Séance du 25/01/2014 de ParisMaths
Théorie de la mesure

1 Longueur, aire : retour en maternelle

Dans cette partie on fixe un entier $d \in \{1, 2\}$.

Définition 1. On dit que deux parties A et B de $\mathbf{R}^d$ sont *équivalentes par découpage et recollement* s'il existe une partition de A (resp. de B), $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (resp. $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$) et, pour chaque $i = 1, 2, \cdots, n$, une isométrie g_i qui envoie A_i sur B_i. On note alors $A \sim B$.

Exercice 1
Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Définition 2. On appelle *mesure des longueurs* si $d = 1$ ou *des aires* si $d = 2$, une application μ non nulle, définie sur une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble des parties bornées de $\mathbf{R}^d$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et qui vérifie les conditions suivantes :

(i) Additivité simple : si on a une partition $E = A \cup B$ avec $E, A, B \in \mathcal{A}$, alors $\mu(E) = \mu(A) + \mu(B)$.

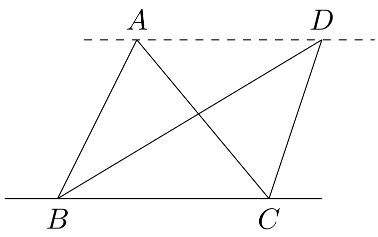
(ii) Invariance par découpage et recollement : si $A, B \in \mathcal{A}$ et si $A \sim B$, alors $\mu(A) = \mu(B)$.

Dans toute la suite de cette partie on se fixe une mesure des aires μ.

Exercice 2
On suppose que $d = 2$, et que les points et les segments sont dans $\mathcal{A}$. Montrer qu'ils sont de mesure nulle.

Exercice 3 (Autour des triangles)
Dans cet exercice on se propose de retrouver la formule de l'aire d'un triangle.

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer qu'une diagonale de $ABCD$ partage le parallélogramme en deux triangles de même aire.
2. Soient ABC et DBC deux triangles de même base $[BC]$ dont les sommets A et D sont sur une parallèle à (BC). Déduire de la question précédente que les deux triangles ont la même aire.
3. En déduire la formule classique de l'aire d'un triangle.



4. En déduire une démonstration du théorème de Thalès.

Exercice 4 (Théorème de Minkowski)
Soit C un convexe du plan symétrique par rapport à l'origine et d'aire supérieure à 4. Montrer que C contient au moins un point à coordonnées entières différent de O.

2 Quelques bases de théorie des ensembles

Définition 3. Soit E un ensemble quelconque. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des *parties de* E est l'ensemble des sous-ensembles de E. Autrement dit, $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

Exercice 5
Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Décrire les ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Définition 4. Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il peut être énuméré, autrement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E telle que $E = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$.

Exercice 6
Montrer que les ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^2$ et $\mathbf{Q}$ sont dénombrables. Montrer que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable (théorème de Cantor, astucieux).

3 Tribus

Définition 5. Soit E un ensemble quelconque. Une *tribu* sur E est une famille $\mathcal{A}$ de parties de E (autrement dit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$) telle qu'on ait les trois propriétés suivantes :

(i) L'ensemble vide appartient à $\mathcal{A}$: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Stabilité par passage au complémentaire : $A \in \mathcal{A} \implies A^{\complement} \in \mathcal{A}$.

(iii) Stabilité par union dénombrable : si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors on a aussi $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont alors dits *mesurables*, et on dit que le couple $(E, \mathcal{A})$ est un *espace mesurable*.

Exercice 7
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

1. Montrer que $E \in \mathcal{A}$.
2. Montrer qu'on a la stabilité par intersection dénombrable : si $A_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Montrer qu'on a la stabilité par union finie : si $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, alors $A_0 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Exercice 8
Soit E un ensemble quelconque. Montrer que les familles suivantes sont des tribus de E :

1. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$.
2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$.
3. Étant donné $A \subset E$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^{\complement}, E\}$.
4. $\mathcal{A} = \{A \subset E \mid A \text{ dénombrable ou } A^{\complement} \text{ dénombrable}\}$.
5. Étant donnés un ensemble E' contenant E et une tribu $\mathcal{A}'$ sur E', la famille $\{A' \cap E \mid A' \in \mathcal{A}'\}$.
6. Étant donnée une fonction $f : E \to F$ et une tribu $\mathcal{B}$ sur F, la famille $\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Exercice 9
Soit E un ensemble et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$. Cette tribu sera notée $\sigma(\mathcal{E})$ et appelée *tribu engendrée par* $\mathcal{E}$.

Exercice 10
Soient une fonction $f : E \to F$ et un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(F)$. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Exercice 11
Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Existe-t-il une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$?

Définition 6 (π-système, λ-système)**.** Soit E un ensemble.

1. On appelle π-système sur E toute famille $\mathcal{C}$ de parties de E qui est stable par intersection finie.
2. On appelle λ-système sur E toute famille Λ de parties de E telle que :
   (i) $E \in \Lambda$.
   (ii) Si $A, B \in \Lambda$, avec $A \subset B$ alors $B \setminus A \in \Lambda$.
   (iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante d'éléments de Λ, alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \Lambda$.

Exercice 12 (Théorème de Dynkin ou de la classe monotone, difficile)
Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E. Montrer qu'il existe un plus petit Λ-système contenant la famille $\mathcal{C}$, noté $\Lambda(\mathcal{C})$. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\Lambda(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$. (*Pour $C \in \mathcal{C}$, puis $C \in \Lambda(\mathcal{C})$, on pourra montrer que l'ensemble $\Lambda_C = \{A \in \Lambda(\mathcal{C}) \mid A \cap C \in \Lambda(\mathcal{C})\}$ est un λ-système*).

4 Mesures

Définition 7. Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Une *mesure* sur $(E,\mathcal{A})$ est une fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties mesurables *disjointes*, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(A_n).$$

On dira qu'une propriété est vérifiée *presque partout* si elle est vraie en dehors d'un ensemble de mesure nulle.

Exercice 13
Montrer que les exemples suivants sont des mesures, pour des tribus bien choisies :

1. $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.
2. $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = +\infty$ pour tout $A \neq \emptyset$.
3. $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$.
4. $\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon (mesure de Dirac).

Exercice 14
Quelques propriétés classiques des mesures :

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
2. Exprimer $\mu(A \cup B)$ en fonction de $\mu(A)$, $\mu(B)$ et $\mu(A \cap B)$.
3. Soit (A_n) une suite croissante pour l'inclusion d'ensembles mesurables. Montrer que $\mu(\bigcup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Passons à l'existence d'une mesure de longueur sur $\mathbf{R}$. On commence par définir la tribu des *boréliens* de $\mathbf{R}$ comme étant la tribu engendrée par tous les intervalles de $\mathbf{R}$. On montre alors (et c'est difficile) qu'il existe une mesure λ sur la tribu des boréliens, appelée *mesure de Lebesgue*, qui coïncide avec la longueur sur les intervalles, c'est-à-dire que pour tout intervalle $[a,b]$, on a $\lambda([a,b]) = b-a$. On fait de même dans le plan $\mathbf{R}^2$ et l'espace $\mathbf{R}^3$, où la mesure de Lebesgue coïncide avec respectivement l'aire et le volume sur respectivement les rectangles et les pavés.

Exercice 15
Que vaut $\lambda(\mathbf{Q})$?

Exercice 16
Soit B un borélien de $\mathbf{R}$, v un réel quelconque et x un réel positif. Montrer que $\lambda(B+v) = \lambda(B)$ et que $\lambda(xB) = x\lambda(B)$ (on pourra utiliser l'exercice 12).

Exercice 17 (Encore un peu de Dynkin !)
Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$. Soient $\mathcal{C},\mathcal{D}$ deux familles de

parties de E constituées d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont stables par intersections finies et que pour tous $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$, on a $\mu(C \cap D) = \mu(C)\mu(D)$. Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{C}), V \in \sigma(\mathcal{D})$, on a $\mu(U \cap V) = \mu(U)\mu(V)$.

Exercice 18 (Existence d'un ensemble non mesurable, exemple de Vitali)
On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $[0,1]$ définie par $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in \mathbf{Q}$. Pour chaque $C \in [0,1]/\mathcal{R}$, on choisit [1] $x_C \in C$. Montrer que l'ensemble

$$M = \bigcup_{C \in [0,1]/\mathcal{R}} x_C$$

n'est pas mesurable.

Exercice 19 (Ensembles de Cantor)
On commense par construire une suite d'ensembles par récurrence : on pose $A_0 = [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_{n+1} = \frac{1}{3}A_n \cup (1 - \frac{1}{3}A_n)$. On définit alors l'ensemble triadique de Cantor comme étant $K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$.

1. Faire un dessin de tout ce bazar.
2. Montrer que K est mesurable, et calculer sa mesure.
3. (demande de bonnes notions de topologie) Montrer que K est un ensemble non dénombrable, fermé, sans point isolé, totalement discontinu et d'intérieur vide.
4. On se donne $\lambda_0 \in [0,1[$. À l'aide d'une construction semblable, construire un ensemble similaire de mesure égale à λ_0.
5. (difficile) Trouver un ensemble mesurable $B \subset [0,1]$ tel que pour tout intervalle $I \subset [0,1]$ de longueur non nulle, on ait $0 < \lambda(B \cap I) < \lambda(I)$.

Exercice 20 (Approximation diophantienne)
On dit qu'un nombre réel $x \in [0,1]$ est *bien approché par les rationnels* si pour tout $Q \in \mathbf{N}$, il existe un entier $q \geq Q$ et un entier $p \in [0, q-1]$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^3}.$$

Sinon on dit que x est *mal approché par les rationnels*.

1. Montrer que pour tout $q \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{1}{q^2} \leq \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}$.
2. En déduire que
$$\sum_{q=Q}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \underset{Q \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Montrer que presque tout réel est mal approché par les rationnels (i.e. que l'ensemble des réels bien approchés par des rationnels est de mesure nulle).

1. Cela requiert l'axiome du choix !

5 Fonctions mesurables

Définition 8. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une fonction $f : E \to F$ est dite *mesurable* si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Exercice 21
Supposons que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$. Montrer qu'ne fonction $f : E \to F$ est mesurable si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Définition 9. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$ et $f : E \to E$ une application mesurable. On dit que f *préserve la mesure* μ si pour tout mesurable $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. On dit que f *est ergodique par rapport à* μ si tout mesurable $A \in \mathcal{A}$ invariant par f (i.e. $f^{-1}(A) = A$) vérifie $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

Exercice 22 (Théorème de récurrence de Poincaré)
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$, $f : E \to E$ une application mesurable préservant μ, et $A \subset E$ une partie mesurable vérifiant $\mu(A) > 0$. Un point $x \in E$ est dit *récurrent par rapport à* A s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(x) \in A$. Montrer que presque tout $x \in A$ est récurrent par rapport à A.

Exercice 23 (Théorème de récurrence de Kac)
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) = 1$, $f : X \to X$ une application mesurable préservant μ et ergodique, et $A \subset E$ une partie mesurable vérifiant $\mu(A) > 0$. Pour tout $x \in E$, on définit le temps de premier passage dans A par :

$$n_A(x) = \inf \{n \in \mathbf{N}^* \mid f^n(x) \in A\}.$$

On introduit également les ensembles suivants pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$:

$$A_n = \{x \in A \mid n_A(x) = n\} \quad \text{et} \quad B_n = \{x \in E \setminus A \mid n_A(x) = n\}.$$

1. Montrer que la famille constituée par les ensembles A_n et B_n pour $n \in \mathbf{N}^*$, forme une partition presque partout de E.
2. Montrer que l'on a pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mu(B_n) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B_{n+1}) \quad \text{puis} \quad \mu(B_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

3. Déduire des questions précédentes que l'on a $\int_A n_A \mathrm{d}\mu = 1$ i.e. que $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(A_n) = 1$. Autrement dit, on retourne pour la première fois dans A au bout d'un temps $1/\mu(A)$.