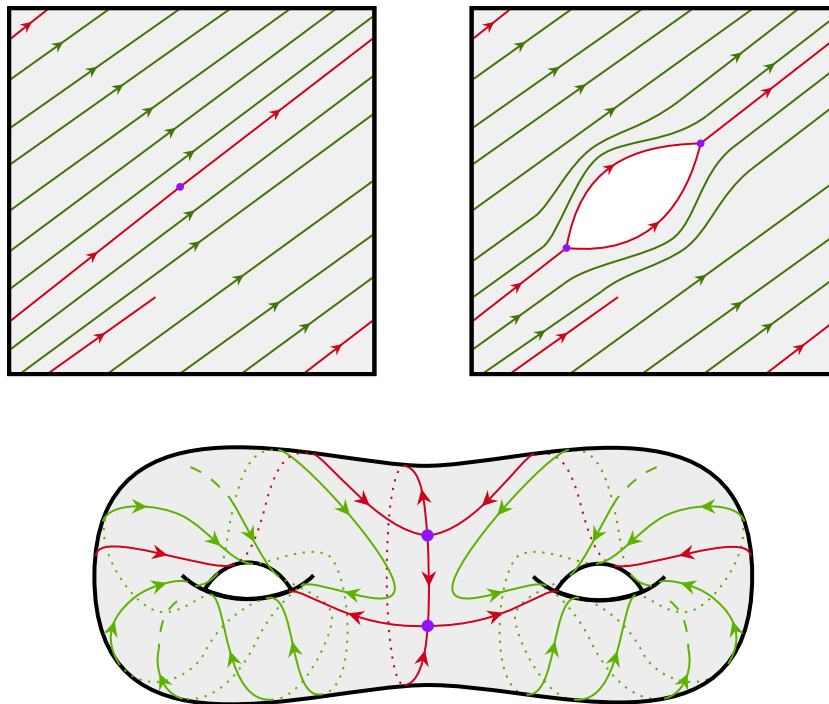


FIGURE 63. Un flot irrationnel sur le tore avec un point d'arrêt (en haut à gauche, voir aussi la figure 10), une modification de cet exemple pour obtenir un flot sur le tore privé d'un disque ayant des propriétés similaires (en haut à droite), et un flot sur la surface de genre 2 obtenu en collant ensemble (le long du bord du disque) deux copies de ce dernier exemple (en bas). Les points violets sont fixes et les orbites rouges tendent vers un point fixe soit dans le futur, soit dans le passé.

On commence par considérer un flot irrationnel sur le tore avec un point d'arrêt, comme on l'a déjà vu???? (en haut à gauche de la figure 63). On peut alors éclater le point fixe de ce flot pour obtenir un flot semi-conjugué au précédent sur le tore privé d'un disque ouvert (en haut à droite de la figure) : on y remplace le point fixe par l'union de deux points fixes et de deux orbites hétéroclines à ces points fixes. On peut enfin recoller le long de leur bord deux copies T_1 et T_2 de ce tore privé d'un disque, pour obtenir un flot sur la surface de genre 2. Ce flot comporte deux composantes *quasi-minimales*, qui sont les intérieurs de T_1 et T_2 : dans ces ensembles, chaque orbite complète est dense; à part un nombre fini d'entre-elles (en rouge sur la figure), toutes les demi-orbites (à la fois au futur et au passé) sont denses, et ces orbites rouges exceptionnelles sont exactement les variétés stables/instables de points

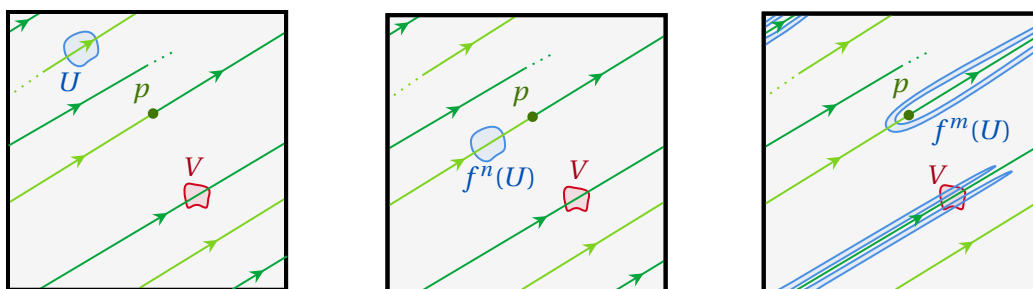


FIGURE 64. Les flot linéaires irrationnels avec un point d'arrêt sur le tore sont topologiquement mélangeants : on considère une intersection de la ligne de flot ayant pour ω -limite p avec U , et une intersection de la ligne de flot ayant pour α -limite p avec V ; pour m assez grand les itérés $f^m(U)$ se retrouvent bloqués par le point d'équilibre p .

fixes du flot (et il n'y a pas de connexion homocline ou hétérocline dans les intérieurs de T_1 et T_2).

Un argument géométrique permet de montrer que les ensembles T_1 et T_2 sont topologiquement mélangeants pour le flot (voir la figure 64).

Exercice 21.1. — Dédurre de la figure 64 une preuve formelle du mélange topologique.

Les orbites incluses dans de T_i (pour $i = 1, 2$) forment un feuilletage de T_i dont chaque feuille reste à distance bornée d'une géodésique de S . Les orbites non exceptionnelles vertes sont même à distance de Hausdorff bornée d'une unique géodésique. On peut réunir les orbites exceptionnelles rouges et les points fixes pour former des feuilles exceptionnelles, qui elles restent à distance de Hausdorff bornée d'une union finie de géodésiques de S (en l'occurrence, de deux feuilles formant des composantes de bord d'une couronne, voir page 70). L'union de toutes les géodésiques qu'on vient de décrire forme une lamination géodésique minimale et orientable Λ_i , telle que la surface engendrée (définie exactement comme S_i à la section 18.3) soit homotope dans S à T_i .

Exercice 21.2. — Utiliser le disque de Koropec-Tal (sous-section 10.2.3 et [GM25, section 7.2]) pour modifier l'exemple précédent en un exemple de flot sur une surface S de genre 2 avec des orbites qui suivent à distance sous-linéaire une lamination géodésique minimale remplissant une sous-surface S_1 de genre 1, mais avec déviations non bornées orthogonalement à cette lamination.

Un peu plus technique : s'assurer qu'on peut choisir ce flot avec un ensemble de rotation non trivial et inclus dans $H_1(S_1, \mathbf{R})$ (indication : il faut jouer entre la vitesse d'arrêt au point fixe — autrement dit au voisinage du cercle bordant la surface — et un homéo de la surface à bord « éloignant » les points du bord).

Citer le
bouquin
Nikolaev
Zhuzhoma

21.2. Énoncés

Dans une prépublication restée en l'état et daté de 1896 [Han86], Michael Handel a énoncé que tout homéo de surface fermée et d'entropie nulle doit avoir une décomposition canonique en pièces qui ressemblent à celles décrites à la section précédente. Les preuves sont parcellaires et il faudra 25 ans et l'aide de John Franks pour obtenir une preuve rigoureuse de cette affirmation, dans le cas de la sphère, préservant l'aire, et pour les C^∞ -difféos

[FH12]. Ce théorème a été amélioré par Patrice et Fabio dans leur premier papier [LCT18], où ils relaxent l'hypothèse de régularité en homéo, l'hypothèse de préservation de l'aire en non errant et l'hypothèse de nullité de l'entropie en l'absence de fer à cheval :

Théorème 21.3 ([LCT18, theorem M]). — Soit $f \in \text{Homeo}_+(\mathbf{S}^2)$ un homéo (préservant l'orientation) sans fer à cheval topologique et non errant. Il existe alors une famille $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_f}$ de sous-ensembles ouverts de S tels que :

- tout ouvert A_α est f -invariant;
- la famille $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_f}$ est constituée d'ensembles deux à deux disjoints;
- les ensembles A_α sont des anneaux ouverts, sans point fixe et maximaux (pour l'inclusion) parmi ceux ayant ces propriétés;
- l'ensemble

$$O := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_f} A_\alpha$$

contient tous les points récurrents non fixes (et est donc dense dans $S \setminus \text{Fix}(f)$) et tout $z \in S \setminus O$ satisfait $\alpha(z) \cup \omega(z) \subset \text{Fix}(f)$.

Autrement dit, on retrouve une famille d'anneaux invariants comme dans le cas de l'exemple du pendule simple. Notons que dans ce cas le théorème donne une décomposition plus fine que celle décrite à la fin de l'exemple du pendule simple : les anneaux A_α sont sans point fixe pour f , tandis que les anneaux essentiels formés des trajectoires bleues de la figure 62 incluent des orbites fixes pour le temps 1 du flot (les orbites qui font un nombre entier de tours complets en temps 1).

Patrice et Fabio ont démontré un résultat un peu plus faible qui décrit l'ensemble non errant des homéos de la sphère [LCT22, theorem G] : cet ensemble est là aussi recouvert par des anneaux invariants sans points fixes maximaux, mais ceux-ci ne sont pas nécessairement deux à deux disjoints.

Dans un travail en cours avec Patrice, Alejandro et Fabio, on généralise le théorème 21.3 à toutes les surfaces, sous l'hypothèse plus forte de préservation de l'aire. Commençons par une définition.

Définition 21.4. — Un ensemble *homotopiquement irréductible* est un ouvert $W \subset S$ non vide, connexe, f -invariant et qui satisfait : pour tout ouvert $W' \subset W$ non vide, connexe et f -invariant, et tout $z \in W'$, on a $\iota_*(\pi_1(W', z)) = \iota_*(\pi_1(W, z))$, où ι désigne l'inclusion dans S .

Théorème 21.5 ([GLCPT26]). — Soit S une surface fermée (donc potentiellement $S = \mathbf{S}^2$ ou $S = \mathbf{T}^2$) et $f \in \text{Homeo}_\lambda(S)$ un homéo sans fer à cheval topologique, préservant l'orientation et avec au moins un point fixe, où λ désigne une mesure d'aire. Il existe alors deux familles $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_f}$ et $(B_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{B}_f}$ de sous-ensembles ouverts de S (des « pièces ») tels que :

- tout ouvert A_α ou $B_{\alpha'}$ est f -invariant;
- la famille $((A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_f}, (B_{\alpha'})_{\alpha' \in \mathcal{B}_f})$ est constituée d'ensembles deux à deux disjoints;
- les ensembles A_α et $B_{\alpha'}$ sont les ensembles ouverts homotopiquement irréductibles, invariants par f et sans point fixe, maximaux (pour l'inclusion) parmi ceux ayant ces propriétés;
- les ensembles A_α sont des anneaux ouverts;
- tout ensemble $B_{\alpha'}$ est connexe, topologiquement mélangeant et a un genre positif (et en particulier, le cardinal de $\mathcal{B}_f$ est bornée par le genre de S);

– l'ensemble

$$O := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_f} A_\alpha \cup \bigcup_{\alpha' \in \mathcal{B}_f} B_{\alpha'}$$

contient tous les points récurrents non fixes (et est donc dense dans $S \setminus \text{Fix}(f)$) et tout $z \in S \setminus O$ satisfait $\alpha(z) \cup \omega(z) \subset \text{Fix}(f)$.

On voit donc non seulement apparaître des anneaux comme dans le cas de la sphère (théorème 21.3), mais aussi des ensembles topologiquement mélangeants comme décrits dans l'exemple basé sur des flots linéaires reparamétrisés.

Plusieurs remarques à propos de cet énoncé.

Entropie et fers à cheval. — L'hypothèse « entropie nulle » de l'énoncé de Franks et Handel est devenue « sans fer à cheval topologique » dans les théorèmes 21.3 et 21.5. C'est bien sûr une hypothèse plus faible (voir la proposition ??), et même strictement plus faible, puisqu'il existe des homéos de surface d'entropie positive et sans fer à cheval (voir⁽¹⁾ [BCLR07, proposition C2], qui utilise la technique de Denjoy-Rees [Ree81]), auxquels peuvent donc être appliqués les théorèmes 21.3 et 21.5. Notons que cette différence n'existe plus dès qu'on suppose suffisamment de régularité par le théorème de Katok [Kat80].

Les cas non homotope à l'identité. — Remarquons qu'on ne suppose pas que l'homéo f est homotope à l'identité, on demande juste qu'il préserve l'orientation. Dans le cadre du théorème 21.3 (pour la sphère), ça revient au même; en revanche toute surface fermée de genre ≥ 1 porte par exemple des twists de Dehn (voir page 119). La classification de Nielsen-Thurston implique même que tout homéo préservant l'orientation et sans fer à cheval topologique est homotope soit à l'identité, soit à un produit fini de puissances de twists de Dehn sur des anneaux fermés essentiels $(A_i^*)_i$ deux à deux disjoints. Dans ce dernier cas, on a l'existence d'un anneau dans chacune des directions des twists :

Théorème 21.6 ([GLCPT26]). — *Supposons que f est un homéo de S non errant, sans fer à cheval topologique et homotope à un produit fini de puissances de twists de Dehn sur des anneaux fermés essentiels $(A_i^*)_{1 \leq i \leq r}$ deux à deux disjoints. Alors il existe une famille finie d'anneaux ouverts f -invariants $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$, deux à deux disjoints, tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les anneaux A_i et $\text{int}(A_i^*)$ soient homotopes.*

Autrement dit, dès que f est non errant et sans fer à cheval, f possède des anneaux invariants similaires à ceux de son modèle de Nielsen-Thurston « canonique ».

L'existence de points fixes. — L'énoncé requiert que l'homéo f possède au moins un point fixe. Par la formule de Lefschetz, cette propriété est automatique dès que S est la sphère ou une surface fermée de genre ≥ 2 : elle ne peut être fausse que pour le tore. Dans ce dernier cas, si aucun itéré de l'homéo ne possède de point fixe non plus (autrement dit si l'homéo est sans point périodique), l'homéo est appelé *pseudo-rotation irrationnelle* et sa dynamique a déjà été étudiée dans de nombreux travaux, voir par exemple le cours de Sylvain [Cro06].

L'hypothèse de préservation de l'aire. — AAh

⁽¹⁾Cette proposition donne un homéo de la sphère d'entropie positive sans fer à cheval et conjuguée à une rotation irrationnelle au voisinage des pôles, on peut alors modifier cette construction pour obtenir un homéo de l'anneau fermé, valant l'identité au bord, d'entropie positive et sans fer à cheval. Cet exemple peut alors être plongé dans n'importe quelle surface.

Lien avec la décomposition de l'ensemble de rotation ergodique. — Les décompositions des théorèmes 18.2 et 21.5 sont en fait intimement liées, comme le montre le résultat suivant. Rappelons que sous les hypothèses du théorème 21.5, l'ensemble traçant est une lamination géodésique, et donc $I_h = \emptyset$.

Def point typique

Proposition 21.7. — *Soit $f \in \text{Homeo}_\lambda(S)$ un homéo sans fer à cheval topologique, préservant l'orientation et avec au moins un point fixe. Alors il y a bijection entre :*

- d'une part les classes $\mathcal{N}_i$ de f associées à une unique géodésique fermée et l'ensemble $\{i^* \pi_1(A_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}_f}$, donnée par l'application qui à tout point typique de A_α tel que $i^* \pi_1(A_\alpha)$ soit non trivial associe sa géodésique traçante;
- d'une part les classes $\mathcal{N}_i$ de f associées à une unique lamination géodésique sans feuille fermée et l'ensemble $\mathcal{B}_f$, donnée par l'application qui à tout point typique de $B_{\alpha'}$ associe l'adhérence de sa géodésique traçante.

En particulier, pour tout A_α ou $B_{\alpha'}$, l'application qui à un point typique de la pièce associe l'adhérence de sa géodésique traçante est constante.

Problème 21.8. — *Compléter le programme de Handel et obtenir un résultat similaire sans l'hypothèse non errant.*

21.3. Plus sur les anneaux

On peut préciser un peu la dynamique en restriction aux anneaux $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}_f}$. Tout d'abord, il est tout à fait possible que la famille $\mathcal{A}_f$ soit infinie : c'est en particulier le cas dans l'exemple du pendule (figure 62) où les anneaux formés par les trajectoires tournantes bleues se décomposent en une infinité d'anneaux sans points fixes, bien sûr deux à deux homotopes.

Voici un résultat détaillant la dynamique rotationnelle sur les anneaux A_α :

Proposition 21.9. — *Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}_f$, le nombre de rotation $\rho : A_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$ est bien défini en tout point, continu et, quitte à changer de relevé, l'image $\rho(A_\alpha)$ est incluse dans $[0, 1]$. Les composantes connexes de ses fibres sont des fermés essentiels de A_α .*

Si un bout de A_α est non trivial, alors le nombre de rotation $\rho(x)$ tend vers 0 ou 1 quand x tend vers ce bout.

Je dois au lecteur quelques explications. Tout d'abord, A_α étant un anneau ouvert, il est homéomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$ via $\varphi : A_\alpha \rightarrow \mathbf{S}^1 \times]0, 1[$. Notant pr_1 la projection sur la première coordonnée et $\hat{g}$ un relevé de $\varphi \circ f|_{A_\alpha}$ à $\mathbf{R} \times]0, 1[$, la première partie de la proposition affirme que pour tout $x \in A_\alpha$ et tout relevé $\hat{y}$ de $\varphi(x)$, les limites suivantes existent et coïncident :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{pr}_1(\hat{g}^n(\hat{y})) - \text{pr}_1(\hat{y})}{n} = \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{\text{pr}_1(\hat{g}^n(\hat{y})) - \text{pr}_1(\hat{y})}{n} = \rho(x).$$

Cette fonction ρ est bien définie au choix du relevé $\hat{g}$ près, pour deux relevés différents les deux fonctions obtenues diffèrent d'un entier. La proposition affirme alors que $\rho(A_\alpha)$ est inclus dans un intervalle du type $[k, k+1]$.

Définissons la notion de bout. Chaque anneau A_α en possède deux, qui ne sont pas forcément disjoints, et qui sont définis par (H et B pour *haut* et *bas*) :

$$\partial_H(A_\alpha) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{\varphi^{-1}(\mathbf{S}^1 \times]0, \varepsilon])} \quad \text{et} \quad \partial_B(A_\alpha) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{\varphi^{-1}(\mathbf{S}^1 \times [1 - \varepsilon, 1])},$$

si bien que $\partial A_\alpha = \partial_H(A_\alpha) \cup \partial_B(A_\alpha)$. Les bouts sont bien sûr des compacts non vides et connexes de S . Un bout est dit *non trivial* s'il n'est pas réduit à un point.

Rappelons-nous l'exemple de la rotation irrationnelle sur l'anneau ouvert : $(\theta, x) \mapsto (\theta + \alpha, x)$. On peut compactifier l'anneau en lui ajoutant deux points pour en faire une sphère. L'homéo de la sphère obtenu préserve l'orientation et l'aire, et est sans fer à cheval. On peut donc lui appliquer le théorème 21.5 et l'anneau initial est l'unique pièce de la décomposition : il est égal à l'unique A_α . L'application ρ est naturellement constante égale à α sur cet anneau, on voit donc que sa limite aux bouts est non entière.

La proposition affirme que c'est plus ou moins le seul cas où ça peut arriver : si par exemple $\partial_H(A_\alpha)$ est non trivial, alors pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(\varphi^{-1}(\mathbf{S}^1 \times]0, \varepsilon])$ est inclus soit dans $[0, \delta]$, soit dans $[1 - \delta, \delta]$.

Les fibres de ρ sont les sous-ensembles de A_α du type $\rho^{-1}(r)$ pour $r \in [0, 1]$. Ces fibres sont des fermés de A_α , la proposition affirme que leurs composantes connexes sont essentielles, autrement dit que leur complémentaire est composé d'au moins deux composantes connexes, à moins que leur adhérence ne contienne un des bouts.

On a donc une partition de chaque anneau en fermés essentiels (les composantes connexes des fibres de ρ), ce qui ressemble à la partition des anneaux de la figure 62 par les orbites du flot. On voit facilement que ces fermés sont également *remplis*, c'est-à-dire que leur complémentaire ne contient pas de composante connexe non essentielle.

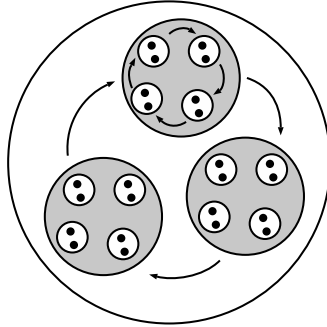


FIGURE 65. Un odomètre contenu dans un anneau A_α de la décomposition.

On peut tout à fait avoir tout de même une dynamique plus compliquée que cela dans les anneaux : c'est possible que ceux-ci contiennent des odomètres, comme à la figure 65. Ces configurations sont détectées en regardant la décomposition du théorème 21.5 pour les itérés f^n de f ou, si on préfère, seulement pour les itérés $f^{n!}$. Notant A_α^n les anneaux de la décomposition de $f^{n!}$, on voit que chaque $A_{\alpha'}^{n+1}$ est inclus dans un A_α^n . On voit alors que s'il existe une suite strictement décroissante $A_{\alpha_k}^{n_k}$, telle que pour tout k l'anneau $A_{\alpha_{k+1}}^{n_{k+1}}$ est inessentiel dans $A_{\alpha_k}^{n_k}$, alors on a un odomètre. On a en fait un résultat de Patrice et Fabio (référence qu'on consultera si on veut les définitions) :

Théorème 21.10 ([LCT22, proposition K]). — Soit $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ un homé préservant l'orientation sans fer à cheval et Λ un ensemble transitif. Alors :

- soit Λ est une orbite périodique;
- soit f est topologiquement infiniment renormalisable sur Λ et donc y est semi-conjugué à un odomètre);

- soit Λ est de type irrationnel (c'est une union finie d'anneaux sur lesquels une puissance de f agit comme une pseudo-rotation irrationnelle).

Terminons par un exemple : la méthode d'Anosov-Katok [FK04] permet de construire des difféos de l'anneau fermé, qui sont minimaux en restriction à l'intérieur de l'anneau. On peut bien sûr étendre ce type d'exemples à toute surface fermée en y incluant un anneau fermé (par exemple essentiel). On ne saurait donc trouver en général de pseudo-feuilletage sur les anneaux A_α dont les feuilles sont toutes des fermés d'intérieur vide.

Comment
trouver les
points des
anneaux :
FDR?

21.4. Plus sur les pièces mélangeantes

On a vu à la section précédente qu'on peut raffiner la décomposition du théorème 21.5 en considérant la décomposition des itérés de f . Cela n'est possible que pour les anneaux, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 21.11. — Soit $f \in \text{Homeo}_\lambda(S)$ un homéo sans fer à cheval topologique, préservant l'orientation et avec au moins un point fixe. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathcal{B}_f = \mathcal{B}_{f^n}$ et pour tout $\alpha' \in \mathcal{B}_f$, les ensembles $B_{\alpha'}$ associés à respectivement f et f^n sont identiques.

Le résultat qui vient, assez technique dans son énoncé, exprime que les pièces $B_{\alpha'}$ viennent avec un *pseudo-feuilletage* en pseudo-feuilles fermées de mesure nulle (à moins qu'elles ne contiennent beaucoup de points fixes ou une pièce A_α). Ces feuilles doivent être pensées comme des analogues aux orbites du flot linéaire reparamétré de la figure 63 et les diverses conclusions de la prochaine proposition précisent à quel point cette heuristique se vérifie en pratique.

Pour tout sous-ensemble $B \subset F$, notons $\text{fill}(B)$ l'union de B avec les composantes connexes du complémentaire de B qui sont des disques topologiques.

Étant donnée une lamination géodésique minimale Λ sur S , on appelle *géodésiques idéales* les géodésiques de bord des polygones idéaux du complémentaire de Λ , *géodésiques de couronnes* celles qui sont sur le bord des autres composantes, et *géodésiques typiques* les autres, qui sont donc accumulées par d'autres géodésiques de Λ de chaque côté. Définissons une relation d'équivalence R sur Λ par : $\gamma R \gamma'$ si γ et γ' sont dans le bord d'une même composante connexe de $S \setminus \Lambda$, et si certains de leurs relevés à $\tilde{S}$ le revêtement universel de S ne peuvent être séparés par le relevé d'une géodésique fermée disjointe de Λ (autrement dit, la relation R identifie les géodésiques de bord d'un polygone idéal du complémentaire ou d'une couronne). On note $[\Lambda]$ l'ensemble des classes de Λ/R qui ne contiennent pas de géodésiques de couronnes.

Proposition 21.12. — Soit $f \in \text{Homeo}_\lambda(S)$ un homéo sans fer à cheval topologique et avec au moins un point fixe, et supposons que l'ensemble des points fixes de f soit non essentiel. Alors, pour tout $\alpha' \in \mathcal{B}_f$, il existe une partition

$$\text{fill}(B_{\alpha'}) = \bigsqcup_{[\gamma] \in [\Lambda_{\alpha'}]} F_{[\gamma]},$$

telle que :

1. pour tout $[\gamma] \in [\Lambda_{\alpha'}]$, on a $\lambda(F_{[\gamma]} \setminus \text{Fix}(f)) = 0$;
2. les ensembles $F_{[\gamma]}$ sont connexes et leurs relevés à $\tilde{S}$ sont fermés, non bornés et séparent $\tilde{S}$ en au moins deux composantes connexes de diamètre infini;

3. pour tout $[\gamma] \in [\Lambda_{\alpha'}]$ et tout relevé $\tilde{F}_{[\gamma]}$ de $F_{[\gamma]}$ à $\tilde{S}$, il existe des relevés $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ des éléments de $[\gamma]$ à $\tilde{S}$ (chaque élément de $[\gamma]$ a un seul relevé dans cette collection) tels que à tout $\tilde{x} \in \tilde{F}_{[\gamma]}$ est associé $i_x \in \{1, \dots, k\}$ (pas nécessairement unique) tel que $\alpha(\tilde{x}) \cap \partial \tilde{S} = \alpha(\tilde{\gamma}_{i_x})$ et $\omega(\tilde{x}) \cap \partial \tilde{S} = \omega(\tilde{\gamma}_{i_x})$.
4. pour tout $[\gamma] \in [\Lambda_{\alpha'}]$ qui contient une géodésique idéale, tout relevé $\tilde{F}_{[\gamma]}$ de $F_{[\gamma]}$ vers $\tilde{S}$ et tout $\tilde{x} \in \tilde{F}_{[\gamma]}$, soit $\alpha(\tilde{x}) \subset \text{Fix}(\tilde{f}) \subset \tilde{S}$, soit $\omega(\tilde{x}) \subset \text{Fix}(\tilde{f}) \subset \tilde{S}$, soit les deux;
5. il existe $R > 0$ tel que pour tout $[\gamma] \in [\Lambda_{\alpha'}]$, on a

$$d_H\left(\tilde{F}_{[\gamma]}, \bigcup_i \tilde{\gamma}_i\right) \leq R,$$

où d_H désigne la distance de Hausdorff et les $\tilde{\gamma}_i$ sont les relevés de l'item 3.

décrire comment trouver les pièces? Quid des revêtements finis?

Faire un exemple du type Koro Tal!

<https://arxiv.org/pdf/math/0504279>

Check hy-
pothèse ens
des pts fixes
inessentiels

Problème 21.13. — Obtenir un résultat similaire dans le cas non errant.

APPENDICE A

B.A. BA DE THÉORIE DU FORÇAGE

Ce chapitre est un cours accéléré en théorie du forçage de Patrice et Fabio [LCT18, LCT22]. Il reprend une bonne partie de mon exposé Bourbaki [Gui21].

La théorie du forçage est en quelque sorte l'aboutissement de toute une série de travaux visant à améliorer la théorie de Brouwer. Si celle-ci prend sa source dans le 5^e problème de Hilbert, elle s'est rapidement imposée comme un outil incontournable pour la dynamique topologique sur les surfaces.

L'idée de la théorie du forçage est d'exploiter le théorème A.5 de [LC05] qui associe à tout homéo de surface homotope à l'identité un feuilletage singulier sur la surface. On utilise alors une sorte de dualité entre l'action de l'homéo f sur les points de la surface et sur les feuilles du feuilletage : comme résumé par le diagramme suivant, on part d'une propriété sur f , la traduit en termes de feuilletages, on en déduit l'existence de nouvelles orbites de l'action de f sur le feuilletage, ce qui implique une certaine propriété de l'action de f sur les points.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}' \\ \uparrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

A.1. Un cas d'école : la dimension 1

Il me semble éclairant de commencer par revenir aux fondamentaux et expliquer un exemple de théorème de forçage d'orbites en dimension 1 : le théorème de Sharkovsky [Sha64]. Sa preuve, bien que très simple, éclairera la compréhension de la théorie du forçage.

Théorème A.1 (Sharkovsky). — Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue, qui possède un point périodique de période 3⁽¹⁾. Alors f possède des points périodiques de n'importe quelle période entière.

Démonstration. — Soit a un point périodique de période 3 pour f . On note $b = f(a)$ et $c = f^2(a)$ (et donc $f(c) = a$). Quitte à permuter circulairement a , b et c et à changer f en

⁽¹⁾C'est-à-dire un point $x \in \mathbf{R}$ tel que $f^3(x) = x$ mais $f^k(x) \neq x$ pour tout $1 \leq k < 3$.

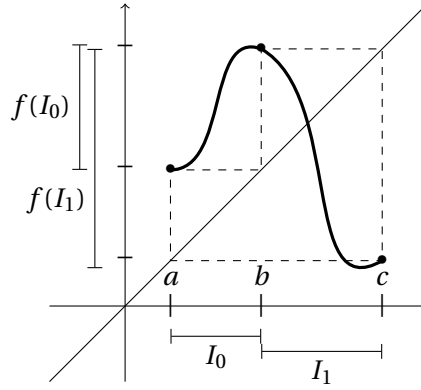
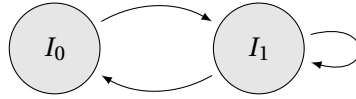


FIGURE 66. Preuve du théorème A.1 de Sharkovsky.

$x \mapsto -f(-x)$, on peut supposer que $a < b < c$. Posant $I_0 =]a, b[$ et $I_1 =]b, c[$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que $f(I_0) \supset]b, c[= I_1$ et $f(I_1) \supset]a, c[\supset I_0 \cup I_1$ (voir la figure 66). Autrement dit, définissant la relation $\rightarrow_n$ sur les intervalles de $[a, c]$ par $I \rightarrow_n J$ si $f^n(I) \supset J$, on a $I_0 \rightarrow_1 I_1$, $I_1 \rightarrow_1 I_0$ et $I_1 \rightarrow_1 I_1$. On peut représenter ces relations par le graphe suivant, où les flèches correspondent aux relations $\rightarrow_1$:



Cette relation $\rightarrow_n$ vérifie les propriétés :

- de transitivité : si $I \rightarrow_n J$ et $J \rightarrow_m K$, alors $I \rightarrow_{m+n} K$;
- de point fixe : par le théorème des valeurs intermédiaires, si $I \rightarrow_n I$, alors il existe $x \in \bar{I}$ fixe par f^n .

Par conséquent, si on choisit une trajectoire positive $w_0 w_1 w_2 \dots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dans le graphe ci-dessus — ce qui signifie que pour tout $j \geq 0$, on a $I_{w_j} \rightarrow_1 I_{w_{j+1}}$ —, alors il existe un point $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^j(x) \in I_{w_j}$ pour tout $j \geq 0$. Si de plus la trajectoire est périodique de période T qui n'est pas un multiple de 3, un petit raisonnement permet de vérifier que x peut être pris périodique de période T . $\square$

Dans la preuve, on vient de définir un ensemble de mots *admissibles*, définis par un nombre fini de règles de transition locales. Celles-ci peuvent être lues sur la matrice d'adjacence

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

du graphe, auquel est aussi naturellement associée une chaîne de Markov. L'application de la dynamique f correspond à l'application décalage « *shift* » sur l'espace des mots infinis :

$$\begin{aligned} \sigma : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \\ w_0 w_1 w_2 \dots &\longmapsto w_1 w_2 w_3 \dots \end{aligned}$$

Formellement, si on pose Σ l'ensemble des mots admissibles et $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(I_0 \cup I_1)$, alors on a

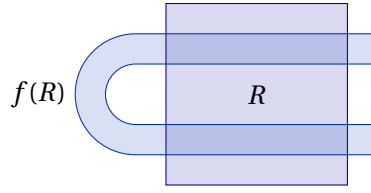


FIGURE 67. Le fer à cheval de Smale

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma
 \end{array}$$

où h est défini par $f^i(x) \in I_{h(x)_i}$. Par ce qu'on vient de voir, l'application h est surjective et continue, autrement dit $f|_{\Lambda}$ est une *extension* du — ou est semi-conjugué au — décalage de Fibonacci $\sigma|_{\Sigma}$. De plus, à chaque point périodique de σ correspond un point périodique de même période dans $\bar{\Lambda}$.

Derrière cette semi-conjugaison se cache l'idée d'un codage de la dynamique, dont les origines remontent (au moins) à Hadamard et sa preuve de l'ergodicité du flot géodésique en 1898.

La configuration du théorème A.1 de Sharkovsky est l'exemple type de *fer à cheval topologique* comme défini dans [LCT22] (voir [Mis80] pour une étude plus complète des fers à cheval en dimension 1) : un fer à cheval topologique est un ensemble compact Y invariant par un itéré de f et vérifiant les conclusions de la proposition 16.24.

En résumé, l'idée d'une théorie du forçage est de détecter des mécanismes impliquant l'existence de nouvelles orbites dans notre dynamique, voire si c'est possible l'existence de fers à cheval topologiques. Dans le cas des surfaces, l'exemple emblématique de fer à cheval topologique est le fer à cheval de Smale (voir la figure 67), pour lequel l'ensemble Y de la proposition 16.24 est $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$. Celui-ci est semi-conjugué au décalage complet sur un alphabet à deux éléments et cela vient du fait que l'ensemble image $f(R)$ possède deux *intersections markoviennes* avec le rectangle R . Cette notion remplace celle (bien plus rudimentaire) de recouvrement en dimension 1 et là où on appliquait un théorème des valeurs intermédiaires pour trouver un point périodique, il faut ici utiliser un théorème d'indice (de Lefschetz ou de Conley).

A.2. Prérequis : théorie de Brouwer et feuilletages

Dans toute la suite le plan $\mathbf{R}^2$ sera orienté. On appellera *chemin* toute application continue d'un intervalle dans une surface et *droite* tout plongement topologique propre de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$. Le complémentaire de toute droite Δ possède deux composantes connexes (via le théorème de Jordan appliqué à la compactification $\mathbf{S}^2$ de $\mathbf{R}^2$). Le choix d'une (co-)orientation sur Δ permet de lever l'ambiguïté sur ces composantes connexes, qui seront désignées par la *gauche* $L(\Delta)$ et la *droite* $R(\Delta)$ de Δ .

Définition A.2. — Une droite de Brouwer pour un homéo f du plan est une droite topologique orientée Δ proprement plongée dans $\mathbf{R}^2$, telle que $\overline{f(R(\Delta))} \subset R(\Delta)$.

Lorsque f préserve l'orientation, cela implique que pour tous $m < n \in \mathbf{Z}$, la droite $f^n(\Delta)$ est située à droite de $f^m(\Delta)$. Le théorème de translation plane de Brouwer énonce que par chaque point passe une droite de Brouwer.

Théorème A.3 ([Bro12]). — Soit f un homéo du plan préservant l'orientation et sans point fixe. Alors par tout point du plan passe une droite de Brouwer pour f .

Pour une présentation moderne de la preuve de ce théorème, le lecteur pourra consulter les notes de cours de Marc [Bon06].

Donnons tout de suite l'application directe la plus frappante de ce théorème, qui peut être vue comme un premier résultat de forçage dans le plan⁽²⁾.

Corollaire A.4. — Tout homéo du plan préservant l'orientation et ayant un point périodique possède aussi un point fixe.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'un homéo préservant l'orientation et sans point fixe est aussi sans point périodique. Soit p un point du plan, le théorème de Brouwer A.3 assure l'existence d'une droite de Brouwer passant par p , en particulier cette droite est libre (disjointe de chacun de ses itérés) et donc p n'est pas périodique. $\square$

Toutes les preuves du théorème de Brouwer sont assez longues et délicates (mais se terminent par un calcul d'indice de courbe). Vu la puissance de ce résultat, il est naturel de chercher à l'améliorer, dans au moins deux directions différentes.

- Il n'y a aucune raison pour que deux droites de Brouwer issues de deux points distincts soient disjointes. Est-il possible de faire en sorte que ce soit le cas, de manière à obtenir un feuilletage du plan par des droites de Brouwer?
- Est-il possible d'obtenir un tel résultat pour des homéos de surfaces compactes? Autrement dit, étant donné un homéo d'une surface compacte, à quelles conditions existe-t-il un feuilletage de la surface qui se relève, au revêtement universel, en un feuilletage du plan en droites de Brouwer pour le relevé de l'homéo?

Ces deux questions ont été résolues successivement par Alain Sauzet dans [Sau01] puis par Patrice dans [LC04a] et [LC05] (principalement, voir aussi l'exposé [LC06a]), pour aboutir à un théorème de Brouwer feuilleté équivariant (voir aussi le mémoire de Nelson [Sch21] pour une présentation synthétique de la version non équivariante).

Théorème A.5 ([LC05]). — Soit G un groupe discret d'homéos du plan préservant l'orientation, agissant librement et proprement. Soit f un homéo du plan sans point fixe, préservant l'orientation et commutant avec les éléments de G . Alors il existe un feuilletage topologique orienté du plan en droites de Brouwer pour f et invariant sous l'action de G .

Dans la pratique, on appliquera ce théorème uniquement via son corollaire suivant, qui utilise la notion de chemin transverse.

⁽²⁾Je triche un peu en appelant l'énoncé qui suit corollaire, puisqu'il est un résultat intermédiaire des preuves du théorème de Brouwer.

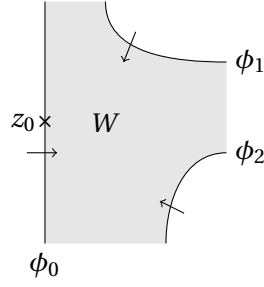


FIGURE 68. Preuve du lemme A.8. Les feuilles sont co-orientées. Le lecteur notera que les conventions d'orientation des feuilles seront parfois différentes de celles utilisées dans [LCT18].

Définition A.6. — Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage orienté d'une surface S et $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ un chemin. Pour $x \in S$, on note ϕ_x la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x . On dit que γ est *positivement transverse* à $\mathcal{F}$ (qu'on abrégera en $\mathcal{F}$ -transverse) si pour tout $t \in [0, 1]$, on a en relevant au revêtement universel⁽³⁾ de S

$$\{\tilde{\gamma}(u) \mid u \in [0, t]\} \subset L(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(t)}) \quad \text{et} \quad \{\tilde{\gamma}(u) \mid u \in]t, 1]\} \subset R(\tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(t)}).$$

Autrement dit, le chemin γ traverse localement toutes les feuilles qu'il rencontre de la gauche vers la droite.

Corollaire A.7. — Soit S une surface et $I = (I^t)_{t \in [0, 1]}$ une isotopie dans S joignant l'identité à un homéo f (si bien que pour tout $z \in S$, l'arc $I(z) : t \mapsto I^t(z)$ joint z à $f(z)$). On suppose que I n'a pas de point fixe contractile, c'est-à-dire de point fixe z tel que $I(z)$ soit un lacet homotope à 0. Alors il existe un feuilletage topologique orienté $\mathcal{F}$ sur S et pour tout $z \in S$, un chemin positivement transverse à $\mathcal{F}$ et joignant z à $f(z)$ qui est homotope, à extrémités fixées, à l'arc $I(z)$.

Ce corollaire se déduit du théorème feuilleté facilement, nous en donnons une preuve, basée sur le lemme suivant.

Lemme A.8. — Sous les hypothèses du théorème A.5, pour tout point $z_0 \in \mathbf{R}^2$, il existe un arc positivement transverse à $\mathcal{F}$ qui joint z_0 à $f(z_0)$.

Démonstration du lemme A.8. — Notons W l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ pouvant être joints à z_0 par un arc positivement transverse à $\mathcal{F}$ (et non trivial). Alors W est un ensemble ouvert, dont la frontière est constituée de la feuille ϕ_0 passant par z_0 ainsi que d'éventuelles autres feuilles ϕ vérifiant $W \subset R(\phi)$ (voir la figure 68). Si $f(z_0)$, qui est à droite de ϕ_0 , n'appartenait pas à W , alors il appartiendrait à l'adhérence de la gauche d'une de ces feuilles ϕ , ce qui est impossible puisque ces ensembles sont invariants par f^{-1} . $\square$

Démonstration du corollaire A.7. — Le corollaire se déduit immédiatement du lemme par passage au revêtement universel de $S \setminus \text{Fix}(f)$. En effet, ce revêtement universel ne peut être la sphère vue l'hypothèse sur l'absence de point fixe contractile et est donc homéomorphe au plan $\mathbf{R}^2$. L'hypothèse sur l'absence de point fixe contractile assure que tout relevé de f est

⁽³⁾Ce revêtement universel est toujours homéomorphe au plan, puisqu'il n'existe pas de feuilletage non singulier sur la sphère.

sans point fixe. On applique alors le théorème de feuilletage équivariant à ce relevé de f et au groupe du revêtement. $\square$

Le corollaire A.7 demande une hypothèse assez forte : I ne doit pas avoir de point fixe contractile. Le théorème de Brouwer feuilleté ne prend toute sa force que lorsqu'on lui joint un résultat d'existence d'isotopies, dites *maximales*, qui satisfont cette condition, démontré par François, Sylvain et Frédéric [BCLR20], et qui implique le résultat suivant⁽⁴⁾. Pour une isotopie I entre homéos, on note $\text{Fix}(I) = \bigcap_{t \in [0,1]} \text{Fix}(I^t)$ l'ensemble des points dont l'orbite sous I est entièrement fixe et $\text{dom}(I) = S \setminus \text{Fix}(I)$ le *domaine* de l'isotopie I .

Théorème A.9. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Alors il existe une isotopie I entre f et l'identité telle que $I|_{\text{dom}(I)}$ n'ait pas de point fixe contractile.

Autrement dit, pour tout $z \in \text{Fix}(f) \setminus \text{Fix}(I)$, la trajectoire $I(z)$ n'est pas contractile dans $\text{dom}(I)$. Ce théorème est crucial, puisqu'il permet, pour tout homéo homotope à l'identité, d'appliquer le corollaire A.7 à la surface $\text{dom}(I)$ et à l'isotopie $I|_{\text{dom}(I)}$.

Le corollaire A.7 permet d'associer, à chaque trajectoire $I(z) : t \mapsto I^t(z)$ d'une isotopie sans point fixe contractile, un arc positivement transverse qui lui est homotope à extrémités fixes. Cet arc est en fait uniquement déterminé par l'ensemble des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ traversées par la trajectoire $\widetilde{I}(\widetilde{z})$ relevée au revêtement universel traversées par la trajectoire $\widetilde{I}(\widetilde{z})$ relevée au revêtement universel $\widetilde{\text{dom}}(I)$ de $\text{dom}(I)$; cela amène à considérer les trajectoires des isotopies dans l'espace des feuilles, autrement dit à quotienter par la relation sur les arcs « rencontrer les mêmes feuilles » : la théorie du forçage va en fait nous permettre de détecter de nouvelles orbites dans cet espace quotient des feuilles.

Définition A.10. — Soit S une surface, $\mathcal{F}$ un feuilletage de S , f un homéo de S homotope à l'identité et I une isotopie reliant l'identité à f . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in S$, notons $I^n(z)$ la concaténation des arcs $I(f^j(z))$ pour $0 \leq j < n$. On dit qu'un chemin $\mathcal{F}$ -transverse $\gamma : J \rightarrow S$ est *admissible d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ s'il est homotope, à extrémités fixées, à un arc $I^n(z)$ pour un certain $z \in S$.

Par ailleurs, on notera $I_{\mathcal{F}}(z)$ un chemin $\mathcal{F}$ -transverse homotope à extrémités fixes à $I(z)$ (dont on en déduit la définition des chemins $I_{\mathcal{F}}^n(z)$).

A.3. Apparition des fers à cheval

Nous arrivons au cœur de la théorie du forçage : on va commencer par énoncer la proposition fondamentale A.13 de [LCT18], qui permet de trouver, lorsqu'apparaît une *intersection $\mathcal{F}$ -transverse*, de nouvelles orbites dans l'espace des feuilles : en gros, si deux orbites sous l'isotopie se croisent dans l'espace des feuilles, alors n'importe quel choix de direction fait à cet embranchement sera lui aussi réalisé par des orbites de l'isotopie (voir la figure 70). La preuve de cette proposition est élémentaire et repose seulement sur l'idée d'ensembles séparant le plan.

Cette proposition est à la base de la preuve de l'existence de fers à cheval dans le cas d'une *auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse* (lorsque l'intersection transverse vient d'une seule et même orbite de l'isotopie) comme démontrée dans [LCT22].

Commençons par définir rigoureusement la notion d'intersection $\mathcal{F}$ -transverse.

⁽⁴⁾L'article [LCT18] se base sur le travail [Jau14], qui donne un résultat plus faible et moins naturel, mais suffisant en pratique, concernant les isotopies maximales.

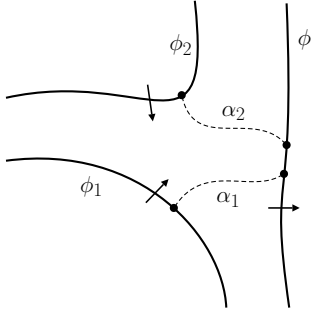


FIGURE 69. Suivant la définition A.11, la feuille orientée ϕ_2 est au-dessus de la feuille orientée ϕ_1 relativement à ϕ .

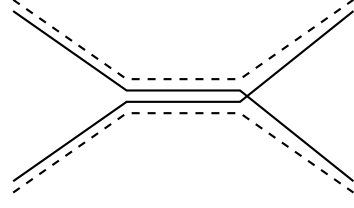


FIGURE 70. Proposition fondamentale et trajectoires dans l'espace des feuilles : si les deux trajectoires en trait plein sont admissibles, alors les deux trajectoires en pointillés le sont aussi.

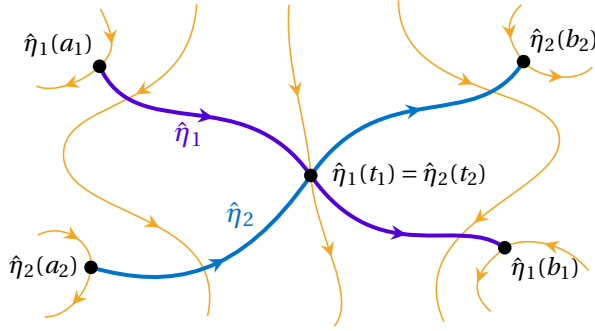


FIGURE 71. Exemple d'intersection $\hat{\mathcal{F}}$ -transverse.

Définition A.11. — Soient ϕ , ϕ_1 et ϕ_2 trois droites orientées du plan. Nous dirons que ϕ_2 est au-dessus de ϕ_1 relativement à ϕ si (voir la figure 69) :

- ces trois droites sont deux à deux disjointes ;
- aucune des deux ne sépare les deux autres ;
- si α_i , $i = 1, 2$ sont deux chemins disjoints reliant chacun un point de ϕ_i à un point $\phi(t_i)$ de ϕ ⁽⁵⁾, alors $t_2 > t_1$.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage du plan et pour $i = 1, 2$, J_i deux intervalles réels et $\eta_i = J_i \rightarrow \mathbf{R}^2$ deux chemins $\mathcal{F}$ transverses.

Définition A.12. — On dit que $\eta_1 : J_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ et $\eta_2 : J_2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ s'intersectent $\mathcal{F}$ -transversalement et positivement⁽⁶⁾ s'il existe $a_i < t_i < b_i \in J_i$ tels que (voir la figure 71) :

- $\phi_{\eta_1(t_1)} = \phi_{\eta_2(t_2)} = \phi$;
- $\phi_{\eta_2(a_2)}$ est au-dessus de $\phi_{\eta_1(a_1)}$ relativement à ϕ ;
- $\phi_{\eta_1(b_1)}$ est au-dessus de $\phi_{\eta_2(b_2)}$ relativement à ϕ .

Remarquons qu'en cas d'intersection $\mathcal{F}$ -transverse, quitte à modifier η_1 ou η_2 dans leur classe d'équivalence, on peut supposer que $\eta_1(t_1) = \eta_2(t_2)$ (ce qu'on fera par la suite).

Voici la proposition fondamentale de la théorie du forçage :

⁽⁵⁾ On utilise un paramétrage des feuilles, compatible avec leur (co-)orientation.

⁽⁶⁾ Par la suite, il nous arrivera d'omettre le « positivement ».

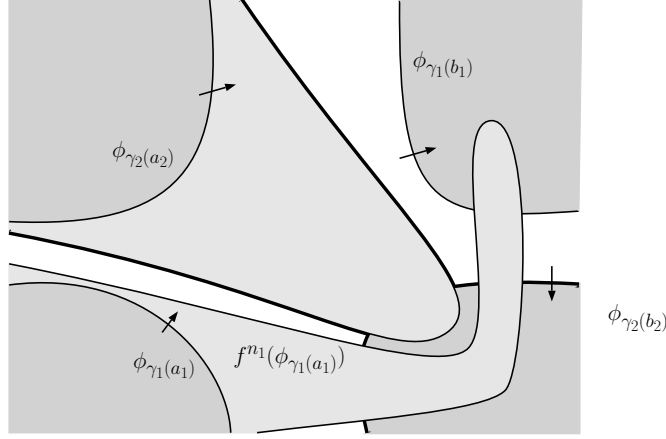


FIGURE 72. Proposition fondamentale : si $f^{n_2}(\phi_{\eta_2(a_2)})$ ne rencontre pas $\phi_{\eta_1(b_1)}$, cela force l'intersection entre $f^{n_1}(\phi_{\eta_1(a_1)})$ et $\phi_{\eta_2(b_2)}$. La frontière de l'ensemble X_2 est représenté en traits gras.

Proposition A.13 ([LCT18, proposition 20]). — Soit f un homéo du plan et $\mathcal{F}$ un feuilletage du plan en droites de Brouwer pour f . On suppose que $\eta_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ($i = 1, 2$) s'intersectent $\mathcal{F}$ -transversalement en $\eta_1(t_1) = \eta_2(t_2)$. Si chaque η_i est admissible d'ordre n_i , alors les chemins $\eta_1|_{[a_1, t_1]}\eta_2|_{[t_2, b_2]}$ et $\eta_2|_{[a_2, t_2]}\eta_1|_{[t_1, b_1]}$ sont tous deux admissibles d'ordre $n_1 + n_2$. De plus, soit ces deux chemins sont admissibles d'ordre $\max(n_1, n_2)$, soit au moins l'un des deux est admissible d'ordre $\min(n_1, n_2)$.

Démonstration. — L'idée de la preuve est résumée par la figure 72. Remarquons que, parce que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des droites de Brouwer et par l'hypothèse que $\phi_{\eta_2(a_2)}$ est au-dessus de $\phi_{\eta_1(a_1)}$ relativement à ϕ , on a, pour tout $k \geq 0$,

$$f^{-k}(\overline{L\phi_{\eta_1(a_1)}}) \cap \overline{L\phi_{\eta_2(a_2)}} \subset \overline{L\phi_{\eta_1(a_1)}} \cap \overline{L\phi_{\eta_2(a_2)}} = \emptyset.$$

Plus généralement, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,

$$(42) \quad f^{k_1}(\overline{L\phi_{\eta_1(a_1)}}) \cap f^{k_2}(\overline{L\phi_{\eta_2(a_2)}}) = f^{k_1}(\overline{R\phi_{\eta_1(b_1)}}) \cap f^{k_2}(\overline{R\phi_{\eta_2(b_2)}}) = \emptyset.$$

Pour $i = 1, 2$, définissons les ensembles

$$X_i = f^{n_i}(\overline{L\phi_{\eta_i(a_i)}}) \cup \overline{R\phi_{\eta_i(b_i)}} \quad \text{et} \quad Y_i = f^{-n_i}(\overline{R\phi_{\eta_i(b_i)}}) \cup \overline{L\phi_{\eta_i(a_i)}}.$$

Par hypothèse sur l'admissibilité des chemins, ces quatre ensembles sont connexes.

Si $\eta_2|_{[a_2, t_2]}\eta_1|_{[t_1, b_1]}$ n'est pas admissible d'ordre n_2 , alors $f^{n_2}(\phi_{\eta_2(a_2)}) \cap \phi_{\eta_1(b_1)} = \emptyset$, si bien que par (42), $X_2 \cap R\phi_{\eta_1(b_1)} = \emptyset$.

Lemme A.14. — L'ensemble X_2 sépare $\overline{L\phi_{\eta_1(a_1)}}$ et $\overline{R\phi_{\eta_1(b_1)}}$.

Démonstration. — Considérons un chemin $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ reliant $\overline{L\phi_{\eta_1(a_1)}}$ à $\overline{R\phi_{\eta_1(b_1)}}$, ainsi que $\alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ un chemin reliant $\overline{L\phi_{\eta_2(a_2)}}$ à $\overline{R\phi_{\eta_2(b_2)}}$ et inclus dans X_2 . Ces deux chemins rencontrent la feuille centrale ϕ en respectivement u_1 et u_2 . Si α_1 et α_2 étaient disjoints, le fait que l'intersection est transverse impliquerait que d'une part $u_1 < u_2$ et d'autre part $u_2 < u_1$. Cette contradiction implique que les chemins α_1 et α_2 s'intersectent. $\square$

Le lemme A.14 implique que chacune des intersections $X_1 \cap X_2$ et $Y_1 \cap X_2$ est non vide. La première propriété implique que $f^{n_1}(\phi_{\eta_1(a_1)}) \cap \phi_{\eta_2(b_2)} \neq \emptyset$, autrement dit que $\eta_1|_{[a_1, t_1]}\eta_2|_{[t_2, b_2]}$

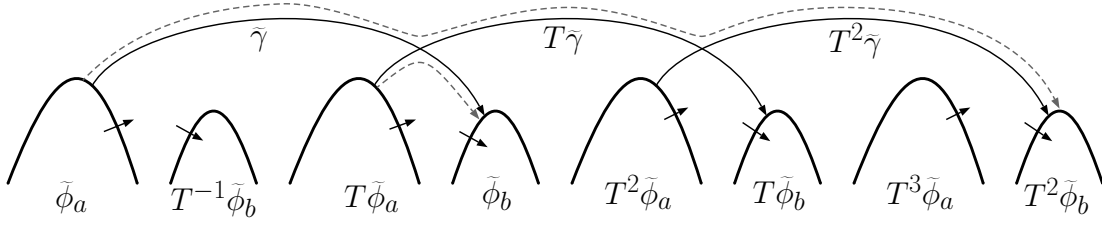


FIGURE 73. Utilisation de la proposition fondamentale A.13 pour trouver de nouvelles orbites (en gris pointillé) dans la preuve du théorème A.15.

est admissible d'ordre n_1 . La seconde implique que $f^{n_2}(\phi_{\eta_2(a_2)}) \cap f^{-n_1}(\phi_{\eta_1(b_1)}) \neq \emptyset$, autrement dit que $\eta_2|_{[a_2, t_2]} \eta_1|_{[t_1, b_1]}$ est admissible d'ordre $n_1 + n_2$.

Un raisonnement similaire (où Y_1 est utilisé pour séparer) montre que si $\eta_2|_{[a_2, t_2]} \eta_1|_{[t_1, b_1]}$ n'est pas admissible d'ordre n_1 , alors il est admissible d'ordre $n_1 + n_2$ et $\eta_1|_{[a_1, t_1]} \eta_2|_{[t_2, b_2]}$ est admissible d'ordre n_2 .

En résumé, $\eta_2|_{[a_2, t_2]} \eta_1|_{[t_1, b_1]}$ est admissible d'ordre $n_1 + n_2$ et s'il n'est pas admissible d'ordre $\max(n_1, n_2)$, alors l'autre chemin $\eta_1|_{[a_1, t_1]} \eta_2|_{[t_2, b_2]}$ est admissible d'ordre $\min(n_1, n_2)$. On conclut par symétrie des rôles joués par η_1 et η_2 . $\square$

Nous allons maintenant en déduire l'existence d'un fer à cheval topologique dans le cas d'une auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse.

Soit S une surface orientée et $f \in \text{Homeo}_0(S)$. Soit I une isotopie maximale entre f et l'identité, donnée par le théorème A.9, ainsi que $\mathcal{F}$ le feuilletage transverse de $\text{dom}(I)$ pour $f|_{\text{dom}(I)}$ donné par le corollaire A.7. On définit $\widetilde{\text{dom}}(I)$ le revêtement universel de $\text{dom}(I)$ et $\tilde{f}$, $\tilde{I}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ les relevés de $f|_{\text{dom}(I)}$, $I|_{\text{dom}(I)}$ et $\mathcal{F}$ à $\widetilde{\text{dom}}(I)$.

Voici le théorème M de [LCT22], qui est une amélioration significative des résultats de [LCT18], où les auteurs n'obtenaient que la positivité de l'entropie et la croissance exponentielle du nombre de points périodiques, sous l'hypothèse plus forte que le point z est récurrent.

γ vs. η

Théorème A.15. — Supposons qu'il existe $z \in \widetilde{\text{dom}}(I)$, $q \geq 2$ et T un automorphisme de revêtement de $\widetilde{\text{dom}}(I)$ tels que les trajectoires $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^q(z)$ et $T\tilde{I}_{\mathcal{F}}^q(z)$ aient une intersection $\tilde{\mathcal{F}}$ -transverse. Alors f possède un fer à cheval topologique et $h(f) \geq (\log 4)/3q$.

Le fer à cheval obtenu est dit *rotationnel*, propriété qui permet d'en déduire des propriétés concernant l'ensemble de rotation de l'homéo.

La preuve de ce théorème est relativement longue et technique, nous pouvons tout de même en donner les idées principales.

Idées de preuve. — Notons $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \widetilde{\text{dom}}(I)$ la trajectoire $\tilde{I}_{\mathcal{F}}^q(z)$. Par hypothèse, il existe $a < s < t < b$ tels que $\tilde{\gamma}$ et $T\tilde{\gamma}$ ont une intersection $\tilde{\mathcal{F}}$ -transverse en $T\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(t)$. Pour simplifier, nous noterons $\tilde{\phi}_a = \tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(a)}$ et $\tilde{\phi}_b = \tilde{\phi}_{\tilde{\gamma}(b)}$, et supposons $q \geq 2$.

Pour commencer, on démontre l'existence de nouvelles orbites dans l'espace des feuilles, assurée par la proposition fondamentale.

Lemme A.16. — Pour tout $q \geq 2$ et tout $p \in \{0, \dots, q\}$, on a $\tilde{f}^q(\tilde{\phi}_a) \cap T^{p-1}\tilde{\phi}_b \neq \emptyset$.

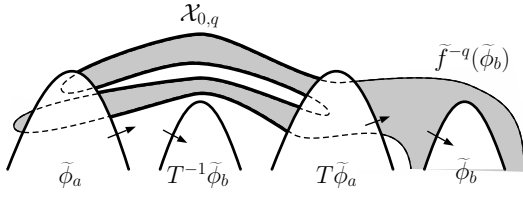


FIGURE 74. L'ensemble $\mathcal{X}_{0,q}$ dans la preuve du théorème A.15.

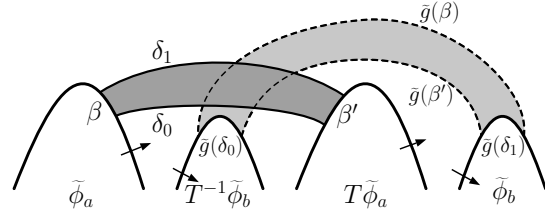


FIGURE 75. Apparition de l'intersection markovienne dans la preuve du théorème A.15.

L'idée de ce lemme est résumée par la figure 73; la preuve consiste à appliquer successivement la proposition fondamentale A.13 aux translatés de $\tilde{\gamma}$ (en fait on utilise le corollaire 22 de [LCT18]).

Ce lemme implique sans trop de difficulté une version faible du théorème A.15, qui énonce que pour tout $q \geq 2$ et $p \in \{1, \dots, q\}$, il existe un point fixe à $T^{-p}\tilde{f}^q$ (proposition 12 de [LCT22]).

Voyons comment démontrer cette assertion. Pour $p \geq 0$ et $q \geq 1$, on considère les ensembles $\mathcal{X}_{p,q}$ collectant tous les sous-chemins de $T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b)$ reliant $\tilde{\phi}_a$ à $T\tilde{\phi}_a$ et disjoints des gauches de tous les $T^k\tilde{\phi}_a$ (voir la figure 74); plus formellement $\mathcal{X}_{p,q}$ est l'ensemble des chemins reliant $\tilde{\phi}_a$ à $T\tilde{\phi}_a$, qui sont composante connexe de

$$T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} R(T^k\tilde{\phi}_a).$$

Étudions le cas $p \leq q - 1$. Le lemme A.16 assure que la courbe $T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b)$ rencontre à la fois $\tilde{\phi}_a$ et $T\tilde{\phi}_a$. Alors un bout de la courbe $T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b)$ joignant $\tilde{\phi}_a$ à $T\tilde{\phi}_a$ et disjoint de $L(\tilde{\phi}_a) \cup L(T\tilde{\phi}_a)$ ne rencontre aucun des $L(T^k\tilde{\phi}_a)$ (autrement dit $T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b)$ doit rencontrer les $L(T^k\tilde{\phi}_a)$ les uns à la suite des autres); cela vient du fait que la projection de courbe $T^p\tilde{f}^{-q}(\tilde{\phi}_b)$ sur $\text{dom}(I)$ est simple⁽⁷⁾. On vient de montrer que l'ensemble $\mathcal{X}_{p,q}$ est non vide. De la même manière, $\mathcal{X}_{p+1,q}$ est lui aussi non vide.

On considère alors $\delta_0 \in \mathcal{X}_{p,q}$ reliant $\tilde{\phi}_a(t_0)$ à $T\tilde{\phi}_a(t'_0)$ et $\delta_1 \in \mathcal{X}_{p+1,q}$ reliant $\tilde{\phi}_a(t_1)$ à $T\tilde{\phi}_a(t'_1)$. On pose aussi $\beta = \tilde{\phi}_a|_{[t_0, t_1]}$ et $\beta' = T\tilde{\phi}_a|_{[t'_0, t'_1]}$ (voir la figure 75). Visuellement, le rectangle formé par les quatre courbes $\delta_0, \delta_1, \beta$ et β' semble avoir une intersection markovienne avec son image par $\tilde{g} = T^{-p}\tilde{f}^q$. La vérification de ce fait est un peu fastidieuse, nous renvoyons au calcul de l'indice de Lefschetz de la courbe faite dans [LCT22]. Ce calcul implique l'existence d'un point fixe à $\tilde{g}$.

L'existence du fer à cheval demande un peu plus de travail, mais les idées sont similaires à celles qu'on vient de voir. Si $q \geq 3$ et $1 < p < q$, alors on peut montrer, par des arguments topologiques simples, que les ensembles $\mathcal{X}_{p-1,q}$ et $\mathcal{X}_{p+1,q}$ sont non vides et qu'entre deux courbes $\delta_1 \in \mathcal{X}_{p-1,q}$ et $\delta_4 \in \mathcal{X}_{p+1,q}$, il existe au moins deux courbes $\delta_2, \delta_3 \in \mathcal{X}_{p,q}$. Ces quatre courbes permettent de définir deux rectangles, comme sur la figure 76, l'image de chacun intersectant de manière markovienne chacun des deux autres. Lorsqu'on considère le rectangle obtenu en remplissant ces deux petits rectangles (i.e. le rectangle situé entre δ_1 et δ_4), on obtient un fer à cheval topologique. Là encore, les vérifications sont un peu fastidieuses

⁽⁷⁾Moralement, si cela n'était pas vrai, en quotient par T , on obtiendrait une lacet simple dans l'anneau $\widehat{\text{dom}(I)}/T$ de valeur au moins 2 en homologie. Pour les détails, voir le lemme 10 de [LCT22].

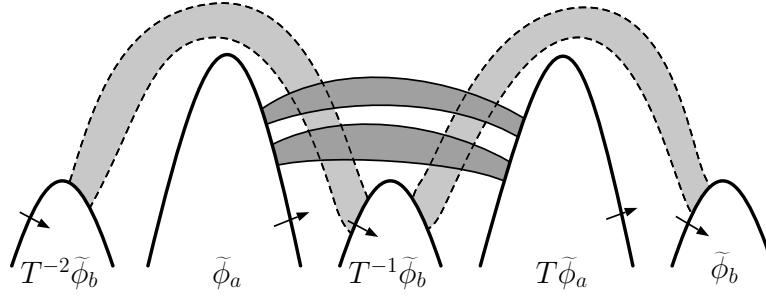


FIGURE 76. Apparition du fer à cheval.

mais ne font pas vraiment intervenir de nouvelles idées. Pour justifier rigoureusement l'existence d'un tel fer à cheval, les auteurs utilisent la théorie de l'indice de Conley; il est néanmoins très probable qu'un raisonnement basé sur l'invariant plus facile à manipuler qu'est l'indice de Lefschetz d'une courbe permette d'aboutir aux mêmes résultats. $\square$

A.4. Conséquences pour les ensembles de rotation

La première application de la théorie du forçage aux ensembles de rotation que nous décrirons résout un cas dans une conjecture de [FM90]; c'est le premier résultat décrivant un sous-ensemble convexe compact du plan qui n'est l'ensemble de rotation d'aucun homéo du tore (théorème 62 de [LCT18]).

Théorème A.17. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbb{R}^2$. Alors $\partial \text{rot}(\tilde{f})$ ne contient aucun segment à pente irrationnelle ayant un point rationnel dans son intérieur.

La seconde application concerne les homéos du tore ayant un ensemble de rotation d'intérieur non vide. Il retrouve le résultat de [LM91] concernant la positivité de l'entropie et améliore ceux de [AZ15b] (traitant la régularité $C^{1+\alpha}$) et [Dáv18] (traitant les ensembles de rotation polygonaux). C'est une combinaison des théorèmes 63 et 64 de [LCT18].

Ref Dev bor-
nées tore

Théorème A.18. — Soit $f \in \text{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ et $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\text{rot}(\tilde{f})$ est d'intérieur non vide. Alors

- f possède un fer à cheval topologique (et donc est d'entropie topologique positive) et
- il existe $L > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \geq 1$, on ait $d(\tilde{f}^n(z) - z, n \text{rot}(\tilde{f})) \leq L$.

Notons que la théorie du forçage a justement été construite sur les idées du travail de Pablo [Dáv18].

Le second point du théorème donne une vitesse de convergence vers l'ensemble de rotation. Plus précisément, l'ensemble de rotation peut être défini de la manière alternative suivante : étant donné un domaine fondamental $D \subset \mathbb{R}^2$ du tore, l'ensemble de rotation est la limite au sens de Hausdorff des ensembles $\tilde{f}^n(D)/n$. Le second point du théorème exprime que cette convergence se fait à vitesse au pire $O(1/n)$. Malheureusement, la constante L n'est pas vraiment explicite (elle dépend de l'isotopie maximale) et ce théorème ne peut donc pas être utilisé pour des applications au calcul explicite de l'ensemble de rotation.

Terminons les commentaires sur le théorème A.18 en notant qu'il admet un corollaire presque immédiat concernant le vecteur de rotation d'une mesure de proba invariante μ (voir la définition 5.1). Ce corollaire énonce que si l'homéo, en plus d'avoir un ensemble

de rotation d'intérieur non vide, préserve une mesure de support total μ , alors $\text{rot}_f(\mu) \in \text{int}(\text{rot}(f))$. Cela constitue une réponse positive à une question de Boyland.

La preuve du théorème [A.17](#) sur la forme du bord de l'ensemble de rotation utilise le même type d'arguments. Supposant que 0 est à l'intérieur d'une composante de bord de $\text{rot}(\tilde{f})$ qui est un segment à pente irrationnelle, on commence par voir que là aussi les feuilles du feuilletage transverse sont bornées. L'application du théorème ergodique d'Atkinson [[Atk76](#)] (outil classique de la théorie de la rotation) combinée à la théorie du forçage permettent ensuite de trouver un vecteur de rotation en dehors de l'ensemble de rotation : on aboutit à une contradiction.

LISTE D'EXEMPLES

galerie des horreurs

INDEX

- $[\gamma]$, voir classe d'homologie d'une géodésique
- $\cap_M$, voir markovienne
- $\langle T_1, \dots, T_k \rangle_+$, 88
- $\partial \tilde{S}$, 78
- $\sim$ relation d'équivalence sur les mesures ergo-
diques, 101
- $\vartheta(x)$, voir vitesse de fuite
- ϑ_μ , 91
- $\wedge$, 25
- admissibilité, 155
- annulaire, 49
- Atkinson, 57
- auto-intersection $\mathcal{F}$ -transverse, 155
- axe d'un automorphisme de revêtement, 78
- $\beta_f^n(x)$, 25
- bout d'un anneau, 146
- $\mathcal{C}^\dagger(S)$, voir graphe des courbes fin
- classe
 - fermée, 101
 - hyperbolique, 101
 - minimale, 101
- classe d'homologie d'une géodésique, 95
- cœur, 71
- connexion hétérocline, 136
- contractile, point fixe, 11
- conv, 21
- courbe, 4
 - fermée, 4
 - simple, 4
- couronne, 71
- d application de de Rham, 29
- déviations bornées
 - au sens homologique, 134
 - par rapport à une géodésique fermée, 126
 - par rapport à une lamination géodésique, 127
 - pour un homéo de $\mathbf{T}^2$, dans une direction v , 48
 - pour un homéo de $\mathbf{T}^2$, par rapport à $\text{rot}(\tilde{f})$, 50
- Δ diagonale de $\partial \tilde{S} \times \partial \tilde{S}$, 80
- $\Delta_I^n(x)$, 8
- δ_x , 24
- d_H , 15
- disque topologique, 4, 8
- distance de Hausdorff, 15
- domaine, 155
- droite, 152
- droite d'appui, 56
- droite de Brouwer, 153
- dynamiquement transverses, 96
- ensemble de rotation
 - d'un point, 8
 - de Misiurewicz-Ziemian, 8
 - des mesures, 19
 - ergodique, 19
 - gros, 132
 - homotopique, 81
 - ponctuel, 8
 - transverse, 120
- ensemble traçant, 93
- entièrement essentiel, 55
- équidistribution d'une géodésique sur une mesure, 92
- errant, 51
- essentiel, 49
 - point, 55, 77
 - ensemble, 52, 127
- $\text{Ess}(f)$, 55
- exactitude, 112
- exp, voir point exposé
- extr, voir point extrémal
- fer à cheval rotationnel, 88
- fermée, géodésique, 71
- fill, 148
- G graphe, 136
- $\mathcal{G}$, groupe des automorphismes de revêtement de S , 13
- généricité, 64
- géodésique traçante, 92
 - normalisée, 92
- γ_x , voir géodésique traçante normalisée
- gauche, 152
- genre, 4, 7
- graphe des courbes fin, 115
- Gromov-hyperbolique, 116
- $\text{Homeo}_0(S)$, 5
- $\text{Homeo}(\mathbf{R}^2, \mathbf{Z}^2)$, 37

- homotopiquement irréductible, 144
- I^1 , 101
- I_{fer} , 101
- $I_{\mathcal{F}}(z)$, 155
- I_h , 101
- I_{min} , 101
- inessentiel
 - point, 76
 - ensemble, 51, 127
- intersection $\mathcal{F}$ -transverse, 155
- isométrie
 - elliptique, 117
 - loxodromique, 117
 - parabolique, 117
 - non propre, 122
- $I^{\mathbb{Z}}$, 6
- $\mathcal{K}(H_1(S, \mathbf{R}))$, 135
- $\mathcal{K}(\mathbf{R}^2)$, 64
- Λ_i , 102
- Λ_μ , 93
- $\dot{\Lambda}_\mu$, 93
- lamination géodésique, 71
 - minimale, 71
 - remplissante, 72
- $\overline{\lim}_H$, 7
- longueur de translation, 117
- $\mathcal{M}(f)$, 19
- $\mathcal{M}_{\text{erg}}(f)$, 19
- $\mathcal{M}_{\text{erg}}^{\vartheta > 0}(f)$, 92
- markovienne, intersection, 86
- maximale, isotopie, 155
- $\mathcal{N}_i$, 101
- non errant, homéo, 55
- pantalon, 78
- φ_U , application de premier retour, 31
- $\pi_{\alpha, \beta}$, 80
- point
 - exposé, 111
 - extrémal, 20
- polygone idéal, 71
- pré-markovienne, intersection, 86
- propagation faible, 53
- pseudo-rotation, 50
- q_ω , 136
- quasi-minimal, 142
- ρ_i , 102
- $\rho_I(x)$, 8
- $\rho_I(\mu)$, voir vecteur de rotation d'une mesure
- R_ω , 136
- r_ω , 136
- $\text{rot}(f)$, voir ensemble de rotation de Misiurewicz-Ziemian
- $\text{rot}_{\text{erg}}(f)$, voir ensemble de rotation ergodique
- $\text{rot}^{\pi_1}(f)$, voir ensemble de rotation homotopique, voir ensemble traçant
- $\text{rot}_{\text{mes}}(f)$, voir ensemble de rotation des mesures
- $\text{rot}_{\text{MZ}}(f)$, voir ensemble de rotation de Misiurewicz-Ziemian
- $\text{rot}_{\text{pts}}(f)$, voir ensemble de rotation ponctuel
- $\tilde{S}$, 13
- séparante, courbe, 17, 78
- $\text{scl}(f)$, 117
- S_i , 108
- Svarč-Milnor, 95
- $\mathcal{T}$, 136
- τ_U , temps de premier retour, 31
- T_ω , 136
- transverse, chemin, 154
- twist de Dehn, 120
- $V_C(E)$ « banane », 127
- vecteur de rotation
 - d'un point, 8
 - d'une mesure, 19
 - homotopique, 80
- V_i , 102
- vitesse de fuite, 91

BIBLIOGRAPHIE

- [ABP23] J. ALONSO, J. BRUM & A. PASSEGGI – « On the structure of rotation sets in hyperbolic surfaces », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **107** (2023), no. 4, p. 1173–1241.
- [AG22] M. ANDERSSON & P.-A. GUIHÉNEUF – « Historic behaviour vs. physical measures for irrational flows with multiple stopping points », *Adv. Math.* **409** (2022), p. 71, Id/No 108626.
- [AK70a] D. V. ANOSOV & A. B. KATOK – « New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms », *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **23** (1970), p. 3–36.
- [AK70b] ———, « New examples of ergodic diffeomorphisms of smooth manifolds », *Uspehi Mat. Nauk* **25** (1970), no. 4(154), p. 173–174.
- [Ano88] D. V. ANOSOV – « On the behaviour in the Euclidean or Lobachevskij plane of trajectories that cover trajectories of flows on closed surfaces. I », *Math. USSR, Izv.* **30** (1988), no. 1, p. 15–38.
- [Ano95] ———, « Flows on closed surfaces and behavior of trajectories lifted to the universal covering plane », *J. Dyn. Control Syst.* **1** (1995), no. 1, p. 125–138.
- [Atk76] G. ATKINSON – « Recurrence of co-cycles and random walks », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **13** (1976), p. 486–488.
- [AZ02] S. ADDAS-ZANATA – « On the existence of a new type of periodic and quasi-periodic orbits for twist maps of the torus. », *Nonlinearity* **15** (2002), no. 5, p. 1399–1416.
- [AZ04] ———, « Instability for the rotation set of homeomorphisms of the torus homotopic to the identity », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **24** (2004), no. 2, p. 319–328.
- [AZ05] ———, « On properties of the vertical rotation interval for twist mappings », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **25** (2005), no. 3, p. 641–660.
- [AZ15a] ———, « Area-preserving diffeomorphisms of the torus whose rotation sets have non-empty interior », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **35** (2015), no. 1, p. 1–33.
- [AZ15b] ———, « Uniform bounds for diffeomorphisms of the torus and a conjecture of Boyland », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **91** (2015), no. 2, p. 537–553.
- [AZ20] ———, « A consequence of the growth of rotation sets for families of diffeomorphisms of the torus », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **40** (2020), no. 6, p. 1441–1458.
- [AZ25] ———, « On C^r -generic twist maps of T^2 », Preprint, arXiv :2507.22190 [math.DS] (2025), 2025.
- [AZdPJ21] S. ADDAS-ZANATA & B. DE PAULA JACOIA – « A condition that implies full homotopical complexity of orbits for surface homeomorphisms », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **41** (2021), no. 1, p. 1–47.

- [AZK22] S. ADDAS-ZANATA & A. KOROPECKI – « Homotopically unbounded disks for generic surface diffeomorphisms », *Trans. Am. Math. Soc.* **375** (2022), no. 8, p. 5859–5888.
- [AZL22] S. ADDAS-ZANATA & X.-C. LIU – « On stable and unstable behaviour of certain rotation segments », *Nonlinearity* **35** (2022), no. 11, p. 5813–5851.
- [AZLC18] S. ADDAS-ZANATA & P. LE CALVEZ – « Rational mode locking for homeomorphisms of the 2-torus », *Proc. Am. Math. Soc.* **146** (2018), no. 4, p. 1551–1570.
- [AZT24] S. ADDAS-ZANATA & F. A. TAL – « Mather’s regions of instability for annulus diffeomorphisms », *Bull. Lond. Math. Soc.* **56** (2024), no. 3, p. 1129–1148.
- [AZTG14] S. ADDAS-ZANATA, F. A. TAL & B. A. GARCIA – « Dynamics of homeomorphisms of the torus homotopic to Dehn twists », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **34** (2014), no. 2, p. 409–422.
- [BB13] F. BÉGUIN & Z. R. BOUBAKER – « Existence of orbits with non-zero torsion for certain types of surface diffeomorphisms », *J. Math. Soc. Japan* **65** (2013), no. 1, p. 137–168.
- [BBF15] M. BESTVINA, K. BROMBERG & K. FUJIWARA – « Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups », *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **122** (2015), p. 1–64.
- [BBF16] ———, « Stable commutator length on mapping class groups », *Ann. Inst. Fourier* **66** (2016), no. 3, p. 871–898.
- [BBFS] M. BESTVINA, K. BROMBERG, K. FUJIWARA & A. SISTO – « Projection complex, revisited : a sample », <https://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/acylind-super-short.pdf>.
- [BCJLR09] F. BÉGUIN, S. CROVISIER, T. JÄGER & F. LE ROUX – « Denjoy constructions for fibered homeomorphisms of the torus », *Trans. Am. Math. Soc.* **361** (2009), no. 11, p. 5851–5883.
- [BCLR07] F. BÉGUIN, S. CROVISIER & F. LE ROUX – « Construction of curious minimal uniquely ergodic homeomorphisms on manifolds : The Denjoy-Rees technique », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **40** (2007), no. 2, p. 251–308.
- [BCLR19] ———, « Projective transformations of rotation sets », *Nonlinearity* **32** (2019), no. 4, p. 1237.
- [BCLR20] ———, « Fixed point sets of isotopies on surfaces », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **22** (2020), no. 6, p. 1971–2046.
- [BdCH16] P. BOYLAND, A. DE CARVALHO & T. HALL – « New rotation sets in a family of torus homeomorphisms », *Invent. Math.* **204** (2016), no. 3, p. 895–937.
- [Bég07] F. BÉGUIN – « Ensembles de rotations des homéomorphismes du tore T^2 », 2007, Méthodes topologiques en dynamique des surfaces.
- [Bég11] ———, « Quelques questions de dynamique, relativité générale, dynamique en relativité générale », Mémoire d’HDR, 2011.
- [BH92] M. BESTVINA & M. HANDEL – « An area preserving homeomorphism of T^2 that is fixed point free but does not move any essential simple closed curve off itself », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **12** (1992), no. 4, p. 673–676.
- [BHM⁺22] J. BOWDEN, S. HENSEL, K. MANN, E. MILITON & R. WEBB – « Rotation sets and actions on curves », *Adv. Math.* **408** (2022), p. 33, Id/No 108579.
- [BHW22] J. BOWDEN, S. HENSEL & R. WEBB – « Quasi-morphisms on surface diffeomorphism groups », *J. Am. Math. Soc.* **35** (2022), no. 1, p. 211–231.
- [BHW24] ———, « Towards the boundary of the fine curve graph », 2024.

- [BLV21] W. BONOMO, H. LIMA & P. VARANDAS – « The rotation sets of most volume preserving homeomorphisms on $\mathbb{T}^d$ are stable, convex and rational polyhedrons », *Isr. J. Math.* **243** (2021), no. 1, p. 81–102.
- [BMS25] K. W. BOOTH, D. MINAHAN & R. SHAPIRO – « Automorphisms of the fine 1-curve graph », *Geom. Dedicata* **219** (2025), no. 5, p. 20, Id/No 68.
- [Bon06] M. BONINO – « Around brouwer's theory of fixed point free planar homeomorphisms », 2006, lecture notes for summer school "Méthodes topologiques en dynamique des surfaces" (Grenoble).
- [Boy92] P. BOYLAND – « Rotation sets and monotone periodic orbits for annulus homeomorphisms », *Comment. Math. Helv.* **67** (1992), no. 2, p. 203–213.
- [Boy94] ———, « Topological methods in surface dynamics », *Topology Appl.* **58** (1994), no. 3, p. 223–298.
- [Boy99] ———, « Isotopy stability of dynamics on surfaces », in *Geometry and topology in dynamics.*, Providence, RI : American Mathematical Society, 1999, p. 17–45.
- [Boy00] ———, « New dynamical invariants on hyperbolic manifolds », *Isr. J. Math.* **119** (2000), p. 253–289.
- [Boy09] ———, « Transitivity of surface dynamics lifted to Abelian covers », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **29** (2009), no. 5, p. 1417–1449.
- [Bro12] L. E. J. BROUWER – « Beweis des ebenen Translationssatzes », *Math. Ann.* **72** (1912), no. 1, p. 37–54.
- [Bru74] P. BRUNOVSKY – « Generic properties of the rotation number of one-parameter diffeomorphisms of the circle », *Czech. Math. J.* **24** (1974), p. 74–90.
- [BS88] M. BARGE & R. SWANSON – « Rotation shadowing properties of circle and annulus maps », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **8** (1988), no. 4, p. 509–521.
- [BT13] R. B. BORTOLATTO & F. A. TAL – « Ergodicity and annular homeomorphisms of the torus », *Qual. Theory Dyn. Syst.* **12** (2013), no. 2, p. 377–391.
- [CB88] A. J. CASSON & S. A. BLEILER – *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [CGPT25] M. J. CAPIŃSKI, M. GRÖGER, A. PASSEGGI & F. A. TAL – « Conditions Implying Annular Chaos : Quantitative results and Computer Assisted Proofs », Preprint, arXiv :2506.06608 [math.DS] (2025), 2025.
- [CK19] V. CYR & B. KRA – « Counting generic measures for a subshift of linear growth », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21** (2019), no. 2, p. 355–380.
- [CM15] J. CHAIKA & H. MASUR – « There exists an interval exchange with a non-ergodic generic measure », *J. Mod. Dyn.* **9** (2015), p. 289–304.
- [Con18] J. CONEJEROS – « The local rotation set is an interval », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **38** (2018), no. 7, p. 2571–2617.
- [Cro06] S. CROVISIER – « Exotic rotations », 2006, Méthodes topologiques en dynamique des surfaces.
- [CT20] J. CONEJEROS & F. A. TAL – « Existence of non-contractible periodic orbits for homeomorphisms of the open annulus », *Math. Z.* **294** (2020), no. 3-4, p. 1413–1439.

- [CT23] J. CONEJEROS & F. A. TAL – « Applications of forcing theory to homeomorphisms of the closed annulus », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **56** (2023), no. 4, p. 1155–1197.
- [Dáv16] P. DÁVALOS – « Dynamical models for some torus homeomorphisms », in *Mexican mathematicians abroad : recent contributions. First workshop “Matemáticos Mexicanos Jóvenes en el Mundo”, Guanajuato, Mexico, August 22–24, 2012*, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2016, p. 75–84.
- [Dáv18] ———, « On annular maps of the torus and sublinear diffusion », *J. Inst. Math. Jussieu* **17** (2018), no. 4, p. 913–978.
- [dCH02] A. DE CARVALHO & T. HALL – « The forcing relation for horseshoe braid types », *Exp. Math.* **11** (2002), no. 2, p. 271–288.
- [dFG24] E. DE FARIA & P. GUARINO – « Smooth conjugacies to rotations », p. 73–101, Springer Nature Switzerland, Cham, 2024.
- [DGS76] M. DENKER, C. GRILLENBERGER & K. SIGMUND – *Ergodic theory on compact spaces*, Lect. Notes Math., vol. 527, Springer, Cham, 1976.
- [DM97] E. DOEFF & M. MISIUREWICZ – « Shear rotation numbers », *Nonlinearity* **10** (1997), no. 6, p. 1755–1762.
- [Doe97] E. DOEFF – « Rotation measures for homeomorphisms of the torus homotopic to a Dehn twist », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **17** (1997), no. 3, p. 575–591.
- [dSG22] H.-P. DE SAINT GERVAIS – « Analysis situs, revêtement universel de quelques surfaces », 2014-2022.
- [DSU17] T. DAS, D. SIMMONS & M. URBAŃSKI – *Geometry and dynamics in Gromov hyperbolic metric spaces : with an emphasis on non-proper settings*, Math. Surv. Monogr., vol. 218, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2017.
- [EGLL09] H. ENRICH, N. GUELMAN, A. LARCANCHÉ & I. LIOUSSE – « Diffeomorphisms having rotation sets with non-empty interior », *Nonlinearity* **22** (2009), no. 8, p. 1899–1907.
- [Ein24] N. EINABADI – « Torus diffeomorphisms with parabolic and non-proper actions on the fine curve graph and their generalized rotation sets », Preprint, arXiv :2405.19123 [math.DS] (2024), 2024.
- [Eps66] D. B. A. EPSTEIN – « Curves on 2-manifolds and isotopies », *Acta Math.* **115** (1966), p. 83–107.
- [Fay02] B. FAYAD – « Weak mixing for reparameterized linear flows on the torus », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **22** (2002), no. 1, p. 187–201.
- [FH03] J. FRANKS & M. HANDEL – « Periodic points of Hamiltonian surface diffeomorphisms », *Geom. Topol.* **7** (2003), p. 713–756.
- [FH12] ———, « Entropy zero area preserving diffeomorphisms of S^2 », *Geom. Topol.* **16** (2012), no. 4, p. 2187–2284.
- [FK04] B. FAYAD & A. KATOK – « Constructions in elliptic dynamics », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **24** (2004), no. 5, p. 1477–1520.
- [FM90] J. FRANKS & M. MISIUREWICZ – « Rotation sets of toral flows », *Proc. Am. Math. Soc.* **109** (1990), no. 1, p. 243–249.
- [FM12] B. FARB & D. MARGALIT – *A primer on mapping class groups (pms-49)*, Princeton University Press, 2012.

- [Fra88a] J. FRANKS – « Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem », *Ann. Math. (2)* **128** (1988), no. 1, p. 139–151.
- [Fra88b] ———, « Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8*** (1988), no. Charles Conley Memorial Issue, p. 99–107.
- [Fra89] ———, « Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **311** (1989), no. 1, p. 107–115.
- [Fra92] ———, « Geodesics on S^2 and periodic points of annulus homeomorphisms », *Invent. Math.* **108** (1992), no. 2, p. 403–418.
- [Fra95] ———, « The rotation set and periodic points for torus homeomorphisms », in *Dynamical systems and chaos. Vol. 1 : Mathematics, engineering and economics. Proceedings of the international conference, Hachioji, Japan, May 23–27, 1994*, Singapore : World Scientific, 1995, p. 41–48.
- [Fra96a] ———, « Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero », *New York J. Math.* **2** (1996), p. 1–19.
- [Fra96b] ———, « Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms », *Trans. Am. Math. Soc.* **348** (1996), no. 7, p. 2637–2662.
- [Fur61] H. FURSTENBERG – « Strict ergodicity and transformation of the torus », *Am. J. Math.* **83** (1961), p. 573–601.
- [GdlH90] E. GHYS & P. DE LA HARPE (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. (On the hyperbolic groups à la M. Gromov)*, Prog. Math., vol. 83, Boston, MA : Birkhäuser, 1990 (French).
- [GK17] P.-A. GUIHÉNEUF & A. KOROPECKI – « Stability of the rotation set of area-preserving toral homeomorphisms », *Nonlinearity* **30** (2017), no. 3, p. 1089–1096.
- [GKT14] N. GUELMAN, A. KOROPECKI & F. A. TAL – « A characterization of annularity for area-preserving toral homeomorphisms », *Math. Z.* **276** (2014), no. 3-4, p. 673–689.
- [GKT15] ———, « Rotation sets with non-empty interior and transitivity in the universal covering », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **35** (2015), no. 3, p. 883–894.
- [GL18] P.-A. GUIHÉNEUF & T. LEFEUVRE – « On the genericity of the shadowing property for conservative homeomorphisms », *Proc. Am. Math. Soc.* **146** (2018), no. 10, p. 4225–4237.
- [GLCP25] P.-A. GUIHÉNEUF, P. LE CALVEZ & A. PASSEGGI – « Area preserving homeomorphisms of surfaces with rational rotational direction », *Ann. Henri Lebesgue* **8** (2025), p. 329–372.
- [GLCPT26] P.-A. GUIHÉNEUF, P. LE CALVEZ, A. PASSEGGI & F. A. TAL – « Area preserving surface homeomorphisms without horseshoe », 2026, in preparation.
- [GLR24] P.-A. GUIHÉNEUF & F. LE ROUX – « Dynamique des homéomorphismes du tore et graphe fin des courbes », 2024.
- [GM23] P.-A. GUIHÉNEUF & E. MILITON – « Hyperbolic isometries of the fine curve graph of higher genus surfaces », 2023, to appear in *Commentarii Mathematici Helvetici*.
- [GM24] ———, « Parabolic isometries of the fine curve graph of the torus », *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **129** (2024), no. 2, p. 27, Id/No e12625.
- [GM25] ———, « Homotopic rotation sets for higher genus surfaces », *Mem. Amer. Math. Soc.* **314** (2025), no. 1593, p. v+110.
- [Gra91] J. GRACZYK – « Harmonic scaling for smooth families of diffeomorphisms of the circle », *Nonlinearity* **4** (1991), no. 3, p. 935–959.

- [Gro87] M. GROMOV – « Hyperbolic groups », *Essays in group theory*, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 8, 75-263 (1987), 1987.
- [GSG24] A. GARCÍA-SASSI, P.-A. GUIHÉNEUF & P. LESSA – « Geodesic tracking and the shape of ergodic rotation sets », 2024.
- [GST24] A. GARCÍA-SASSI & F. A. TAL – « Fully chaotic conservative models for some torus homeomorphisms », 2024.
- [GT25a] P.-A. GUIHÉNEUF & F. A. TAL – « Bounded deviations in higher genus I : closed geodesics », 2025, arXiv : 2511.14222.
- [GT25b] ———, « Bounded deviations in higher genus II : minimal laminations », 2025, arXiv : 2511.14226.
- [Gui15] P.-A. GUIHÉNEUF – « How roundoff errors help to compute the rotation set of torus homeomorphisms », *Topology Appl.* **193** (2015), p. 116–139.
- [Gui16] ———, « Instability for the rotation set of diffeomorphisms of the torus homotopic to the identity », 2016.
- [Gui21] ———, « Forcing theory for surface homeomorphisms (after Le Calvez and Tal) », in *Séminaire Bourbaki. Volume 2019/2021. Exposés 1166–1180.*, SMF, 2021, p. 159–181, ex.
- [Gui25a] ———, « A rotational hyperbolic theory for surface homeomorphisms », 2025, arXiv : 2511.14232.
- [Gui25b] ———, « Surface homeomorphisms with big rotation set », 2025, arXiv : 2511.15220.
- [GZ17] V. GRINES & E. ZHUZHOMA – « Around Anosov-Weil theory », in *Modern theory of dynamical systems. A tribute to Dmitry Victorovich Anosov*, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2017, p. 123–154.
- [Ham66] M.-E. HAMSTROM – « Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold », *Ill. J. Math.* **10** (1966), p. 563–573.
- [Han85] M. HANDEL – « Global shadowing of pseudo-Anosov homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **5** (1985), p. 373–377.
- [Han86] ———, « Zero entropy surface diffeomorphisms », *preprint* (1986).
- [Han89] ———, « Periodic point free homeomorphism of T^2 », *Proc. Am. Math. Soc.* **107** (1989), no. 2, p. 511–515.
- [Han90] ———, « The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed », *Commun. Math. Phys.* **127** (1990), no. 2, p. 339–349.
- [Hay95] E. HAYAKAWA – « A sufficient condition for the existence of periodic points of homeomorphisms on surfaces », *Tokyo J. Math.* **18** (1995), no. 1, p. 213–219.
- [Her83] M. R. HERMAN – « Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2 », *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), p. 453–502 (French).
- [HLR25] S. HENSEL & F. LE ROUX – « Rotation sets and axes in the fine curve graph for torus homeomorphisms », 2025.
- [Hom53] T. HOMMA – « An extension of the Jordan curve theorem », *Yokohama Math. J.* **1** (1953), p. 125–129.
- [HUL01] J.-B. HIRIART-URRUTY & C. LEMARÉCHAL – *Fundamentals of convex analysis*, Grundlehren Text Edit., Berlin : Springer, 2001.

- [IHY03] Y. IMAYOSHI, M. ITO & H. YAMAMOTO – « On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces with two specified points », *Osaka J. Math.* **40** (2003), no. 3, p. 659–685.
- [Jäg09a] T. JÄGER – « The concept of bounded mean motion for toral homeomorphisms », *Dyn. Syst.* **24** (2009), no. 3, p. 277–297.
- [Jäg09b] ———, « Linearization of conservative toral homeomorphisms », *Invent. Math.* **176** (2009), no. 3, p. 601–616.
- [Jau14] O. JAULENT – « Existence d'un feuilletage positivement transverse à un homéomorphisme de surface », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **64** (2014), no. 4, p. 1441–1476.
- [JKT21] T. JÄGER, A. KOROPECKI & F. A. TAL – « On the onset of diffusion in the kicked Harper model », *Commun. Math. Phys.* **383** (2021), no. 2, p. 953–980.
- [JP15] T. JÄGER & A. PASSEGGI – « On torus homeomorphisms semiconjugate to irrational rotations », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **35** (2015), no. 7, p. 2114–2137.
- [JS06] T. H. JÄGER & J. STARK – « Towards a classification for quasiperiodically forced circle homeomorphisms », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **73** (2006), no. 3, p. 727–744.
- [JT17] T. JÄGER & F. TAL – « Irrational rotation factors for conservative torus homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **37** (2017), no. 5, p. 1537–1546.
- [Kac47] M. KAC – « On the notion of recurrence in discrete stochastic processes », *Bull. Am. Math. Soc.* **53** (1947), p. 1002–1010.
- [Kat73] A. KATOK – « Invariant measures of flows on oriented surfaces », *Sov. Math., Dokl.* **14** (1973), p. 1104–1108.
- [Kat80] ———, « Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1980), no. 51, p. 137–173.
- [KK08] A. KOCSARD & A. KOROPECKI – « Free curves and periodic points for torus homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **28** (2008), no. 6, p. 1895–1915.
- [KK09] ———, « A mixing-like property and inexistence of invariant foliations for minimal diffeomorphisms of the 2-torus », *Proc. Am. Math. Soc.* **137** (2009), no. 10, p. 3379–3386.
- [Kla22] E. KLARREICH – « The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space », *Groups Geom. Dyn.* **16** (2022), no. 2, p. 705–723.
- [KLCN15] A. KOROPECKI, P. LE CALVEZ & M. NASSIRI – « Prime ends rotation numbers and periodic points », *Duke Math. J.* **164** (2015), no. 3, p. 403–472.
- [KLCT19] A. KOROPECKI, P. LE CALVEZ & F. A. TAL – « A triple boundary lemma for surface homeomorphisms », *Proc. Am. Math. Soc.* **147** (2019), no. 2, p. 681–686.
- [KN18] A. KOROPECKI & M. NASSIRI – « Boundary dynamics for surface homeomorphisms », in *Proceedings of the international congress of mathematicians 2018, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume III. Invited lectures*, Hackensack, NJ : World Scientific; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018, p. 1995–2015.
- [Koc21a] A. KOCSARD – « On the dynamics of minimal homeomorphisms of $\mathbb{T}^2$ which are not pseudo-rotations », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **54** (2021), no. 4, p. 991–1034.
- [Koc21b] ———, « Periodic point free homeomorphisms and irrational rotation factors », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **41** (2021), no. 10, p. 2946–2982.
- [Kor17] A. KOROPECKI – « Realizing rotation numbers on annular continua », *Math. Z.* **285** (2017), no. 1-2, p. 549–564.

- [KPS21] A. KOROPECKI, A. PASSEGGI & M. SAMBARINO – « The Franks-Misiurewicz conjecture for extensions of irrational rotations », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **54** (2021), no. 4, p. 1035–1049.
- [Kra81] I. KRA – « On the Nielsen-Thurston-Bers type of some self-maps of Riemann surfaces », *Acta Math.* **146** (1981), no. 3-4, p. 231–270.
- [KT14a] A. KOROPECKI & F. A. TAL – « Area-preserving irrotational diffeomorphisms of the torus with sublinear diffusion », *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 10, p. 3483–3490.
- [KT14b] ———, « Bounded and unbounded behavior for area-preserving rational pseudo-rotations », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **109** (2014), no. 3, p. 785–822.
- [KT14c] ———, « Strictly toral dynamics », *Invent. Math.* **196** (2014), no. 2, p. 339–381.
- [KT16] ———, « Fully essential dynamics for area-preserving surface homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **38** (2016), no. 5, p. 1791–1836.
- [Kwa92] J. KWAPISZ – « Every convex polygon with rational vertices is a rotation set », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **12** (1992), no. 2, p. 333–339.
- [Kwa93] ———, « An estimate of entropy for toroidal chaos », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **13** (1993), no. 1, p. 123–129.
- [Kwa95a] ———, « Rotation sets and entropy », Thèse, SUNY at Stony Brook, 1995.
- [Kwa95b] ———, « A toral diffeomorphism with a nonpolygonal rotation set », *Nonlinearity* **8** (1995), no. 4, p. 461–476.
- [Kwa02] ———, « A priori degeneracy of one-dimensional rotation sets for periodic point free torus maps », *Trans. Am. Math. Soc.* **354** (2002), no. 7, p. 2865–2895.
- [Kwa07] ———, « A toral flow with a pointwise rotation set that is not closed », *Nonlinearity* **20** (2007), no. 9, p. 2047–2060.
- [LC04a] P. LE CALVEZ – « Une version feuilletée du théorème de translation de Brouwer », *Comment. Math. Helv.* **79** (2004), no. 2, p. 229–259.
- [LC04b] ———, « Unlinked invariant sets of diffeomorphisms of the torus and the annulus », *Invent. Math.* **155** (2004), no. 3, p. 561–603 (French).
- [LC05] ———, « Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2005), no. 102, p. 1–98.
- [LC06a] ———, « From Brouwer theory to the study of homeomorphisms of surfaces », in *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 77–98.
- [LC06b] ———, « Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces », *Duke Math. J.* **133** (2006), no. 1, p. 125–184.
- [LC08] ———, « Why do the periodic points of homeomorphisms of the Euclidean plane rotate around certain fixed points? », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **41** (2008), no. 1, p. 141–176 (French).
- [LC22] ———, « Conservative surface homeomorphisms with finitely many periodic points », in *Symplectic geometry. A festschrift in honour of Claude Viterbo's 60th birthday. In 2 volumes*, Cham : Birkhäuser, 2022, p. 827–862.
- [LCS25] P. LE CALVEZ & M. SAMBARINO – « Homologically non-trivial periodic orbits for generic Hamiltonian diffeomorphisms of surfaces », *J. Mod. Dyn.* **21** (2025), p. 241–270.
- [LCT18] P. LE CALVEZ & F. A. TAL – « Forcing theory for transverse trajectories of surface homeomorphisms », *Invent. Math.* **212** (2018), no. 2, p. 619–729.

- [LCT22] ———, « Topological horseshoes for surface homeomorphisms », *Duke Math. J.* **171** (2022), no. 12, p. 2519–2626.
- [Lel23] G. LELLOUCH – « On rotation sets for surface homeomorphisms in genus ≥ 2 », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2023), no. 178, p. iv+121.
- [Les11] P. LESSA – « Rotation vectors for homeomorphisms of non-positively curved manifolds », *Nonlinearity* **24** (2011), no. 11, p. 3237–3266.
- [Les12] ———, « Two fixed points can force positive entropy of a homeomorphism on a hyperbolic surface », 2012.
- [LM91] J. LLIBRE & R. S. MACKAY – « Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity », *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 1991.
- [LMP⁺25] A. LONG, D. MARGALIT, A. PHAM, Y. VERBERNE & C. YAO – « Automorphisms of the fine curve graph », *Trans. Am. Math. Soc.* **378** (2025), no. 8, p. 5259–5277.
- [LR04] F. LE ROUX – *Homéomorphismes de surfaces, théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable*, Astérisque, vol. 292, Paris : Société Mathématique de France, 2004 (French).
- [LR13] ———, *L'ensemble de rotation autour d'un point fixe*, Astérisque, vol. 350, Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2013 (French).
- [LRPSW24] F. LE ROUX, A. PASSEGGI, M. SAMBARINO & M. WOLFF – « A note on weak conjugacy for homeomorphisms of surfaces », 2024.
- [LRS22] F. LE ROUX & S. SEYFADDINI – « The Anosov-Katok method and pseudo-rotations in symplectic dynamics », in *Symplectic geometry. A festschrift in honour of Claude Viterbo's 60th birthday. In 2 volumes*, Cham : Birkhäuser, 2022, p. 863–901.
- [LRW24] F. LE ROUX & M. WOLFF – « Automorphisms of some variants of fine graphs », *Algebr. Geom. Topol.* **24** (2024), no. 8, p. 4697–4730.
- [LT24] X.-C. LIU & F. A. TAL – « On non-contractible periodic orbits and bounded deviations », *Nonlinearity* **37** (2024), no. 7, p. 26, Id/No 075007.
- [LV21] H. LIMA & P. VARANDAS – « On the rotation sets of generic homeomorphisms on the torus $\mathbb{T}^d$ », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **41** (2021), no. 10, p. 2983–3022.
- [Mas22] H. MASUR – « Generic measures for translation surface flows », *J. Mod. Dyn.* **18** (2022), p. 495–521.
- [Mat82] J. N. MATHER – « Existence of quasi-periodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus », *Topology* **21** (1982), p. 457–467.
- [Mat97] S. MATSUMOTO – « Rotation sets of surface homeomorphisms », *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **28** (1997), no. 1, p. 89–101.
- [Mat00] S. MATSUMOTO – « Arnold conjecture for surface homeomorphisms », *Topology Appl.* **104** (2000), no. 1-3, p. 191–214.
- [McM13] C. T. MCMULLEN – « Diophantine and ergodic foliations on surfaces », *J. Topol.* **6** (2013), no. 2, p. 349–360.
- [Mil24] E. MILITON – « Generalized foliations for homeomorphisms isotopic to a pseudo-anosov homeomorphism : a geometric realization of a result by Fathi », 2024.
- [Mis80] M. MISIUREWICZ – « Horseshoes for continuous mappings of an interval », in *Dynamical systems (Bressanone, 1978)*, Liguori, Naples, 1980, p. 125–135.
- [Mis06] ———, « Rotation theory », in *Online Proceedings of the RIMS Workshop "Dynamical Systems and Applications : Recent Progress"*, 2006.

- [MM99] H. A. MASUR & Y. N. MINSKY – « Geometry of the complex of curves. I : Hyperbolicity », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 1, p. 103–149.
- [MM00] H. A. MASUR & Y. N. MINSKY – « Geometry of the complex of curves. II : Hierarchical structure », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), no. 4, p. 902–974.
- [MT02] H. MASUR & S. TABACHNIKOV – « Rational billiards and flat structures », in *Handbook of dynamical systems. Volume 1A*, Amsterdam : North-Holland, 2002, p. 1015–1089.
- [MV23] N. G. MARKLEY & M. VANDERSCHOOT – *Flows on compact surfaces. The Weil-Hedlund-Anosov program*, Birkhäuser Adv. Texts, Basler Lehrbüch., Cham : Birkhäuser, 2023.
- [MZ90] M. MISIUREWICZ & K. ZIEMIAN – « Rotation sets for maps of tori », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **40** (1990), no. 3, p. 490–506.
- [MZ91] ———, « Rotation sets and ergodic measures for torus homeomorphisms », *Fundam. Math.* **137** (1991), no. 1, p. 45–52.
- [Nit71] Z. NITECKI – « On semi-stability for diffeomorphisms », *Invent. Math.* **14** (1971), p. 83–122.
- [NT23] P. V. NUNES & F. A. TAL – « Transitivity and the existence of horseshoes on the 2-torus », *Nonlinearity* **36** (2023), no. 1, p. 199–230.
- [Oxt53] J. OXTOBY – « Stepanoff flows on the torus », *Proceedings of the American Mathematical Society* **4** (1953), no. 6, p. 982–987.
- [Par06] K. PARWANI – « Simple braids for surface homeomorphisms », *Topology Appl.* **153** (2006), no. 18, p. 3413–3419.
- [Pas14] A. PASSEGGI – « Rational polygons as rotation sets of generic homeomorphisms of the two torus », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **89** (2014), no. 1, p. 235–254.
- [PBC25] B. PERROT, J. BOROŃSKI & A. CLARK – « On roundness of rotation sets », 2025.
- [Pol92] M. POLLICOTT – « Rotation sets for homeomorphisms and homology », *Trans. Am. Math. Soc.* **331** (1992), no. 2, p. 881–894.
- [PPGJ17] K. POLOTZEK, K. PADBERG-GEHLE & T. JÄGER – « Set-oriented numerical computation of rotation sets », *J. Comput. Dyn.* **4** (2017), no. 1-2, p. 119–141.
- [PPS18] A. PASSEGGI, R. POTRIE & M. SAMBARINO – « Rotation intervals and entropy on attracting annular continua », *Geom. Topol.* **22** (2018), no. 4, p. 2145–2186.
- [Pra25] R. PRASAD – « Periodic points of rational area-preserving homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **45** (2025), no. 9, p. 2890–2907.
- [PS13] A. PASSEGGI & M. SAMBARINO – « Examples of minimal diffeomorphisms on $\mathbb{T}^2$ semiconjugate to an ergodic translation », *Fundam. Math.* **222** (2013), no. 1, p. 63–97.
- [PS20] ———, « Deviations in the Franks-Misiurewicz conjecture », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **40** (2020), no. 9, p. 2533–2540.
- [PT25] A. PASSEGGI & F. A. TAL – « Conditions implying annular chaos », Preprint, arXiv :2305.02963 [math.DS] (2025), 2025.
- [Ree81] M. REES – « A minimal positive entropy homeomorphism of the 2-torus », *J. London Math. Soc. (2)* **23** (1981), no. 3, p. 537–550.
- [Sau01] A. SAUZET – « Applications des décompositions libres à la dynamique des homéomorphismes de surface », Thèse, Paris 13, 2001.

- [Sch57] S. SCHWARTZMAN – « Asymptotic cycles », *Ann. of Math. (2)* **66** (1957), p. 270–284.
- [Sch21] N. O. N. SCHUBACK – « A synthesis on classical brouwer theory », 2021, Master's Dissertation.
- [Sha64] O. M. SHARKOVSKY – « Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself », *Ukrain. Mat. Ž.* **16** (1964), p. 61–71.
- [SS75] M. SHUB & D. SULLIVAN – « Homology theory and dynamical systems », *Topology* **14** (1975), p. 109–132.
- [SST22] G. SILVA SALOMÃO & F. A. TAL – « Non-existence of sublinear diffusion for a class of torus homeomorphisms », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **42** (2022), no. 4, p. 1517–1547.
- [SSV10] R. SAGHIN, W. SUN & E. VARGAS – « On Dirac physical measures for transitive flows », *Commun. Math. Phys.* **298** (2010), no. 3, p. 741–756.
- [Ste36] V. STEPANOV – « Sur une extension du théorème ergodique », *Compositio Mathematica* **3** (1936), p. 239–253.
- [Str35] S. STRASZEWICZ – « Über exponierte Punkte abgeschlossener Punktmengen », *Fundamenta Mathematicae* **24** (1935), no. 1, p. 139–143 (german).
- [SW96] R. SWANSON & R. WALKER – « Boundaries of rotation sets for homeomorphisms of the n -torus », *Proc. Am. Math. Soc.* **124** (1996), no. 10, p. 3247–3255.
- [Tal12] F. A. TAL – « Transitivity and rotation sets with nonempty interior for homeomorphisms of the 2-torus », *Proc. Am. Math. Soc.* **140** (2012), no. 10, p. 3567–3579.
- [TAZ07] F. A. TAL & S. ADDAS-ZANATA – « On periodic points of area preserving torus homeomorphisms », *Far East J. Dyn. Syst.* **9** (2007), no. 3, p. 371–378.
- [Tho92] C. THOMASSEN – « The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces », *Am. Math. Mon.* **99** (1992), no. 2, p. 116–130.
- [Var22] P. VARANDAS – « Realization of rotation vectors for volume preserving homeomorphisms of the torus », *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **60** (2022), no. 2, p. 441–455.
- [Vee69] W. A. VEECH – « Strict ergodicity in zero dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2 », *Trans. Am. Math. Soc.* **140** (1969), p. 1–33.
- [Wal95] J. A. WALSH – « Directions for structurally stable flows on surfaces via rotation vectors », *Topology Appl.* **66** (1995), no. 1, p. 49–65.
- [Wei31] A. WEIL – « On systems of curves on a ring-shaped surface. », *J. Indian Math. Soc.* **19** (1931), p. 109–114.
- [Wei36] ———, « Les familles de courbes sur le tore. », *Rec. Math. Moscou, n. Ser. 1* (1936), p. 779–782 (French).
- [Yan85] K. YANO – « Asymptotic cycles on two dimensional manifolds », *Foliations, Proc. Symp., Tokyo 1983, Adv. Stud. Pure Math.* **5**, 359–377 (1985)., 1985.
- [ZG04] P. ZGLICZYŃSKI & M. GIDEA – « Covering relations for multidimensional dynamical systems », *J. Differential Equations* **202** (2004), no. 1, p. 32–58.