Séance du 30/11/2012 du club de maths d'Orsay — Suites récurrentes réelles

Pendant toute cette séance, E sera un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels et f désignera une fonction allant de E dans E. On désignera par $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par la condition initiale $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Durant toute cette séance nous aurons besoin des notions de continuité et de limite. On dit qu'une fonction f admet la *limite* ℓ en x si pour tout (petit) intervalle I contenant ℓ, il existe un intervalle J contenant x tel que $f(J) \subset I$. Une fonction est dite *continue* si elle admet une limite en tous points [1].

Un théorème qui servira tout au long de cette séance est le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème. *Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, alors pour tout réel z compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = z$.*

Quelques exercices nécessitent l'utilisation de théorèmes assez fins de topologie de $\mathbf{R}$; ces résultats se situent dans l'annexe à la fin de cette feuille d'exercices.

1 Rappels et exercices de base

Exercice 1 (Délicat, voire pénible, mais instructif)
Montrer l'existence et l'unicité d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice 2 (Version "light" de l'exercice précédent)
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in E$.

Exercice 3
Montrer que si $f(x) \geq x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Exercice 4
Montrer que si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque f est décroissante ?

Exercice 5
Montrer que si f est continue et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

1. Ce qui est le cas par exemple des fonctions "classiques" : fonctions affines, polynomiales, racine carrée, fonctions trigonométriques sur tout intervalle où elles sont définies, fonctions logarithme et exponentielle... La classe des fonctions continues est stable par addition, produit, multiplication par un réel ou composition.

Exercice 6 (Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, homographiques)
On s'intéresse ici à quelques suites très classiques.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Montrer que si $E = \mathbf{R}$ et $f(x) = x + a$, alors $u_n = u_0 + na$ pour tout n.
2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que si $E = \mathbf{R}$ et $f(x) = \lambda x$, alors $u_n = \lambda^n u_0$ pour tout n. Pour quelles valeurs de λ la suite converge-t-elle ?
3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $a \in \mathbf{R}$. On suppose que $E = \mathbf{R}$ et $f(x) = \lambda x + a$. Quelle est la formule qui donne u_n en fonction de n ?
4. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tels que $ad - bc \neq 0$, et $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. On choisit u_0 convenablement tel que u_n soit défini pour tout entier n. On considère l'équation (E) : $f(x) = x$. Montrer que
   - Si (E) admet deux racines distinctes α et β, alors pour tout n,
   $$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{où} \quad k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$
   - Si (E) admet une racine double α, alors pour tout n,
   $$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \quad \text{où} \quad k = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

Exercice 7 (Plus difficile)
Le but de cet exercice est de montrer que si E est un segment et f est continue, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n \to +\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

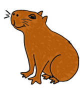
1. Montrer le sens direct.
2. L'autre sens se démontre par l'absurde. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas et que $\lim_{n \to +\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ supérieurs à x. En utilisant l'annexe, montrer que $\mathcal{C}$ possède une borne supérieure M.
3. En utilisant le fait que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne tend pas vers M et l'exercice 5, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout point dans $[M - \varepsilon, M]$ est point fixe de f.
4. Conclure.

2 Quelques exemples concrets

Exercice 8
On prend $u_0 > 0$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Que dire du comportement en $+\infty$ de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (on pourra utiliser les énoncés de l'annexe et l'exercice 5) ?

Exercice 9
On prend $E = [0, 1]$ et définit f par $f(x) = \sqrt{1 - x}$. Que dire de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$?

Exercice 10 (Approximation de la racine carrée)
Soit $a > 0$. On définit f par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ et $u_0 > \sqrt{a}$. Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.


Moment culturel

Comme d'habitude, un dessin est grandement instructif... On remarque entres autres que la tangente à f en $\sqrt{a}$ est horizontale, on se doute bien que cela implique que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers $\sqrt{a}$ est rapide. C'est le principe de la *méthode de*

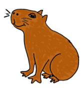
Newton qui permet d'approcher numériquement les équations du type $g(x) = 0$ (ici, $g(x) = x^2 - a$) en étudiant la suite définie par $u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$. Lorsque la fonction g est de classe C^2, strictement croissante et de dérivée seconde strictement positive (ce qui est le cas ici), la suite converge vers la solution x_0 de $g(x) = 0$ pour tout $u_0 \geq x_0$, et de plus il existe $\alpha < 1$ et $C \geq 0$ tels que $|u_n - x_0| \leq C\alpha^{2^n}$ (convergence quadratique).

Exercice 11
On prend $E = [0, 1]$ et définit f par $f(x) = 1 - x^2$. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivant la valeur de u_0 ?

Exercice 12 (Le shift)
Ici, $E = [0, 1[$ et f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que tout nombre $x \in [0, 1]$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{2^k}$. Une telle décomposition est appelée ***décomposition en base 2 de x***. Montrer que lorsque x ne peut pas s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{2^k}$, une telle décomposition est unique. Que dire de la distance entre deux points dont les N premiers chiffres de la décomposition en base 2 coïncident ?
2. Quelle est l'action de f sur la décomposition en base 2 d'un nombre de $[0, 1[$?
3. Combien l'application f possède-t-elle de points périodiques dont la période divise n ? Montrer que l'ensemble des points périodiques par f est dense dans $[0, 1[$ (un ensemble D est dense dans E si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout $x \in E$, il existe $y \in D$ tel que la distance de x à y soit plus petite que ε).
4. Construire un point $x \in [0, 1[$ dont l'orbite par f est dense dans $[0, 1[$.


Moment culturel

5. Montrer que pour tous les intervalles I et J inclus dans $[0, 1[$ et de longueurs positives, il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f^n(I) \cap J$ est non vide. Une application f qui possède cette propriété est dite *topologiquement mélangeante*.
6. Pour tout $x \in [0, 1[$, on appelle ***variété stable de x*** l'ensemble

$$W_s(x) = \left\{ y \in [0, 1[\mid |f^n(x) - f^n(y)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $W_s(x)$ est dense dans $[0, 1[$.

3 Divers

Exercice 13 (Points fixes)1. On suppose que f est contu=inue et qu'il existe un segment $I \subset E$ tel que $f(I) \subset I$. Montrer que f possède un point fixe [2] dans I (i.e. un point x tel que $f(x) = x$).
2. On suppose que f est continue et qu'il existe un segment $I \subset E$ tel que $I \subset f(I)$. Montrer que f possède un point fixe.
3. On suppose que E est un segment et que f est seulement croissante (et plus continue). Montrer que f possède un point fixe.

2. D'ailleurs, pourquoi cela a-t-il un lien avec les suites récurrentes ?

Exercice 14 (Conjugaison d'homéomorphismes en dimension 1)
Soit H l'ensemble des fonctions f strictement croissantes de $[0, 1]$ dans lui-même telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Soient f et g dans H, on veut montrer qu'il existe $h \in H$ tel que $f \circ h = h \circ g$.

1. Montrer que toute fonction $f \in H$ est inversible : pour tout $y \in [0, 1]$, il existe un et un seul $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = y$. On notera f^{-1} la fonction qui à y associe un tel point x.
2. Se ramener au cas où f et g sont strictement supérieures à l'identité sur $]0, 1[$ (autrement dit montrer qu'il suffit de prouver l'énoncé de l'exercice pour f et g strictement supérieures à l'identité sur $]0, 1[$).
3. Conclure en utilisant les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ définies par $u_0 = v_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $v_{n+1} = g(v_n)$, $u_{n-1} = f^{-1}(u_n)$ et $u_{n-1} = g^{-1}(u_n)$.

Exercice 15 (Nombre de rotation)
On choisit $E = \mathbf{R}$ et f une fonction continue croissante telle que pour tout x, $f(x + 1) = f(x) + 1$. Le but de cet exercice est de montrer que les suites

$$v_n(x) = \frac{f^n(x) - x}{n}$$

tendent toutes vers une limite indépendante de x, appelée *nombre de rotation de f*.

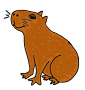
1. Soient x et y deux points de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|f^n(x) - f^n(y)| < k$. Qu'en déduire sur le comportement des quantités $v_n(x) - v_n(y)$?
2. Montrer que pour tous les entiers m et n,
$$f^n(0) + f^m(0) - 1 \leq f^{n+m}(0) \leq f^n(0) + f^m(0) + 1.$$
3. En déduire que la suite $v_n(0)$ converge[3], et montrer que sa limite ℓ appartient à $[f(0) - 1, f(0) + 1]$. Conclure.


Moment
culturel

Le nombre de rotation a été introduit en 1885 par Henri Poincaré dans le cadre de l'étude d'équations différentielles : il rencontrait lors de son étude un *homéomorphisme* du cercle. Une telle application se *relève* en une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les hypothèses de l'exercice, le nombre de rotation mesure la vitesse à laquelle les orbites de l'homéomorphisme tournent autour du cercle.

Exercice 16 (Théorème de Sarkowski, difficile)
On suppose que $E = I$ est un segment de $\mathbf{R}$ et que f est une application continue.

1. Soit K un segment inclus dans $f(I)$. Montrer qu'il existe un segment L inclus dans I tel que $f(L) = K$.
2. On suppose qu'il existe n segments $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ tels que $I_0 \subset I_{n-1}$ et pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $I_k + 1 \subset f(I_k)$. Montrer que f^n possède un point fixe x_0 tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k[\![0, n-1]\!]$ (on pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$ et utiliser l'exercice 13).
3. Montrer que si f possède un point 3-périodique dans I (x est k-périodique pour f si $f^k(x) = x$ et $f^i(x) \neq x$ pour $1 \leq i < k$), alors elle possède des points n-périodiques pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.


Moment
culturel

Ce théorème, démontré en 1964 par O. M. Sarkowski, possède un énoncé plus précis :

3. On pourra utiliser le théorème des segments emboîtés, voir l'annexe.

on définit l'ordre $\prec$ par

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots \prec 2 \times 3 \prec 2 \times 5 \prec \cdots \prec 2^n \times 3 \prec 2^n \times 5 \prec \cdots \prec 2^n \prec 4 \prec 2 \prec 1,$$

si f possède une point périodique de période n, alors f possède des points périodiques de périodes k pour tout $n \prec k$.

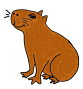
4 Étude de la fonction tente

Exercice 17 (Fonction tente classique)
On définit f sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

et on se donne la condition initiale $u_0 \in [0,1]$.

1. Déterminer une formule générale pour la fonction f^n sur $[0,1]$. Combien l'application f^n a-t-elle de points fixes (i.e. de points x tels que $f(x) = x$) ?
2. En déduire que l'ensemble des réels u_0 tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique est dense dans $[0,1]$.
3. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux points x et y ainsi qu'un entier $n \in \mathbf{N}$ tels que $|x-y| < \varepsilon$ et $|f^n(x) - f^n(y)| > \frac{1}{2}$.
4. Montrer que pour tout points x, y de $[0,1]$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un point $z \in [0,1]$ et un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $|z - x| < \varepsilon$ et $f^n(z) = y$.


Moment culturel

Un tel système est dit *cahotique* au sens de Devaney.

Exercice 18 (Fonction tente perturbée)
On perturbe la fonction f en une fonction g : on se donne un réel $\lambda > 0$ (*a priori* petit) et pose

$$g(x) = \begin{cases} (2+\lambda)x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ (2+\lambda)(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble des points u_0 dont l'orbite est bornée (i.e. tels qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leq C$) est exactement l'ensemble des points dont l'orbite est toujours dans $[0,1]$.
2. On pose C_n l'ensemble des u_0 tels que $u_k \in [0,1]$ pour tout $k \leq n$, et $C = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} C_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$C_{n+1} = \left(\frac{1}{2+\lambda} C_n\right) \cup \left(1 - \frac{1}{2+\lambda} C_n\right).$$
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille $I_1, \ldots, I_q$ de segments tels que $C \subset \bigcup_k I_k$ et que $\sum_k \operatorname{long}(I_k) < \varepsilon$.
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \notin C$ tel que $|x - y| < \varepsilon$.
5. Montrer que pour tout $x \notin C$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset C^{\complement}$.
6. Montrer que pour tout $x \in C$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in C$, $y \neq x$ tel que $|x - y| < \varepsilon$.


Moment culturel

Un ensemble qui vérifie respectivement les points 3, 4, 5 et 6 de l'exercice est dit respectivement *de mesure nulle*, *d'intérieur vide*, *fermé* et *sans point isolé*. Un ensemble qui vérifie simultanément les trois derniers points est appelé un *ensemble de Cantor*[4].

4. Du nom du mathématicien Georg Cantor (1845–1918)

5 Quelques indications

Exercice 6 3. : Si $\lambda \neq 1$, alors

$$u_n = \frac{a}{1-\lambda} + \lambda^n \left(u_0 - \frac{a}{1-\lambda} \right).$$

Exercice 17 : 1.

$$f^n(x) = \begin{cases} 2^n \left(x - \frac{2k}{2^n} \right) & \text{si } x \in \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right] \\ 2^n \left(\frac{2k+2}{2^n} - x \right) & \text{si } x \in \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n} \right] \end{cases}$$

Exercice 18 : 6. On pourra remarquer que pour tout n, toutes les extrémités des segments composant C_n sont aussi dans C.

Annexe : topologie de R

La théorie des systèmes dynamiques, qui étudie le comportement des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour des fonctions f quelconques, est intimement liée à la topologie, qui s'intéresse aux formes et aux distances. Les principaux résultats concernant la topologie de $\mathbf{R}$ sont présentés ici, les exercices pourront être omis dans un premier temps. En fait, l'ensemble des nombres réels possède une propriété très spécifique : il peut être ordonné, par la relation “être supérieur à”. Cette relation possède une propriété fondamentale : la propriété de la borne supérieure ; elle découle de la construction de $\mathbf{R}$ et ne sera donc pas démontrée.

Théorème. *$\mathbf{R}$ possède la propriété de la borne supérieure : si E est un sous-ensemble non vide majoré de $\mathbf{R}$, alors l'ensemble de ses majorants possède un plus petit élément appelé* borne supérieure *de l'ensemble E.*

On en déduit la proposition suivante :

Proposition. *Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de nombres réels. On a l'alternative suivante :*

(i) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée, auquel cas elle converge vers une limite ℓ.

(ii) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est n'est pas majorée, auquel cas elle tend vers $+\infty$.

Exercice
Démontrer cette proposition à l'aide de la propriété de la borne supérieure.

Cette proposition permet de démontrer le théorème des segments emboîtés :

Théorème (Segments emboîtés)**.** *Soit $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de segments de $\mathbf{R}$ qui sont emboîtés (pour tout entier n, $I_{n+1} \subset I_n$) et dont le longueur tend vers 0. Alors il existe un point et un seul qui appartient à tous les segments I_n (autrement dit l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} I_n$ est réduite à un point).*

Exercice
Démontrer le théorème des segments emboîtés à l'aide de la proposition précédente.