Math. Ann. 322, 347–382 (2002) **Mathematische Annalen**

Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002080100274

La formule des traces pour les algèbres de Lie

Pierre-Henri Chaudouard

Received: 28 December 1998 / Revised version: 9 May 2001 /
Published online: 19 October 2001 – © Springer-Verlag 2001

Abstract. Nous établissons un analogue pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur-Selberg. Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On considère $(J_{\mathfrak{o}})$ et $(\hat{J}_{\mathfrak{o}})$ deux familles de distributions sur les points adéliques de $\mathfrak{g}$, chacune indexée par les classes $\mathfrak{o}$ de $G(\mathbb{Q})$-conjugaison semi-simple dans $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$: la première est formée des analogues des termes du côté géométrique de la formule des traces pour les groupes et la seconde de leurs transformées de Fourier. On montre que pour toute fontion f dans la classe de Schwartz

$$\sum_{\mathfrak{o}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{\mathfrak{o}} \hat{J}_{\mathfrak{o}}(f),$$

et que ces deux sommes convergent absolument. C'est cette égalité qui est un analogue de la formule d'Arthur-Selberg. Une telle formule peut être utile pour des problèmes d'analyse harmonique locale. Pour terminer, nous exprimons les termes associés aux classes de conjugaison semi-simples régulières à l'aide d'intégrales orbitales pondérées.

Mathematics Subject Classification (2000): 11F70, 11F72, 20G35

Table des matières

Introduction

Le but de cet article est d'établir un analogue pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur-Selberg décrite dans [Art78] et [Art80] . On obtient une formule globale qui est une égalité entre une somme de distributions sur l'algèbre de Lie adélique d'un groupe algébrique réductif et la somme de leurs transformées de Fourier. Une telle formule est intéressante pour des problèmes d'analyse harmonique locale.

P.-H. Chaudouard
Département de mathématiques, École Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex, France (e-mail: chaudoua@cmla.ens-cachan.fr)

On considère un groupe algébrique G défini sur $\mathbb{Q}$ réductif et connexe. Le groupe $G(\mathbb{A})$ des points adéliques de G est un groupe topologique localement compact. Le groupe $G(\mathbb{Q})$ des points rationnels de G est un sous-groupe discret de $G(\mathbb{A})$. Expliquons le principe de la formule des traces d'Arthur-Selberg dans le cas particulier où le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$, ou, ce qui est équivalent, dans le cas où l'espace quotient $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ est compact. On note ρ la représentation régulière à droite de $G(\mathbb{A})$ dans $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$. Pour une fonction lisse à support compact $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}))$, on définit sur $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ l'opérateur de convolution

$$\rho(f) = \int_{G(\mathbb{A})} f(g)\rho(g)dg.$$

On montre que l'opérateur ρ est un opérateur intégral de noyau

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in G(\mathbb{Q})} f(x^{-1}\gamma y).$$

Ainsi pour toute fonction $\varphi \in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ et tout $x \in G$,

$$(\rho(f)\varphi)(x) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} K_f(x, y)\varphi(y)dy.$$

L'opérateur $\rho(f)$ est de plus un opérateur à trace. En intégrant le noyau sur la diagonale, on obtient la trace :

$$\mathrm{tr}(\rho(f)) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} K_f(x, x)dx.$$

Le noyau $K_f(x, y)$ s'écrit, si l'on utilise la décomposition en représentations irréductibles de ρ comme une somme indexée par des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de G. Il peut par ailleurs s'écrire comme une somme indexée par les classes de conjugaison dans $G(\mathbb{Q})$. En intégrant terme à terme les deux écritures du noyau, on obtient deux développements pour la trace de $\rho(f)$ appelés respectivement développement spectral et développement géométrique de la formule des traces. Intéressons-nous plus particulièrement au développement géométrique ; si l'on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes de conjugaison de $G(\mathbb{Q})$, la trace de $\rho(f)$ se développe ainsi :

$$\mathrm{tr}(\rho(f)) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f),$$

où l'on définit la distribution $J_{\mathfrak{o}}$ pour une classe de conjugaison $\mathfrak{o}$ par

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in \mathfrak{o}} f(x^{-1}\gamma x)dx.$$

Soit $\gamma \in \mathfrak{o}$. Notons $G(.,\gamma)$ le centralisateur de γ. On peut alors écrire cette distribution à l'aide d'une intégrale orbitale :

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q},\gamma)\backslash G(\mathbb{A},\gamma)). \int_{G(\mathbb{A},\gamma)\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma x)dx.$$

Afin d'obtenir un analogue de la formule des traces pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G, on substitue l'action par adjonction de G sur son algèbre de Lie à l'action de G sur lui-même par conjugaison. On est conduit naturellement à définir, pour toute fonction lisse à support compact $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$, un "noyau" par

$$K(x, f) = \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X).$$

On dit que deux éléments rationnels X et Y de $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ sont conjugués s'il existe $x \in G(\mathbb{Q})$ tels que $X = \mathrm{Ad}(x)Y$. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$. Définissons alors pour une classe de conjugaison $\mathfrak{o}$, le "noyau" associé à la classe $\mathfrak{o}$ par

$$K_{\mathfrak{o}}(x, f) = \sum_{X \in \mathfrak{o}} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X).$$

On intègre terme à terme l'égalité

$$K(x, f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} K_{\mathfrak{o}}(x, f)$$

ce qui donne l'analogue du développement géométrique de la formule des traces :

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} K(x, f)dx = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f).$$

Les distributions $J_{\mathfrak{o}}(f)$ sont obtenues en intégrant le "noyau" $K_{\mathfrak{o}}(., f)$. Notons $G(., X)$ le centralisateur d'un élément $X \in \mathfrak{o}$. Alors la distribution $J_{\mathfrak{o}}(f)$ peut s'écrire à l'aide d'une intégrale orbitale

$$J_{\mathfrak{o}}(f) = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q}, X)\backslash G(\mathbb{A}, X)). \int_{G(\mathbb{A},X)\backslash G(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)dx.$$

Considérons ψ un caractère non trivial de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ et $\langle ., . \rangle$ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ non dégénérée et invariante par adjonction. On peut définir la transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ par

$$\forall\, Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{A}) \quad \hat{f}(Y) = \int_{\mathfrak{g}(\mathbb{A})} f(X)\psi(\langle X, Y\rangle)dX.$$

La formule sommatoire de Poisson conduit à l'égalité suivante entre noyaux

$$K(x, f) = K(x, \hat{f}).$$

La transformée de Fourier $\hat{J}$ d'une distribution J est définie par dualité. L'égalité entre les développements géométriques associés respectivement à f et $\hat{f}$ peut s'écrire sous la forme d'une égalité entre distributions

$$\sum_{o\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}(f) = \sum_{o\in\mathcal{O}} \hat{J}_{\mathfrak{o}}(f). \tag{0.1}$$

Cette égalité est l'analogue pour les algèbre de Lie de la formule des traces d'Arthur-Selberg. En fait, la fonction $\hat{f}$ n'est pas à support compact : elle appartient cependant à la classe de Schwartz de $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$. On montre que l'égalité (0.1) est vraie pour toute fonction dans la classe de Schwartz.

Tout ceci se justifie aisément dans le cas où le groupe G est anisotrope sur $\mathbb{Q}$. Dans le cas contraire, le noyau $K_{\mathfrak{o}}(., f)$ n'est plus intégrable : il faut, comme dans les travaux d'Arthur sur les groupes, ajouter des termes correctifs. Ceux-ci sont construits ainsi (voir plus précisément le paragraphe 1.7) : on considère une classe de conjugaison semi-simple $\mathfrak{o}$ (et non plus une classe de conjugaison). On introduit, pour un sous-groupe parabolique "standard" P de G, un noyau $K_{P,\mathfrak{o}}(.)$; on multiplie ce noyau par la fonction caractéristique d'une partie de $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ qui dépend d'un paramètre T. On somme sur $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ pour obtenir une fonction notée $k_{\mathfrak{o}}^T(., f)$ invariante à gauche par $G(\mathbb{Q})$. On définit $G(\mathbb{A})^1$ comme le sous-groupe de $G(\mathbb{A})$ qui annule le module de chaque caractère rationnel de G. L'objet du paragraphe 3 est de démontrer la convergence de l'intégrale sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ de $k_{\mathfrak{o}}^T(., f)$ pour tout paramètre T qui appartient à un cône fixé indépendant de la fonction f. Pour cela, on utilise, outre des arguments géométriques et combinatoires, la formule sommatoire de Poisson : ainsi, dans l'expression de la fonction $k_{\mathfrak{o}}^T(., f)$, les termes à croissance lente se compensent pour donner des termes à décroissance rapide. On obtient la convergence des intégrales considérées pour des fonctions f dans la classe de Schwartz alors qu'Arthur se limitait à des fonctions à support compact. On définit les distributions $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ en intégrant $k_{\mathfrak{o}}^T(., f)$.

Au paragraphe 4, on montre que ces distributions dépendent polynomialement du paramètre T ce qui permet de les définir pour tout T. On établit l'analogue de (0.1) :

$$\sum_{o\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{o\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(\hat{f}). \tag{0.2}$$

Pour cela, on montre tout d'abord que la différence entre les deux membres croît moins vite qu'un polynôme.

Enfin, au paragraphe 5, dans le cas particulier d'une classe de conjugaison semi-simple $\mathfrak{o}$ qui se réduit à une classe de conjugaison, on exprime $J_{\mathfrak{o}}^T$ à l'aide d'une intégrale orbitale pondérée.

Remerciements. Je voudrais remercier mon directeur de thèse J.-L. Waldspurger pour les conseils qu'il m'a prodigués au cours de ce travail et pour sa relecture attentive du manuscrit.

1. Prolégomènes

1.1 Notations. Dans toute la suite, on considère un groupe algébrique réductif et connexe G défini sur $\mathbb{Q}$. On fixe une fois pour toutes un sous-groupe parabolique minimal P_0 défini sur $\mathbb{Q}$ et un facteur de Levi de P_0, M_0 également défini sur $\mathbb{Q}$. Tous les groupes considérés par la suite seront définis sur $\mathbb{Q}$. Pour tout sous-groupe parabolique P de G, tel que $M_0 \subset P$, on définit N_P son radical unipotent et M_P son unique facteur de Levi qui contient M_0. On note $\mathcal{P}(M_P)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques Q de G qui contiennent M_0 et dont le facteur de Levi M_Q est égal à M_P. Il existe un unique sous-groupe parabolique $\overline{P} \in \mathcal{P}(M_P)$ tel que $P \cap \overline{P} = M_P$: on dit que $\overline{P}$ est le sous-groupe parabolique opposé à P et on note $\overline{N}_P$ son radical unipotent. Sauf les cas où l'on fera intervenir $\mathcal{P}(M_P)$, on ne considérera plus que des sous-groupes paraboliques standards *i.e.* qui contiennent P_0. On les appellera simplement sous-groupes paraboliques.

Pour un sous-groupe parabolique P de G, on note A_P le plus grand tore déployé central de M_P. Soit $X(M_P)$ le groupe des caractères de M_P définis sur $\mathbb{Q}$. On considère les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants, de dimension $\dim(A_P)$,

$$\mathfrak{a}_P = \mathrm{Hom}(X(M_P), \mathbb{R})$$

et son dual

$$\mathfrak{a}_P^* = X(M_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Si H est un sous-groupe normalisé par A_P, on note $\Phi(A_P, H)$ l'ensemble des poids de A_P dans H. Pour des sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$, on définit

$$N_{P_1}^{P_2} = N_{P_1} \cap M_{P_2} \text{ et } \overline{N}_{P_1}^{P_2} = \overline{N}_{P_1} \cap M_{P_2}.$$

On note $\Delta_{P_1}^{P_2}$ l'ensemble des racines simples dans $\Phi(A_{P_1}, N_{P_1}^{P_2})$. On notera simplement $\Delta_{P_1} = \Delta_{P_1}^G$. On écrira, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, Δ_1 pour Δ_{P_1}, ainsi que M_1 pour M_{P_1} etc. L'ensemble Δ_1 est canoniquement inclus dans l'espace $\mathfrak{a}_1^*$ et contient l'ensemble Δ_1^2. On identifie alors $\mathfrak{a}_2$ au sous-espace de $\mathfrak{a}_1$ défini par

$$\{H \in \mathfrak{a}_1 \ / \ \forall \alpha \in \Delta_1^2 \ \alpha(H) = 0\}.$$

L'espace $\mathfrak{a}_2^*$ s'injecte naturellement dans l'espace $\mathfrak{a}_1^*$. On définit le sous-espace $\mathfrak{a}_1^2$ de $\mathfrak{a}_1$ qui annule tous les éléments de $\mathfrak{a}_2^*$. L'ensemble Δ_1^2 engendre un sous-espace de $\mathfrak{a}_1^*$ que l'on note $(\mathfrak{a}_1^2)^*$. Ce dernier est de façon naturelle le dual de $\mathfrak{a}_1^2$. On a, de plus, les décomposition en sommes directes

$$\mathfrak{a}_1^* = (\mathfrak{a}_1^2)^* \oplus \mathfrak{a}_2^*$$

et

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_1^2 \oplus \mathfrak{a}_2.$$

A une racine $\alpha \in \Delta_1^2$, on associe de manière univoque une coracine $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_1^2$ (voir plus précisément le paragraphe 1 de [Art78]) et $\{\alpha^\vee\}$ est une base de $\mathfrak{a}_1^2$. On définit alors les bases $\{\varpi_\alpha^\vee\}$ et $\{\varpi_\alpha\}$ duales respectivement de Δ_1^2 et $\{\alpha^\vee\}$. On pose $\hat{\Delta}_1^2 = \{\varpi_\alpha\}$.
On pose

$$\mathfrak{a}_0^+ = \{H \in \mathfrak{a}_0 \ / \ \alpha(H) > 0, \ \alpha \in \Delta_0\}.$$

On définit τ_1^2 et $\hat{\tau}_1^2$ comme les fonctions caractéristiques sur $\mathfrak{a}_0$ des ensembles

$$\{H \in \mathfrak{a}_0 \ / \ \alpha(H) > 0, \ \alpha \in \Delta_1^2\}$$

et

$$\{H \in \mathfrak{a}_0 \ / \ \varpi(H) > 0, \ \varpi \in \hat{\Delta}_1^2\}.$$

On pose enfin $\tau_1 = \tau_1^G$ et $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_1^G$.

On note Ω le groupe de Weyl de (G, A_0). Celui-ci opère naturellement sur les espaces $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0^*$. Pour tout élément $s \in \Omega$, on choisit un représentant w_s dans l'intersection de $G(\mathbb{Q})$ avec le normalisateur de A_0. Par ailleurs, on fixe une norme $\|.\|$ euclidienne sur $\mathfrak{a}_0$ invariante par le groupe Ω. On note $\Omega(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ l'ensemble des isomorphismes distincts de $\mathfrak{a}_1$ sur $\mathfrak{a}_2$ obtenus par restriction d'un élément de Ω à $\mathfrak{a}_1$. Pour tout $s_1 \in \Omega(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$, il existe un et un seul élément $s \in \Omega$ tel que sa restriction à $\mathfrak{a}_1$ soit s_1 et tel que $s^{-1}\alpha$ appartienne à $\Phi(A_0, P_0)$ pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^1$. On peut ainsi voir $\Omega(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ comme une partie de Ω.

1.2 La fonction H_P. On fixe un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{A})$ qui vérifie certaines conditions (voir le paragraphe 1 de [Art78]). En particulier, pour tout sous-groupe parabolique P, on a l'égalité $G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})K$. On note $M_P(\mathbb{A})^1$ le sous-groupe de $M_P(\mathbb{A})$ annulé par le module de tout caractère rationnel de M_P, A_P^∞ la composante neutre de $A_P(\mathbb{R})$ et pour tout sous-groupe parabolique Q contenant P, $A_P^{Q,\infty} = A_P^\infty \cap M_Q(\mathbb{A})^1$. $M_P(\mathbb{A})$ est le produit direct de $M_P(\mathbb{A})^1$ et de A_P^∞. Ainsi, tout élément x de $G(\mathbb{A})$ s'écrit

$$nmak, \tag{1.1}$$

où $n \in N_P(\mathbb{A}), m \in M_P(\mathbb{A})^1, a \in A_P^\infty$, et $k \in K$. On définit alors une application

$$H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$$

de la façon suivante : si $m \in M_P(\mathbb{A})$, $H_P(m)$ est déterminé par la condition

$$\forall \ \chi \in X(M_P) \quad \langle H_P(m), \chi\rangle = \log(|\chi(m)|).$$

On a en particulier $H_P(M(\mathbb{A})^1) = 0$. De plus, l'application H_P induit des isomorphismes de A_P^∞ sur $\mathfrak{a}_P$ et de $A_P^{Q,\infty}$ sur $\mathfrak{a}_P^Q$. Pour un x quelconque dans $G(\mathbb{A})$, on utilise la décomposition (1.1) pour définir $H_P(x) = H_P(a)$.

1.3 La fonction F^P. Fixons pour tout le reste de l'article un point $T_1 \in -\mathfrak{a}_0^+$ et un compact ω de $N_0(\mathbb{A})M_0(\mathbb{A})^1$ tels que, pour tout sous-groupe parabolique P et pour certains points $T \in \mathfrak{a}_0$, on puisse définir sur $G(\mathbb{A})$, comme le fait Arthur dans le paragraphe 6 de [Art78], une fonction caractéristique $F^P(., T)$. On notera que le point T_1 que nous venons de choisir joue le rôle du point qu'Arthur note T_0. Définissons alors, pour des sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$ et pour tout point $T \in \mathfrak{a}_0$ les ensembles $A_{P_1}^\infty(T, P_2)$ par

$$\{a \in A_{P_1}^\infty \ / \ \forall\alpha \in \Delta_1^2 \ \alpha(H_1(a) - T_1) > 0 \ , \ \forall\varpi \in \hat{\Delta}_1^2 \ \varpi(H_1(a) - T) \leqslant 0\}$$

et

$$A_{P_1}^{P_2,\infty}(T) = A_{P_1}^\infty(T, P_2) \cap M_{P_2}(\mathbb{A})^1.$$

La fonction $F^P(., T)$ est invariante à gauche par $A_P^\infty N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})$ et peut être vue comme la fonction caractéristique de l'image de $\omega A_0^\infty(T, P)K$ par la projection canonique sur le quotient $A_P^\infty N_P(\mathbb{A})M_P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$. En particulier si l'on écrit, suivant la décomposition (1.1), $x = nmak$, on a l'égalité $F^P(x, T) = F^P(m, T)$. On fixe également un point $T_+ \in \mathfrak{a}_0^+$ de sorte que, pour tout point $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et tout sous-groupe parabolique P, de telles fonctions $F^P(., T)$ existent et vérifient de surcroît le lemme 6.4 de [Art78].

1.4 La fonction σ_1^2. Pour des sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$, on définit la fonction σ_1^2 sur $\mathfrak{a}_0$ comme la fonction caractéristique de l'ensemble des points $H \in \mathfrak{a}_0$ tels que :

(i) $\alpha(H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_1^2$;
(ii) $\alpha(H) \leqslant 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_1\backslash\Delta_1^2$;
(iii) $\varpi(H) > 0$ pour tout $\varpi \in \hat{\Delta}_2$.

Si l'on écrit pour $x \in G(\mathbb{A})$, $x = nmak$ suivant la décomposition (1.1) pour le parabolique P_1, on a l'égalité suivante, pour $T \in \mathfrak{a}_0$,

$$\sigma_1^2(H_0(x) - T) = \sigma_1^2(H_1(a) - T).$$

1.5 Algèbre de Lie. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Plus généralement, on notera par une lettre gothique l'algèbre de Lie du groupe correspondant. On pose $d = \dim(\mathfrak{g})$. On s'efforcera de désigner les éléments des groupes par des lettres latines ou grecques minuscules et ceux des algèbres de Lie par des lettres majuscules. On décompose $\mathfrak{g}$ en espaces propres sous l'action par adjonction de A_0 ce qui donne une base $E_1, \ldots, E_d$. On fixe cette base par la suite. Cela nous permet de parler de $\mathfrak{g}(\mathbb{Z})$ et nous donne une norme euclidienne $\|.\|$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ ainsi qu'une norme p-adique $\|.\|_p$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{Q}_p)$. $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ désigne l'espace de Schwartz de $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ *i.e.* l'espace engendré par les fonctions $f_\infty \otimes \chi^\infty$ où f_∞ est une fonction de la classe de Schwartz de $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ et χ^∞ est la fonction caractéristique d'un compact ouvert de $\mathfrak{g}(\mathbb{A}^\infty)$. Un opérateur différentiel ∂^i sur $\mathfrak{g}(\mathbb{R})$ s'étend à $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ en posant $\partial^i(f_\infty \otimes \chi^\infty) = \partial^i f_\infty \otimes \chi^\infty$.

1.6 Mesures de Haar. Pour tout sous-groupe connexe V de N_0 (resp. tout sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$), on choisit sur $V(\mathbb{A})$ (resp. sur $\mathfrak{h}(\mathbb{A})$), l'unique mesure de Haar qui donne le volume 1 au quotient $V(\mathbb{Q})\backslash V(\mathbb{A})$ (resp. au quotient $\mathfrak{h}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{h}(\mathbb{A})$). On choisit sur K une mesure de Haar de sorte que son volume soit 1. On prend sur tout sous-espace de $\mathfrak{a}_0$ la mesure de Haar compatible avec la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}_0$ que l'on a choisie au paragraphe 1.1 . Pour tous sous-groupes paraboliques $P \subset Q$, on en déduit via l'isomorphisme H_P des mesures de Haar sur A_P^∞ et $A_P^{Q,\infty}$. On définit la fonction module pour tout $p \in P(\mathbb{A})$ par

$$\delta_P(p) = |\det(\mathrm{Ad}(p))_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})}|.$$

Il existe $\rho_P \in \mathfrak{a}_0^+$ telle que, pour tout $p \in P(\mathbb{A})$,

$$\delta_P(p) = e^{2\rho_P(H_0(p))}.$$

Il existe également des mesures de Haar uniques sur $M_P(\mathbb{A})$ et $M_P(\mathbb{A})^1$ telles que, pour tout $h \in L^1(G(\mathbb{A}))$,

$$\begin{aligned}\int_{G(\mathbb{A})} h(x)dx &= \int_{N_P(\mathbb{A})}\int_{M_P(\mathbb{A})}\int_K h(nmk)e^{-2\rho_P(H_0(m))}dndmdk\\ &= \int_{N_P(\mathbb{A})}\int_{M_P(\mathbb{A})^1}\int_{A_P^\infty}\int_K h(nmak)e^{-2\rho_P(H_0(a))}dndmdadk.\end{aligned}$$

1.7 Le noyau modifié. On considère la relation d'équivalence suivante sur $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$: $X, Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ sont équivalents si et seulement si leurs parties semi-simples X_s et Y_s sont conjuguées *i.e.* il existe $x \in G(\mathbb{Q})$ tel que $X_s = \mathrm{Ad}(x)Y_s$. On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes d'équivalence. Pour $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$, on définit :

$$K_{P,\mathfrak{o}}(x) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+U))dU$$

et

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x, f) = \sum_{\{P:\ P_0\subset P\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \hat{\tau}_P(H_0(\delta x) - T).K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x).$$

La somme sur $\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ est en fait finie (cf. le lemme 5.1 de [Art78]).

1.8 Transformation de Fourier. On se donne une fois pour toutes un caractère non trivial ψ de $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ et $\langle .,.\rangle$ une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ non dégénérée et invariante par adjonction. On étend cette forme à $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$. On considère un sous-groupe parabolique P et son sous-groupe parabolique opposé $\overline{P}$. On note N et

$\overline{N}$ les radicaux unipotents respectifs de P et $\overline{P}$ ainsi que $\mathfrak{n}$ et $\overline{\mathfrak{n}}$ les algèbres de Lie correspondantes. Alors les applications

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{g}(\mathbb{Q}) &\to \mathbb{Q} \\ (X, Y) &\mapsto \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}(\mathbb{Q}) \times \overline{\mathfrak{n}}(\mathbb{Q}) &\to \mathbb{Q} \\ (U_1, U_2) &\mapsto \langle U_1, U_2 \rangle \end{aligned}$$

sont des formes bilinéaires non dégénérées.
Soit une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$. On définit alors la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f par

$$\forall\, Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{A}),\ \hat{f}(Y) = \int_{\mathfrak{g}(\mathbb{A})} f(X)\psi(\langle X, Y \rangle)dX,$$

et pour tout $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{A})$, la transformée de Fourier partielle Φ_X de f par

$$\forall\, V \in \overline{\mathfrak{n}}(\mathbb{A}),\ \Phi_X(V) = \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} f(X+U)\psi(\langle U, V \rangle)dU.$$

On obtient alors les formules sommatoires de Poisson suivantes :

$$\forall\, x \in G(\mathbb{A}),\ \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X) = \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})} \hat{f}(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\ ;$$

$$\forall\, X \in \mathfrak{g}(\mathbb{A}),\quad \sum_{U \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q})} f(X+U) = \sum_{\overline{U} \in \overline{\mathfrak{n}}(\mathbb{Q})} \Phi_X(\overline{U}).$$

1.9 L'application $N(f)$**.** Soit Γ un sous-ensemble compact de $G(\mathbb{A})$ et R un sous-groupe parabolique de G. On définit pour tout nombre premier p un entier positif $n_p(f)$ comme le plus petit entier naturel tel que la fonction qui, à $X + U \in \mathfrak{m}_R(\mathbb{A}) \oplus \mathfrak{n}_R(\mathbb{A})$, associe

$$f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X + U)),$$

soit invariante pour tout $y \in \Gamma$, tout $a \in A_{P_0}^{G,\infty}$ et tout $X \in \mathfrak{m}_R(\mathbb{A})$ par

$$\{U_p \in \mathfrak{n}_R(\mathbb{Q}_p)\ /\ \|U_p\|_p \leqslant p^{-n_p(f)}\}$$

et à support p-adique en X inclus dans

$$\{X_p \in \mathfrak{m}_R(\mathbb{Q}_p)\ /\ \|X_p\|_p \leqslant p^{n_p(f)}\}.$$

On pose alors $N(f) = \prod_p p^{n_p(f)}$.

2. Quelques lemmes

On rappelle tout d'abord le lemme suivant qui nous servira par la suite et qui est une conséquence de [Wei] Sect. 41.

Lemme 2.1. *Soit Γ un ensemble compact de $G(\mathbb{A})$. Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$, il existe des fonctions positives $\phi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$ telles que, pour tout $X = \sum_{i=1}^{d} X_i.E_i \in \mathfrak{g}(\mathbb{A})$ et tout $x \in \Gamma$,*

$$|\phi(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)| \leqslant \prod_{i=1}^{d} \phi_i(X_i).$$

Le lemme suivant est facile à prouver (voir la proposition 1.1 de [Art78]) mais il est crucial pour toute la suite.

Lemme 2.2. *Soient deux sous-groupes paraboliques de G, $P_1 \subset P_2$. Alors*

$$\sum_{\{P;\, P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_2)} = \begin{cases} 1 \text{ si } P_1 = P_2\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La somme est à prendre sur des sous-groupes paraboliques.

Les corollaires 2.4 et 2.5 du lemme suivant sont les analogues pour les algèbres de Lie des lemmes 2.1 et 2.2 de [Art78].

Lemme 2.3. *Soit P un sous-groupe parabolique de G, N son radical unipotent et M un facteur de Lévi. On note B une $\mathbb{Q}$-algèbre. Soit $X \in \mathfrak{m}(B)$. Notons $N(B, X_s)$ le centralisateur dans $N(B)$ de X_s, la partie semi-simple de X. Son algèbre de Lie $\mathfrak{n}(B, X_s)$ est également le centralisateur dans $\mathfrak{n}(B)$ de X_s. Considérons Δ un système de représentants de $N(B, X_s)\backslash N(B)$. Alors pour tout $U \in \mathfrak{n}(B)$, il existe un unique couple $(\delta, \Upsilon) \in \Delta \times \mathfrak{n}(B, X_s)$ tel que*

$$U = \mathrm{Ad}(\delta^{-1})(X + \Upsilon) - X.$$

Preuve. On se contente de prouver le lemme dans le cas où $B = \mathbb{Q}$. La démonstration est identique dans le cas d'une $\mathbb{Q}$-algèbre quelconque. Soit un sous-groupe parabolique (pas forcément standard) $P_{-1} \subset P$ tel que les parties semi-simple et nilpotente X_s et X_n de X appartiennent respectivement à $\mathfrak{m}_{-1}(\mathbb{Q})$ et $\mathfrak{m}(\mathbb{Q}, X_s) \cap \mathfrak{n}_{-1}(\mathbb{Q})$. Décomposons $\mathfrak{n}$ sous l'action du tore déployé central maximal A_{-1} de M_{-1}. On obtient une suite d'idéaux A_{-1}-stables,

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \supset \mathfrak{n}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{n}_r = \{0\},$$

qui sont stables par multiplication par X_s, définis sur $\mathbb{Q}$ et qui satisfont en outre aux conditions :

(a) $\mathfrak{n}_{k+1}\backslash\mathfrak{n}_k$ est une algèbre de Lie abélienne pour tout k ;
(b) Si $Y \in \mathfrak{n}_k$ et $\Upsilon \in \mathfrak{n}_{-1}$ alors $[\Upsilon, Y] \in \mathfrak{n}_{k+1}$.

On construit en effet $\mathfrak{n}_{r-1}$, on achève ensuite la construction par récurrence. On pose $\mathfrak{n}_{r-1} = \mathfrak{n}_\lambda$, où λ est un poids maximal de A_{-1} dans $\mathfrak{n}$. Comme $\mathfrak{n}_\lambda$ est stable par multiplication par X_s et que $[\mathfrak{n}_\lambda, \mathfrak{n}_{-1}] = 0$, on voit que $\mathfrak{n}_{r-1}$ ainsi défini vérifie les propriétés désirées.
On en déduit l'existence de sous-groupes normaux de N, A_{-1}-stables, définis sur $\mathbb{Q}$,

$$N_0 = N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = \{1\},$$

qui vérifient les propriétés :

(i) $\mathrm{Lie}(N_k) = \mathfrak{n}_k$;
(ii) $N_{k+1}\backslash N_k$ est abélien ;
(iii) Si $\delta \in N_k$ et $\Upsilon \in \mathfrak{n}_{-1}$ $\mathrm{Ad}(\delta^{-1})(\Upsilon) - \Upsilon \in \mathfrak{n}_{k+1}$;
(iv) Si $\delta \in N_k$, $\mathrm{Ad}(\delta^{-1})(X_s) - X_s \in \mathfrak{n}_k$.

Soit $U \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q})$. Notons Δ_k un système de représentants de

$$N(\mathbb{Q}, X_s)N_k(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{Q}).$$

Montrons par récurrence sur k l'assertion suivante : il existe un unique couple $(\delta_k, \Upsilon_k) \in \Delta_k \times (\mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s) + \mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}))$ tel que

$$U = \mathrm{Ad}(\delta_k^{-1})(X + \Upsilon_k) - X. \tag{2.1}$$

L'assertion (2.1) à l'ordre 0 est triviale. Prenons comme hypothèse de récurrence l'assertion (2.1) à l'ordre k et montrons-la à l'ordre $k+1$. Tout d'abord, il existe au plus un couple $(\delta_{k+1}, \Upsilon_{k+1}) \in \Delta_{k+1} \times (\mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s) + \mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{Q}))$ tel que

$$U = \mathrm{Ad}(\delta_{k+1}^{-1})(X + \Upsilon_{k+1}) - X.$$

En effet, tout élément δ_{k+1} de Δ_{k+1} s'écrit de manière unique $\alpha\beta$ avec $\beta \in \Delta_k$ et α appartient au quotient $N_k(\mathbb{Q}, X_s)N_{k+1}(\mathbb{Q})\backslash N_k(\mathbb{Q})$ (on confond la classe et un de ses représentants). Ainsi,

$$U = \mathrm{Ad}(\beta^{-1})(X + (\mathrm{Ad}(\alpha^{-1})X - X) + \mathrm{Ad}(\alpha^{-1})\Upsilon_{k+1}) - X.$$

En utilisant les propriétés (iii) et (iv), on voit que

$$(\mathrm{Ad}(\alpha^{-1})X - X) + \mathrm{Ad}(\alpha^{-1})\Upsilon_{k+1}$$

appartient à $\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}) + \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s)$. Par unicité de l'écriture (2.1) à l'ordre k, il vient

$$\beta = \delta_k,$$

$$\Upsilon_k = (\mathrm{Ad}(\alpha^{-1})X - X) + \mathrm{Ad}(\alpha^{-1})\Upsilon_{k+1}.$$

Cette dernière égalité s'écrit dans $(\mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{Q}) + \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s))\backslash(\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}) + \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s))$

$$\Upsilon_k = \mathrm{Ad}(\alpha^{-1})X_s - X_s. \tag{2.2}$$

Rappelons (cf. [Bor91]) qu'on a, pour tout k, le morphisme défini sur $\mathbb{Q}$ suivant

$$\begin{aligned} \Psi_k : N_k(X_s)\backslash N_k &\to \mathfrak{n}_k \\ n \quad &\mapsto \mathrm{Ad}(n^{-1})(X_s) - X_s. \end{aligned}$$

De plus, Ψ_k induit un isomorphisme de $N_k(X_s)\backslash N_k$ sur son image. A cause de l'unicité de la décomposition de Jordan, $\mathrm{Ad}(y^{-1})(X_s) - X_s \in \mathfrak{n}_k(X_s)$ si et seulement si $y \in N_k(X_s)$. Comme, de plus, X_s normalise N_k, $\Psi_k(N_k(X_s)\backslash N_k)$ est fermé. D'autre part $\dim(\Psi_k(N_k(X_s)\backslash N_k)) = \dim(\mathfrak{n}_k(X_s)\backslash\mathfrak{n}_k)$. Par conséquent, Ψ_k induit un $\mathbb{Q}$-isomorphisme

$$\tilde{\Psi}_k : N_k(X_s)\backslash N_k \to \mathfrak{n}_k(X_s)\backslash\mathfrak{n}_k.$$

On en déduit le $\mathbb{Q}$-isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} \Phi_k : N_k(X_s)N_{k+1}\backslash N_k &\to (\mathfrak{n}_k(X_s) + \mathfrak{n}_{k+1})\backslash\mathfrak{n}_k \\ y \quad &\mapsto \mathrm{Ad}(y^{-1})(X_s) - X_s. \end{aligned}$$

Le morphisme Φ_k induit alors une bijection $\tilde{\Phi}_k$ entre les ensembles des points rationnels de ces variétés. En utilisant l'isomorphisme naturel entre $(\mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s) + \mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{Q}))\backslash(\mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s) + \mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}))$ et $(\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q}, X_s) + \mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{Q}))\backslash\mathfrak{n}_k(\mathbb{Q})$ et l'égalité (2.2) on peut écrire

$$\alpha = \tilde{\Phi}_k^{-1}(\mathrm{Ad}(\alpha^{-1})X_s - X_s) = \tilde{\Phi}_k^{-1}(\Upsilon_k).$$

Ainsi α et β donc δ_{k+1} et Υ_{k+1} sont uniquement déterminés.

Pour l'existence du couple $(\delta_{k+1}, \Upsilon_{k+1})$, on commence par poser $\delta_{k+1} = \tilde{\Phi}_k^{-1}(\Upsilon_k)\delta_k$. On définit alors $\Upsilon_{k+1} = \mathrm{Ad}(\delta_{k+1})(U + X) - X$ et on vérifie que $\Upsilon_{k+1} \in \mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{Q}) + \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s)$.

□

Le corollaire suivant se déduit immédiatement du lemme précédent.

Corollaire 2.4. *Sous les mêmes hypothèses, on a l'égalité suivante, pour toute fonction* $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{n}(\mathbb{A}))$,

$$\sum_{\delta \in N(\mathbb{Q}, X_s)\backslash N(\mathbb{Q})} \sum_{\Upsilon \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s)} f(\mathrm{Ad}(\delta^{-1})(X + \Upsilon) - X) = \sum_{U \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q})} f(U).$$

Corollaire 2.5. *Sous les mêmes hypothèses, on a l'égalité suivante, pour tout* $\phi \in \mathrm{L}^1(\mathfrak{n}(\mathbb{A}))$,

$$\int_{N(\mathbb{A}, X_s)\backslash N(\mathbb{A})} dn \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A}, X_s)} \phi(\mathrm{Ad}(n^{-1})(X + \Upsilon) - X) d\Upsilon = \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \phi(U) dU.$$

Preuve. On reprend les notations de la preuve du lemme 2.3. On peut alors voir que, pour tout k,

$$\int_{N(\mathbb{A},X_s)N_k(\mathbb{A})\backslash N(\mathbb{A})} dn_k \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A},X_s)+\mathfrak{n}_k(\mathbb{A})} \phi(\mathrm{Ad}(n_k)^{-1}(X+\Upsilon_k)-X)d\Upsilon_k$$

est égale à

$$\int dn_{k+1} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A},X_s)+\mathfrak{n}_{k+1}(\mathbb{A})} \phi(\mathrm{Ad}(n_{k+1})^{-1}(X+\Upsilon_{k+1})-X)d\Upsilon_{k+1},$$

–la première intégrale est prise sur $N(\mathbb{A},X_s)N_{k+1}(\mathbb{A})\backslash N(\mathbb{A})$– ce qui donne le résultat. $\square$

Corollaire 2.6. *Soient $P_1 \subset P$ des sous-groupes paraboliques de G et une classe $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$. Alors,*

$$\mathfrak{p}_1(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}_1(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}) \oplus \mathfrak{n}_1^P(\mathbb{Q}).$$

Preuve. Montrons tout d'abord que, pour un sous-groupe parabolique P de G,

$$\mathfrak{p}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o} = (\mathfrak{m}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}) \oplus \mathfrak{n}(\mathbb{Q}).$$

Pour cela, il nous suffit de voir que, pour tout $X \in \mathfrak{m}(\mathbb{Q})$ et tout $U \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q})$, les parties semi-simples X_s et $(X+U)_s$ sont conjuguées. Considérons un sous-groupe parabolique (pas forcément standard) $P_1 \subset P$ tel que $X_s \in \mathfrak{m}_1(\mathbb{Q})$ et $X_n \in \mathfrak{n}_1(\mathbb{Q})$. Du lemme (2.3), on déduit qu'il existe $\delta \in N(\mathbb{Q})$ et $U_0 \in \mathfrak{n}(\mathbb{Q}, X_s)$ tels que

$$X + U = \mathrm{Ad}(\delta^{-1})(X + U_0).$$

On voit alors que $X_n + U_0$, qui appartient à $\mathfrak{n}_1(\mathbb{Q})$, est nilpotent et commute à X_s. Donc $(X+U)_s = \mathrm{Ad}(\delta^{-1})(X_s)$.

On obtient le corollaire dans toute sa généralité en se rappelant que $\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}$ est une réunion finie de classes $\mathfrak{o}_i$ de conjugaison semi-simples de $\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. On applique alors ce qui précède dans les cas où $G = M_P$ et $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

$\square$

Il est facile d'en déduire le corollaire :

Corollaire 2.7. *Pour $P_1 \subset R \subset P$ des sous-groupes paraboliques de G et une classe de conjugaison semi-simple $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, on a*

$$(\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{r}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}) - \left(\bigcup_{P_1 \subset S \subsetneq R} \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{s}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o} \right) = \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q}).$$

La réunion est prise sur des sous-groupes paraboliques S et l'on a défini

$$\tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R = \mathfrak{m}_R - \left(\bigcup_{P_1 \subset S \subsetneq R} \mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{s} \right).$$

Le lemme suivant se déduit du lemme 2.2 et de lemmes géométriques du Sect. 6 de [Art78] (cf. également le début de la preuve du théorème 7.1 du même article).

Lemme 2.8. *Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ une classe de conjugaison semi-simple. Pour tout point $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$,*

$$k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$$

est égal à la somme sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P \subset P_2$ de

$$\sum_{\delta \in P_1(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} F^1(\delta x, T) \sigma_1^2(H_0(\delta x) - T) K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x).$$

3. Intégration de $k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$

Théorème 3.1. *Pour tout point $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$*

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)| dx \; < \; \infty.$$

Preuve. En utilisant le lemme 2.8 on montre que

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})^1} |k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)| dx \tag{3.1}$$

est majoré par la somme, sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$ de G et sur les classes de conjugaison semi-simples $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, de l'intégrale sur $P_1(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})^1$ du produit de

$$F^1(x, T)\, \sigma_1^2(H_0(x) - T) \tag{3.2}$$

avec

$$\left| \sum_{\{P : P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X + U)) dU \right|. \tag{3.3}$$

Pour tout sous-groupe parabolique P tel que $P_1 \subset P \subset P_2$ et tout $X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}$, il existe un unique sous-groupe parabolique R tel que $P_1 \subset R \subset P$ et

$$X \in (\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{r}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}) - \left(\bigcup_{P_1 \subset S \subsetneq R} \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{s}(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o} \right).$$

A l'aide de cette remarque et du corollaire 2.7, on voit que (3.3) se majore par

$$\sum_{\{R : P_1 \subset R \subset P_2\}} \left| \sum_{\{P : R \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{X \in \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}} \right.$$
$$\left. \sum_{Y \in \mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X + Y + U)) dU \right|, \tag{3.4}$$

qui, à son tour, se majore par la somme sur $\{R;\, P_1 \subset R \subset P_2\}$ et sur $X \in \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}$ de

$$\left| \sum_{\{P : R \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{Y \in \mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X + Y + U)) dU \right|. \tag{3.5}$$

Décomposons alors l'intégrale sur $P_1(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})^1$ en une intégrale sur

$$N_1(\mathbb{Q}) \backslash N_1(\mathbb{A}) \times M_1(\mathbb{Q}) \backslash M_1(\mathbb{A})^1 \times A_{P_1}^{G,\infty} \times K,$$

ce qui fait apparaître le facteur $e^{-2\rho_1(H_0(a))}$. En utilisant le fait que $N_1 = N_2 N_1^2$, on écrit que

$$x = n^* n_* m a k$$

où $k \in K$, $a \in A_{P_1}^{G,\infty}$, $m \in M_1(\mathbb{A})^1$ et n^*, n_* restent respectivement dans des compacts de $N_2(\mathbb{A})$ et $N_1^2(\mathbb{A})$. Si l'on ne considère que des x tels que $F^1(x, T) \neq 0$ *i.e.* tels que $F^1(m, T) \neq 0$, on pourra restreindre l'intégrale sur $M_1(\mathbb{Q}) \backslash M_1(\mathbb{A})^1$ aux éléments m qui ont un représentant dans

$$(N_0(\mathbb{A}).M_0(\mathbb{A})^1.A_{P_0}^{P_1,\infty}(T).K) \cap M_1(\mathbb{A})^1.$$

Ainsi, on peut restreindre l'intégrale sur $M_1(\mathbb{Q}) \backslash M_1(\mathbb{A})^1$ à une intégrale sur un ensemble compact. Limitons-nous, de plus, aux x tels que $\sigma_1^2(H_0(x) - T) \neq 0$ *i.e.* tels que $\sigma_1^2(H_1(a) - T) \neq 0$. Dans ce cas, $a^{-1} n_* a$ reste dans un compact. En utilisant l'invariance à gauche par $N_2(\mathbb{A})$ de (3.5), on en déduit que (3.1) se majore, à une constante multiplicative près, par la somme sur les sous-groupes paraboliques P_1, P_2 et R tels que $P_1 \subset R \subset P_2$ et sur les éléments $X \in \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^{R}(\mathbb{Q})$ de la borne supérieure sur y quand y parcourt un compact Γ de $G(\mathbb{A})^1$, de l'intégrale sur $a \in A_{P_1}^{G,\infty}$ du produit de

$$e^{-2\rho_1(H_0(a))}\sigma_1^2(H_0(a)-T) \tag{3.6}$$

par

$$\left|\sum_{\{P:R\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/A_G)}\sum_{Y\in\mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})}\right.$$
$$\left.\int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})\,\mathrm{Ad}(a^{-1})(X+Y+U))dU\right|. \tag{3.7}$$

Si $R = P_2$, (3.7) s'écrit

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathfrak{n}_{P_2}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})\,\mathrm{Ad}(a^{-1})(X+U))dU\right|\\ &= e^{2\rho_R(H_0(a))}.\left|\int_{\mathfrak{n}_{P_2}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X+U))dU\right|.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Si $R \subsetneq P_2$, on applique la formule de Poisson à la somme sur Y dans (3.7) ce qui donne

$$\left|\sum_{\{P:R\subset P\subset P_2\}}(-1)^{\dim(A_P/A_G)}\sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^P(\mathbb{Q})}\right.$$
$$\left.\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})\,\mathrm{Ad}(a^{-1})(X+U))\psi(\langle U,\overline{Y}\rangle)dU\right|. \tag{3.9}$$

Notons $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\mathbb{Q})'$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\mathbb{Q})$ qui n'appartiennent à aucun $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P}(\mathbb{Q})$ pour $R \subset P \subsetneq P_2$. A l'aide du lemme 2.2 on peut écrire (3.9) sous la forme

$$\left|\sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\mathbb{Q})'}\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})\,\mathrm{Ad}(a^{-1})(X+U))\psi(\langle U,\overline{Y}\rangle)dU\right|. \tag{3.10}$$

Effectuons le changement de variables $U \mapsto \mathrm{Ad}(a)U$ dans cette dernière expression ce qui donne

$$e^{2\rho_R(H_0(a))}. \left| \sum_{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\mathbb{Q})'} \int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X + U)) \right.$$
$$\left. | \sum_{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\mathbb{Q})'} \psi(\langle U, \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\rangle) dU \right|. \qquad (3.11)$$

Posons $N = N(f)$ avec $N(f)$ défini dans l'introduction. On peut restreindre, ce que l'on fera par la suite, les sommes sur X et $\overline{Y}$ à des sommes qui portent respectivement sur les ensembles $\tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\frac{1}{N}\mathbb{Z})$ et $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})$.
Considérons un entier naturel n. Par des intégrations par parties, on peut trouver un multi-indice i tel que, pour tout $\overline{Y}$ non nul,

$$\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X + U))\psi(\langle U, \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\rangle) dU$$

soit égal, à une constante multiplicative près, qui ne dépend que de y et ce de manière continue, à

$$\| \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\|^{-n} \int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} \partial^i f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X + U))\psi(\langle U, \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\rangle) dU.$$

De cette façon, on en déduit pour (3.11) le majorant suivant, à une constante multiplicative près indépendante de a,

$$e^{2\rho_R(H_0(a))}. \left(\sum_{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'} \| \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\|^{-n} \right).$$
$$\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} |\partial^i f(\mathrm{Ad}(y^{-1})(\mathrm{Ad}(a^{-1})X + U))| dU. \qquad (3.12)$$

Si $R = P_2$ dans (3.7), on pose $\overline{\mathfrak{n}}_{P_2}^{P_2}(\mathbb{Q})' = \{0\}$. Dans ce cas, le majorant (3.12) est encore valable avec $i = 0$ $n = 0$ et la convention $0^0 = 1$. A l'aide du lemme 2.1 on exhibe, pour $\mu \in \Phi(A_1, M_R)$, des fonctions positives $\phi_\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_\mu(\mathbb{A}))$ et $\phi_{\mathfrak{n}_R} \in \mathcal{S}(\mathfrak{n}_R(\mathbb{A}))$ telles que pour tout $Z \in \mathfrak{r}(\mathbb{A})$ et pour $y \in \Gamma$

$$|\partial^i f(\mathrm{Ad}(y^{-1})Z)| \leqslant \left(\prod_{\mu \in \Phi(A_1, M_R)} \phi_\mu(Z_\mu) \right) .\phi_{\mathfrak{n}_R}(Z_{\mathfrak{n}_R}).$$

On majore alors la somme sur $X \in \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\frac{1}{N}\mathbb{Z})$ de (3.7) par le produit de

$$e^{2\rho_R(H_0(a))}$$

et de

$$\left[\sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'} \| \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\|^{-n}\right]\left[\sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\frac{1}{N}\mathbb{Z})}\left(\prod_{\mu\in\Phi(A_1,M_R)}\phi_\mu(\mu(a)^{-1}X_\mu)\right)\right]$$
$$\left[\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})}\phi_{\mathfrak{n}_R}(U)dU\right]. \quad (3.13)$$

Examinons successivement chaque facteur de (3.13). Pour majorer le premier facteur, on décompose $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}$ sous l'action de A_1. Chaque poids de A_1 dans $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients négatifs d'éléments de Δ_1^2. On considère les sous-ensembles S de l'ensemble de ces poids qui vérifient la propriété suivante : $\forall\alpha \in \Delta_1^2 - \Delta_1^R$, il existe $\mu \in S$ tel que sa coordonnée sur α soit strictement négative. On pose

$$\overline{\mathfrak{n}}_S' = \{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2} \mid \forall\mu \in S\ \overline{Y}_\mu \neq 0 \text{ et } \forall\mu \notin S\ \overline{Y}_\mu = 0\}.$$

La somme sur $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'$ est alors égale à la somme sur de tels S et sur $\overline{\mathfrak{n}}_S(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'$. Comme Arthur (cf. [Art78] p.946), on en déduit la majoration suivante

$$\sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'} \| \mathrm{Ad}(a^{-1})\overline{Y}\|^{-n} \ll \prod_{\alpha\in\Delta_1^2} e^{-k_\alpha\alpha(H_0(a))}. \quad (3.14)$$

Le symbole $\ll$ signifie "majoré à une constante multiplicative près". Pour toute racine $\alpha \in \Delta_1^2$, k_α est positif. De plus, si $\alpha \in \Delta_1^2 - \Delta_1^R$, k_α tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. On fixe alors n pour que les k_α soient assez grands pour $\alpha \in \Delta_1^2 - \Delta_1^R$.

Majorons ensuite le deuxième facteur de (3.13). Pour cela, on considère les parties S de l'ensemble Σ_1^R des racines de A_1 dans N_1^R qui vérifient la propriété suivante : $\forall\alpha \in \Delta_1^R$, il existe $\mu \in S$ tel que sa coordonnée sur α soit strictement positive. Alors le deuxième facteur de (3.13) se majore par la somme sur de tels S de

$$\left[\prod_{\mu\in S}\left(\sum_{X_-\in\mathfrak{m}_{-\mu}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'}\phi_{-\mu}(\mu(a)X_-)\right)\right]$$
$$\left[\prod_{\mu\in\Sigma_1^R}\left(\sum_{X_+\in\mathfrak{m}_\mu(\frac{1}{N}\mathbb{Z})}\phi_\mu(\mu(a^{-1})X_+)\right)\right]\left[\sum_{X_0\in\mathfrak{m}_1(\frac{1}{N}\mathbb{Z})}\phi_0(X_0)\right], \quad (3.15)$$

où $\mathfrak{m}'_\mu = \mathfrak{m}_\mu - \{0\}$. Examinons alors (3.15) : le premier facteur est à décroissance rapide en les $\alpha(a)$ pour $\alpha \in \Delta_1^R$, le deuxième est à croissance polynomiale, majoré par un polynôme de degré borné en les mêmes variables, le dernier enfin ne dépend plus de a. Ainsi

$$(3.15) \ll \prod_{\alpha \in \Delta_1^R} e^{-l_\alpha \alpha(H_0(a))}$$

où les l_α sont des réels positifs aussi grands que l'on veut. Enfin, le dernier facteur de (3.13) est une intégrale convergente qui ne dépend pas de a. Par conséquent, on peut majorer (3.1) par une somme finie de termes du type

$$\int_{A_{P_1}^{G,\infty}} \sigma_1^2(H_0(a) - T).e^{-2(\rho_1 - \rho_R)(H_0(a))}. \prod_{\alpha \in \Delta_1^2} e^{-m_\alpha \alpha(H_0(a))} da, \tag{3.16}$$

où les m_α sont des réels positifs aussi grands que l'on veut. La projection de $H_0(a)$ sur $\mathfrak{a}_1^G$ s'écrit

$$\sum_{\alpha \in \Delta_1^2} t_\alpha \varpi_\alpha^\vee + H_2.$$

Les t_α sont des réels et $H_2 \in \mathfrak{a}_2^G$. Pour a tel que $\sigma_1^2(H_0(a) - T) \neq 0$, les t_α sont des réels positifs et on a la majoration suivante (voir le corollaire 6.2 p.939 dans [Art78])

$$\|H_2\| \ll \left(1 + \|\sum_{\alpha \in \Delta_1^2} t_\alpha \varpi_\alpha^\vee\|\right) \ll \left(1 + \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} t_\alpha\right).$$

Il s'ensuit que H_2 parcourt un compact dont le volume est borné par un polynôme en les t_α et que $e^{-2(\rho_1 - \rho_R)(H_0(a))}$ se majore par l'exponentielle d'une combinaison linéaires en les t_α. Comme on peut choisir les m_α aussi grands que l'on veut, il est clair alors qu'il existe des entiers p_α et des réels positifs q_α tels que (3.16) soit majoré par

$$\prod_{\alpha \in \Delta_1^2} \int_0^\infty (1 + t_\alpha)^{p_\alpha} e^{-q_\alpha t_\alpha} dt_\alpha.$$

Cette dernière expression est convergente. □

4. La formule des traces

4.1. La fonction géométrique Γ

Pour tout sous-groupe parabolique Q de G, on définit sur $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ la fonction Γ_Q par la formule :

$$\forall\, (H, T) \in \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0, \quad \Gamma_Q(H, T) = \sum_{\{R:\ R \supset Q\}} (-1)^{\dim(A_R/A_G)} \tau_Q^R(H) \hat{\tau}_R(H - T).$$

La somme est à prendre sur les sous-groupes paraboliques standards de G. Pour $(H, T) \in \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$, la somme qui définit $\Gamma_Q(H, T)$ ne dépend que des projections de H et T sur $\mathfrak{a}_Q^G$. On a, de plus, la relation suivante (cf. [Art81] p.13)

$$\hat{\tau}_Q(H - T) = \sum_{\{R:\ R \supset Q\}} (-1)^{\dim(A_R/A_G)} \hat{\tau}_Q^R(H) \Gamma_R(H, T). \tag{4.1}$$

On rappelle également le résultat suivant (cf. les lemmes 2.1 et 2.2 de [Art81]).

Lemme 4.1. *1) Soit un point $T \in \mathfrak{a}_0$. La fonction $H \mapsto \Gamma_Q(H, T)$, vue comme fonction sur $\mathfrak{a}_Q^G$, est à support compact.*
2) La fonction $T \mapsto \int_{\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q(H, T) dH$ est un polynôme homogène en T de degré $\dim(A_Q/A_G)$.

4.2. Des distributions polynomiales

D'après le théorème 3.1, on peut définir sur $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ les distributions suivantes, pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ et $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$,

$$J^{G,T}(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k^T(x, f) dx$$

et

$$J_{\mathfrak{o}}^{G,T}(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^T(x, f) dx.$$

On a également l'égalité

$$J^{G,T}(f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^{G,T}(f) \tag{4.2}$$

qui est l'analogue de la partie géométrique de la formule des traces d'Arthur. Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ et P un sous-groupe parabolique de G ; on note $\mathcal{O}^{\mathfrak{m}_P}$ l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans $\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})$. L'intersection $\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})$ est une réunion finie, éventuellement vide, de classes $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n \in \mathcal{O}^{\mathfrak{m}_P}$. En appliquant ce qui précède au groupe réductif M_P, on en déduit des distributions $J_{\mathfrak{o}_i}^{M_P,T}$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{m}_P(\mathbb{A}))$. On définit alors

$$J_{\mathfrak{o}}^{M_P,T} = \sum_{i=1}^{n} J_{\mathfrak{o}_i}^{M_P,T}.$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira J^T pour $J^{G,T}$.

Théorème 4.2. *Les distributions $J^T(f)$ et $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ sont des polynômes en T pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$, de degré global au plus* $\dim(A_0/A_G)$.

Preuve. Fixons un point $T' \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. On fait varier T dans $T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. Soient P un sous-groupe parabolique de G, $\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ et $x \in G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$. Pour le couple $(H_P(\delta x), T)$, l'égalité (4.1) s'écrit

$$\hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T) = \sum_{\{Q:\ Q \supset P\}} (-1)^{\dim(A_Q/A_G)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T')$$
$$\Gamma_Q(H_Q(\delta x) - T', T - T').$$

En utilisant cette dernière expression, on obtient l'égalité

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_P (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \sum_{\{Q:\ P \subset Q\}}$$
$$(-1)^{\dim(A_Q/A_G)} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x) \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T') \Gamma_Q(H_Q(\delta x) - T', T - T') dx.$$

On décompose la somme sur $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ en une double somme sur

$$(P(\mathbb{Q})\backslash Q(\mathbb{Q})) \times (Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})).$$

L'intégrale sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ de la somme sur $Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})$ s'interprète alors comme l'intégrale sur $Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$. On utilise également l'isomorphisme

$$P(\mathbb{Q})\backslash Q(\mathbb{Q}) \cong (P(\mathbb{Q}) \cap M_Q(\mathbb{Q}))\backslash M_Q(\mathbb{Q}).$$

De cette manière, on obtient que

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_Q \int_{Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{\{P:\ P \subset Q\}} (-1)^{\dim(A_P/A_Q)} \sum_{\delta \in (P(\mathbb{Q}) \cap M_Q(\mathbb{Q}))\backslash M_Q(\mathbb{Q})}$$
$$K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x).\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T') \Gamma_Q(H_Q(\delta x) - T', T - T') dx. \quad (4.3)$$

On décompose l'intégrale sur $Q(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ en une intégrale sur

$$N_Q(\mathbb{Q})\backslash N_Q(\mathbb{A}) \times A_Q^{G,\infty} \times M_Q(\mathbb{Q})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1 \times K.$$

Si, suivant cette décomposition $x = namk$, il apparaît le facteur $\delta_Q(a)^{-1}$. Cependant,

$$K_{P,\mathfrak{o}}(\delta namk) = \delta_Q(a) K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk).$$

En effet, $\delta namk = a\,\delta a^{-1} na\delta^{-1}\,\delta mk$. Ainsi $K_{P,\mathfrak{o}}(\delta namk)$ égale

$$\sum_{\gamma\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(\delta mk)^{-1}\,\mathrm{Ad}(\delta a^{-1} na\delta^{-1})^{-1}(\gamma + \mathrm{Ad}\,a^{-1}U))dU.$$

Le changement de variable $U \to \mathrm{Ad}(a)U$ donne l'égalité

$$K_{P,\mathfrak{o}}(\delta namk) = \delta_Q(a) K_{P,\mathfrak{o}}(\delta a^{-1} na\delta^{-1}\,\delta mk).$$

En remarquant que $\delta a^{-1} na\delta^{-1} \in N_Q(\mathbb{A})$ et en se rappelant que $K_{P,\mathfrak{o}}$ est invariant à gauche par $N_P(\mathbb{A})$ donc par $N_Q(\mathbb{A})$, on obtient l'égalité désirée. Par ailleurs, on remarque que

$$\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta x) - T') = \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta m) - T')$$

et

$$\Gamma_Q(H_Q(\delta x) - T', T - T') = \Gamma_Q(H_Q(a) - T', T - T').$$

On en déduit que l'intégrande dans (4.3) ne dépend plus de l'élément $n \in N_Q(\mathbb{Q})\backslash N_Q(\mathbb{A})$. Comme le volume de $N_Q(\mathbb{Q})\backslash N_Q(\mathbb{A})$ est 1, on obtient que la distribution $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ est égale à la somme sur les sous-groupes paraboliques Q de G du produit de

$$\int_{A_Q^{G,\infty}} \Gamma_Q(H_Q(a) - T', T - T')da$$

par

$$\int_K \int_{M_Q(\mathbb{Q})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{\{P:\ P\subset Q\}} (-1)^{\dim(A_P/A_Q)} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\cap M_Q(\mathbb{Q})\backslash M_Q(\mathbb{Q})} K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk).\hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta m) - T')dmdk. \tag{4.4}$$

Par définition de la mesure de Haar sur $A_Q^{G,\infty}$, on a l'égalité suivante

$$\int_{A_Q^{G,\infty}} \Gamma_Q(H_Q(a) - T', T - T')da = \int_{H\in\mathfrak{a}_Q^G} \Gamma_Q(H, T - T')dH.$$

En utilisant le fait que $\mathfrak{n}_P = \mathfrak{n}_P^Q \oplus \mathfrak{n}_Q$, on voit que $K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk)$ égale

$$\sum_{X\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} dU \int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(k^{-1}m^{-1}\delta^{-1})(X + U + V))\,dV$$

$$= \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} dU \int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(k^{-1})(\mathrm{Ad}(m^{-1}\delta^{-1})(X + U) + V)\,dV,$$

par le changement de variable $V \to \mathrm{Ad}(\delta m)V$. On définit alors une nouvelle fonction f_Q dans la classe de Schwartz de $\mathfrak{m}_Q(\mathbb{A})$ par

$$\forall\, Y \in \mathfrak{m}_Q(\mathbb{A}),\ \ f_Q(Y) = \int_K \int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(k^{-1})(Y+V))dVdk.$$

On peut alors écrire que

$$\int_K K_{P,\mathfrak{o}}(\delta mk) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} f_Q(\mathrm{Ad}(\delta m)^{-1}(X+U))dU.$$

En baptisant cette dernière expression $K_{P,\mathfrak{o}}^{M_Q}(\delta m)$, on trouve l'expression suivante pour (4.4)

$$\int_{M_Q(\mathbb{Q})\backslash M_Q(\mathbb{A})^1} \sum_{\{P:\ P\subset Q\}} (-1)^{\dim(A_P/A_Q)} \sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\cap M_Q(\mathbb{Q})\backslash M_Q(\mathbb{Q})} \hat{\tau}_P^Q(H_P(\delta m)-T').K_{P,\mathfrak{o}}^{M_Q}(\delta m)\,dm,$$

qui n'est autre que $J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}(f_Q)$. On a donc prouvé le développement suivant, où la somme est prise sur les sous-groupes paraboliques de G,

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_Q J_{\mathfrak{o}}^{M_Q,T'}(f_Q).\int_{H\in\mathfrak{a}_Q/\mathfrak{a}_G} \Gamma_Q(H,T-T')dH.$$

On conclut alors en utilisant le lemme (4.1).

□

Corollaire 4.3. *Les distributions J^T et $J_{\mathfrak{o}}^T$ se prolongent à tout $T \in \mathfrak{a}_0$ de façon polynomiale.*

4.3. Une estimation asymptotique

Le résultat suivant est connu dans le cas des groupes pour des fonctions à support compact (cf. le théorème 1 de [Art79]).

Proposition 4.4. *Fixons ϵ_0 un réel positif. Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout point $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ tel que $\forall\alpha \in \Delta_0\ \alpha(T) \geqslant \epsilon_0\|T\|$, on a :*

$$\left| J^T(f) - \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} F^G(x,T)\left(\sum_{X\in\mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\right)\right| = O\left(e^{-\epsilon\|T\|}\right).$$

Preuve. En utilisant le lemme 2.8, on montre que

$$\left| J^T(f) - \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} F^G(x,T) \left(\sum_{X\in\mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X) \right) \right| \tag{4.5}$$

se majore par la somme sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$ de G tels que $(P_1, P_2) \neq (G, G)$ de

$$\int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} dx\ F^1(x,T)\sigma_1^2(H_0(x)-T)\ .$$

$$\left| \sum_{\{P:P_1\subset P\subset P_2\}} (-1)^{\dim(A/A_G)} \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+U))dU \right|.$$

En effet dans le lemme 2.8, les termes correspondant à $P_1 = P_2 = G$ se résument à $F^G(x,T)K_{G,\mathfrak{o}}(x)$, donc, en les sommant sur les classes $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$, on obtient $F^G(x,T)\big(\sum_{X\in\mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X)\big)$. D'autre part, on a $\sigma_1^2 \equiv 0$ dès que $P_1 = P_2$ et $P_1 \neq G$. Ainsi, en procédant comme dans la démonstration du théorème 3.1, on voit que (4.5) se majore par la somme, sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset R \subset P_2$ de G tels que $P_1 \subsetneq P_2$, de

$$\begin{aligned} \int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} \quad F^1(x,T)\sigma_1^2(H_0(x)-T) \sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q})} \Bigg| \sum_{\{P:P_1\subset P\subset P_2\}} \\ (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{Y\in\mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+Y+U))dU \Bigg| dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Définissons la transformée de Fourier partielle de f suivante par

$$\forall\, Y \in \overline{\mathfrak{n}}_R(\mathbb{A}),\ \ \Phi_X(x,Y) = \int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+U))\psi(\langle U,Y\rangle)dU. \tag{4.7}$$

Alors, en appliquant la formule de Poisson à la somme sur $Y \in \mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})$ dans l'intégrale (4.6) on obtient

$$\int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} F^1(x,T)\sigma_1^2(H_0(x)-T). \sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q})} \left| \sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^2(\mathbb{Q})'} \Phi_X(x,\overline{Y}) \right| dx. \tag{4.8}$$

On utilise à nouveau la décomposition

$$P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1 = N_{P_1}(\mathbb{Q})\backslash N_{P_1}(\mathbb{A}) \times M_{P_1}(\mathbb{Q})\backslash M_{P_1}(\mathbb{A})^1 \times A_{P_1}^{G,\infty} \times K.$$

Soit $x \in G(\mathbb{A})^1$ un représentant d'un élément de $P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$. Suivant cette décomposition $x = nmak$ et $F^1(x,T) = F^1(m,T)$. Donc, si l'on restreint l'intégrale sur les x tels que $F^1(x,T) \neq 0$, on pourra restreindre l'intégrale sur $M_{P_1}(\mathbb{Q})\backslash M_{P_1}(\mathbb{A})^1$ aux éléments qui ont un représentant dans

$$(N_0(\mathbb{A}).M_0(\mathbb{A})^1.A_{P_0}^{P_1,\infty}(T).K) \cap M_{P_1}(\mathbb{A})^1.$$

Ainsi, l'intégrale (4.8) se majore par l'intégrale sur $k \in K$, $a \in A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$, $a_1 \in A_{P_1}^{G,\infty}$, m, n et n_2 qui parcourent respectivement des compacts fixés indépendants de T de $M_0(\mathbb{A})^1$, $N_0(\mathbb{A}) \cap M_{P_2}(\mathbb{A})^1$ et $N_{P_2}(\mathbb{A})$ de

$$\delta_0(a_1a)^{-1}\sigma_1^2(H_{P_1}(a_1)-T).\sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q})}\ \sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^2(\mathbb{Q})'} |\Phi_X(n_2na_1amk,\overline{Y})|.$$

Par des changements de variable successifs, on voit que

$$\begin{aligned}|\Phi_X(n_2na_1amk,\overline{Y})| &= |\Phi_X(na_1amk,\overline{Y})|\\ &= |\Phi_X(a_1a.(a_1a)^{-1}n(a_1a)mk,\overline{Y})|\\ &= \delta_R(a_1a)\ |\Phi_{\mathrm{Ad}(a_1a)^{-1}X}((a_1a)^{-1}n(a_1a)mk,\mathrm{Ad}(a_1a)^{-1}\overline{Y})|.\end{aligned}$$

Pour a_1 tel que $\sigma_1^2(H_{P_1}(a_1)-T) \neq 0$, $(a_1a)^{-1}n(a_1a)$ reste dans un compact indépendant de T (pour cela voir [Art78] p.944). On trouve alors que l'intégrale (4.8) se majore par la borne supérieure sur y restant dans un compact fixé Γ indépendant de T de l'intégrale sur $a_1 \in A_{P_1}^{G,\infty}$ et $a \in A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$ de

$$\delta_0^R(a_1a)^{-1}\sigma_1^2(H_{P_1}(a_1)-T)\sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q})}\ \sum_{\overline{Y}\in\overline{\mathfrak{n}}_R^2(\mathbb{Q})'}|\Phi_{\mathrm{Ad}(a_1a)^{-1}X}(y,\mathrm{Ad}(a_1a)^{-1}\overline{Y})|, \quad (4.9)$$

où l'on a posé, pour tout $a \in A_{P_0}$, $\delta_0^R(a) = \delta_0(a)\delta_R(a)^{-1}$.

Soit N l'entier noté $N(f)$ dans l'introduction. On considère un entier k que l'on précisera par la suite. En regardant la décomposition de $\overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}$ sous l'action de A_0, on montre qu'il existe :

- un entier naturel $n \in \mathbb{N}$;
- pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^2$, un réel $k_\alpha \geqslant 0$;
- un réel $c_1 > 0$,

qui vérifient les conditions suivantes :

- si $R = P_2, n = 0$;

– pour toute racine $\alpha \in \Delta_0^2 - \Delta_0^R$, $k_\alpha \geqslant k$;
– la majoration (4.10) ci-dessous est vraie pour tout $a_0 \in A_0^\infty$.

$$\sum_{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^{P_2}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'} \| \operatorname{Ad}(a_0)^{-1}\overline{Y}\|^{-n} \leqslant c_1 \prod_{\alpha \in \Delta_0^2} e^{-k_\alpha \alpha(H_0(a_0))}. \tag{4.10}$$

On fixe alors de telles données. Des intégrations par parties montrent que, pour tout $\overline{Y} \neq 0$,

$$|\Phi_{\operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}X}(y, \operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}\overline{Y})| = \\ c(y)\| \operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}\overline{Y}\|^{-n} |\Phi^{(i)}_{\operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}X}(y, \operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}\overline{Y})|,$$

où $c(y)$ dépend de y de façon continue. On a noté i un multi-indice et $\Phi^{(i)}$ la transformée de Fourier partielle définie en (4.7) de $\partial^i f$.
Comme dans la démonstration du théorème 3.1, on exhibe, pour tout poids $\mu \in \Phi(A_0, M_R)$, des fonctions positives $\phi_\mu \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_\mu(\mathbb{A}))$ et $\phi_{\mathfrak{n}_R} \in \mathcal{S}(\mathfrak{n}_R(\mathbb{A}))$ telles que, pour tout $Z \in \mathfrak{r}(\mathbb{A})$ et pour $y \in \Gamma$,

$$\left|\partial^i f(\operatorname{Ad}(y^{-1})Z)\right| \leqslant \left(\prod_{\mu \in \Phi(A_0, M_R)} \phi_\mu(Z_\mu) \right) . \phi_{\mathfrak{n}_R}(Z_{\mathfrak{n}_R}).$$

Pour tout $a_0 \in A_0^\infty$, posons

$$\Psi(a_0) = \sum_{X \in \tilde{\mathfrak{m}}_{P_1}^R(\frac{1}{N}\mathbb{Z})} \left(\prod_{\mu \in \Phi(A_0, M_R)} \phi_\mu(\mu(a_0)^{-1} X_\mu) \right).$$

Définissons la constante suivante

$$c_2 = c_1 . \sup_{y \in \Gamma}(c(y)) . \int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} \phi_{\mathfrak{n}_R}(U) dU.$$

On obtient alors la majoration

$$\sum_{X \in \tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q})} \sum_{\overline{Y} \in \overline{\mathfrak{n}}_R^2(\mathbb{Q})'} |\Phi_{\operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}X}(y, \operatorname{Ad}(a_1 a)^{-1}\overline{Y})| \\ \leqslant c_2 \Psi(a_1 a) \prod_{\alpha \in \Delta_0^2} e^{-k_\alpha \alpha(H_0(a_1 a))}, \tag{4.11}$$

donc le majorant suivant pour l'expression (4.9)

$$c_2.\delta_0^R(a_1a)^{-1}.\sigma_1^2(H_{P_1}(a_1)-T).\Psi(a_1a)\prod_{\alpha\in\Delta_0^2}e^{-k_\alpha\alpha(H_0(a_1a))}. \tag{4.12}$$

Notons $\mathcal{C}_0^2(T_1)$ l'ensemble des $a_0\in A_0^\infty$ tels que $\alpha(H_0(a_0)-T_1)>0$ pour toute racine $\alpha\in\Delta_0^2$. Majorons $\Psi(a_0)$ pour $a_0\in\mathcal{C}_0^2(T_1)$. Pour cela, on décompose $\mathfrak{m}_R$ sous l'action de A_0. On considère les parties S de l'ensemble Σ_0^R des racines positives de A_0 dans $\mathfrak{m}_R$ qui vérifient la propriété suivante : pour toute racine $\alpha\in\Delta_0^R-\Delta_0^1$, il existe une racine $\mu\in S$ tel que sa coordonnée sur α soit strictement positive. Alors $\Psi(a_0)$ est majoré par la somme sur de tels S de

$$\left[\prod_{\mu\in S}\left(\sum_{X_-\in\mathfrak{m}_{-\mu}(\frac{1}{N}\mathbb{Z})'}\phi_{-\mu}(\mu(a_0)X_-)\right)\right]$$
$$\left[\prod_{\mu\in\Sigma_0^R}\left(\sum_{X_+\in\mathfrak{m}_\mu(\frac{1}{N}\mathbb{Z})}\phi_\mu(\mu(a_0^{-1})X_+)\right)\right]\left[\sum_{X_0\in\mathfrak{m}_1(\frac{1}{N}\mathbb{Z})}\phi_0(X_0)\right]. \tag{4.13}$$

Le premier facteur ci-dessus est à décroissance rapide en les $\alpha(a_0)$ pour $\alpha\in\Delta_0^R-\Delta_0^1$. Pour $\alpha\in\Delta_0^1$, soit il est à décroissance rapide en $\alpha(a_0)$ soit il ne dépend pas de $\alpha(a_0)$. Il existe donc $c_3>0$, qui dépend éventuellement de T_1, tel que, pour $a_0\in\mathcal{C}_0^2(T_1)$, ce facteur soit majoré par

$$c_3\prod_{\alpha\in\Delta_0^R-\Delta_0^1}e^{-k\,\alpha(H_0(a_0))}.$$

Pour majorer le deuxième facteur de (4.13), on rappelle le résultat suivant : soient un entier naturel $d\geqslant 1$ et ϕ une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs positives. On montre, à l'aide de la formule de Poisson, qu'il existe $C>0$ tel que, pour tout réel t qui vérifie $0<t\leqslant 1$, on ait l'inégalité

$$\sum_{X\in\mathbb{Z}^d}\phi(tX)\leqslant Ct^{-d}.$$

En appliquant ce résultat, on obtient l'existence d'un réel $c_4>0$ et, pour tout $\alpha\in\Delta_0^R$, d'un entier d_α, de sorte que, pour $a_0\in\mathcal{C}_0^2(T_1)$, le deuxième facteur de (4.13) soit majoré par

$$c_4\prod_{\alpha\in\Delta_0^R}e^{d_\alpha\,\alpha(H_0(a_0))}. \tag{4.14}$$

En fait, on peut calculer d_α : c'est la somme sur $\mu \in \Sigma_0^R$, du produit de la dimension de $\mathfrak{m}_\mu$ par la coordonnée de μ sur α. On peut donc écrire (4.14) sous la forme

$$c_4 \delta_0^R(a_0).$$

Enfin, le dernier facteur de (4.13) est indépendant de a_0. Il existe donc $c_5 > 0$ tel que, pour tout $a_0 \in \mathcal{C}_0^2(T_1)$, on ait l'inégalité

$$\Psi(a_0) \leqslant c_5 \delta_0^R(a_0) \prod_{\alpha \in \Delta_0^R - \Delta_0^1} e^{-k\,\alpha(H_0(a_0))}. \tag{4.15}$$

On doit encore, pour majorer (4.8), intégrer le majorant (4.12) sur $a_1 \in A_{P_1}^{G,\infty}$ et $a \in A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$. On peut donc supposer que

$$\sigma_1^2(H_{P_1}(a_1) - T) \neq 0. \tag{4.16}$$

Ecrivons alors que

$$H_0(a_1 a) = H_{P_1}(a_1) + H_0(a) = \left(\sum_{\beta \in \Delta_1^2} t_\beta \varpi_\beta^\vee + H_2 \right) - \left(\sum_{\delta \in \Delta_0^1} r_\delta \delta^\vee \right) + T,$$

où t_β et r_δ sont des réels et $H_2 \in \mathfrak{a}_2$. Puisque $a \in A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$,

$$\forall\, \delta \in \Delta_0^1, \quad \delta(H_0(a_1 a) - T_1) = \delta(H_0(a) - T_1) > 0.$$

On a également

$$\forall\, \varpi \in \hat{\Delta}_0^1, \quad \varpi(H_0(a) - T) \leqslant 0,$$

ce qui revient à affirmer que, pour tout $\delta \in \Delta_0^1$, $r_\delta \geqslant 0$. L'hypothèse (4.16) implique que t_β est positif pour tout $\beta \in \Delta_1^2$ et que H_2 appartient à un ensemble compact dont le volume est majoré par un polynôme en les t_β, disons

$$c_6 \prod_{\beta \in \Delta_1^2} (1 + t_\beta)^{n_\beta}.$$

On a utilisé pour cela le corollaire 6.2 de [Art78]. Soit $\alpha \in \Delta_0^2$. Si $\alpha \in \Delta_0^1$, on vient de voir que

$$\alpha(H_0(a_1 a) - T_1) > 0.$$

Si $\alpha \notin \Delta_0^1$, α coïncide sur $\mathfrak{a}_1^2$ avec une unique racine $\beta(\alpha) \in \Delta_1^2$. On en déduit que :

$$\alpha(H_0(a_1a)) = t_{\beta(\alpha)} - \left(\sum_{\delta\in\Delta_0^1} r_\delta\alpha(\delta^\vee)\right) + \alpha(T).$$

Cependant, pour tout $\delta \in \Delta_0^1$, $r_\delta \geqslant 0$ et $\alpha(\delta^\vee) \leqslant 0$ (pour ce dernier point, voir le paragraphe 2 de [Art76]). D'où l'inégalité

$$\alpha(H_0(a_1a)) \geqslant t_{\beta(\alpha)} + \alpha(T).$$

Le second membre de cette dernière inégalité est positif. Comme $T_1 \in -\mathfrak{a}_0^+$, on a *a fortiori*

$$\alpha(H_0(a_1a) - T_1) > 0.$$

Donc $a_1a \in \mathcal{C}_0^2(T_1)$. On peut appliquer la majoration (4.15) à $a_0 = a_1a$. Il existe alors c_7 tel que l'expression (4.12) soit majoré par

$$c_7 \prod_{\alpha\in\Delta_0^R-\Delta_0^1} e^{-k\,\alpha(H_0(a_1a))} \prod_{\alpha\in\Delta_0^2} e^{-k_\alpha\alpha(H_0(a_1a))}. \tag{4.17}$$

Pour obtenir une majoration de l'intégrale (4.8), il nous faut intégrer cette dernière expression sur $a_1 \in A_{P_1}^{G,\infty}$ et $a \in A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$. Posons

$$k'_\alpha = \begin{cases} k_\alpha & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_0^2 - \Delta_0^R; \\ k_\alpha + k & \text{pour tout } \alpha \in \Delta_0^R - \Delta_0^1. \end{cases}$$

On voit qu'il existe $c_8 > 0$ tel que l'intégrale (4.8) soit majorée par

$$c_8 \operatorname{vol}(A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)) \prod_{\alpha\in\Delta_0^2-\Delta_0^1} \left(e^{-k'_\alpha\alpha(T)} \int_0^\infty (1+t)^{n_{\beta(\alpha)}} e^{-k'_\alpha t}\,dt\right). \tag{4.18}$$

Comme le volume de $A_{P_0}^{P_1,\infty}(T)$ croît polynomialement en T, que $k'_\alpha \geqslant k$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^2 - \Delta_0^1$ et que $\Delta_0^2 - \Delta_0^1$ est non vide, le fait de supposer $\alpha(T) \geqslant \epsilon_0\|T\|$ pour tout $\alpha \in \Delta_0$ implique que l'expression (4.18) est un $O(e^{-\epsilon\|T\|})$ pourvu que l'on choisisse k assez grand. Cela achève la démonstration. □

4.4. La formule des traces pour les algèbres de Lie

Théorème 4.5.

$$\forall\, T \in \mathfrak{a}_0, \quad \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathcal{O}} J_{\mathfrak{o}}^T(\hat{f})$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f définie en 1.8.

Preuve. La formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X) = \sum_{X \in \mathfrak{g}(\mathbb{Q})} \hat{f}(\mathrm{Ad}(x^{-1})X).$$

En utilisant la proposition 4.4, on montre que pour $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$ tel que $\forall \alpha \in \Delta_0$, $\alpha(T) \geqslant \epsilon_0 \|T\|$,

$$|J^T(f) - J^T(\hat{f})| = O(e^{-\epsilon\|T\|}).$$

Comme $J^T(f)$ et $J^T(\hat{f})$ sont des polynômes en T (voir le corollaire 4.3), on en déduit que

$$J^T(f) = J^T(\hat{f}).$$

On obtient la formule désirée en appliquant l'égalité (4.2) et en utilisant le fait que $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$ et $J_{\mathfrak{o}}^T(\hat{f})$ sont aussi des polynômes en T. □

Soit $T_0 \in \mathfrak{a}_0$ défini dans le lemme 1.1 de [Art81]. On rappelle que T_0 vérifie l'égalité suivante, pour tout $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$ et $s \in \Omega$,

$$H_{P_0}(w_s^{-1}) = T_0 - s^{-1}T_0. \tag{4.19}$$

On définit alors les distributions suivantes

$$J_{\mathfrak{o}} = J_{\mathfrak{o}}^{T_0} \text{ et } J = J^{T_0}.$$

De même, pour un sous-groupe de Levi M,

$$J_{\mathfrak{o}}^M = J_{\mathfrak{o}}^{M,T_0} \text{ et } J^M = J^{M,T_0}.$$

L'intérêt du choix T_0 provient de la proposition suivante (cf. pour les groupes la fin du Sect. 2 de [Art81]).

Proposition 4.6. *Les distributions J, $J_{\mathfrak{o}}$, J^M et $J_{\mathfrak{o}}^M$ ne dépendent pas du choix du sous-groupe parabolique minimal P_0. Elles ne dépendent que du choix de M_0 et de K.*

Preuve. Il suffit de prouver le résultat pour $J_{\mathfrak{o}}$. Soit $P_0' \in \mathcal{P}(M_0)$ un autre sous-groupe parabolique minimal de G. Il existe un unique $s \in \Omega$ tel que $P_0' = w_s^{-1}P_0 w_s$. Si P est un sous-groupe parabolique qui contient P_0, $P' = w_s^{-1}Pw_s$ est un sous-groupe parabolique qui contient P_0'. Pour $x \in G(\mathbb{A})^1$, on a, d'après [Art81] p.18,

$$\hat{\tau}_P(H_P(x) - T) = \hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(w_s^{-1}x) - H_0(w_s^{-1}) - s^{-1}T).$$

On en déduit que $k_{\mathfrak{o}}^T(x, f)$ égale

$$\sum_{\{P:\ P_0 \subset P\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \sum_{\delta \in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} \hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(w_s^{-1}\delta x) - H_0(w_s^{-1}) - s^{-1}T).K_{P,\mathfrak{o}}(\delta x)$$

$$=\sum_{\{P':\ P'_0\subset P'\}}(-1)^{\dim(A'_P/A_G)}\sum_{\delta\in P'(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})}\hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(\delta x)-H_0(w_s^{-1})-s^{-1}T).K_{P,\mathfrak{o}}(w_s\delta x).$$

Puis,

$$\begin{aligned}K_{P,\mathfrak{o}}(w_s\delta x) &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(\delta x)^{-1}\,\mathrm{Ad}(w_s)^{-1}(X+U))dU\\ &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_{P'}(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}}\int_{\mathfrak{n}_{P'}(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(\delta x)^{-1}(X+U))dU\\ &= K_{P',\mathfrak{o}}(\delta x).\end{aligned}$$

Ainsi si l'on remplace P_0 et T par P'_0 et $H_0(w_s^{-1})+s^{-1}T$ dans la définition de $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, le résultat reste inchangé. Comme T_0 vérifie l'égalité (4.19), on en déduit que $J_{\mathfrak{o}}=J_{\mathfrak{o}}^{T_0}$ ne dépend pas du choix de P_0. $\square$

5. Intégrales orbitales pondérées

5.1. Orbites semi-simples régulières

Soit $X\in\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ semi-simple. Rappelons que son centralisateur $G(X)$ dans G est connexe. On dit que X est régulier si $G(X)$ est un tore (nécessairement maximal). Supposons que $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}$ contienne un élément semi-simple régulier X. Alors tous les éléments de $\mathfrak{o}$ sont semi-simples réguliers et $\mathfrak{o}$ est la classe de conjugaison de X. De telles classes $\mathfrak{o}$ sont appelées orbites semi-simples régulières, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ leur ensemble. Dans la suite, on essaie d'exprimer, pour une orbite $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$, les distributions $J_{\mathfrak{o}}$ à l'aide d'intégrales orbitales.

Soit $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ et P un sous-groupe parabolique de G. On définit

$$I_{P,\mathfrak{o}}(x)=\sum_{X\in\mathfrak{m}_P(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}}\ \sum_{\eta\in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(\eta^{-1})X)$$

et

$$j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)=\sum_{\{P:\ P_0\subset P\}}(-1)^{\dim(A_P/A_G)}\sum_{\delta\in P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})}\hat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T).I_{P,\mathfrak{o}}(\delta x).$$

Théorème 5.1. *Pour $\mathfrak{o}\in\mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$ et $T\in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$,*

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1}|j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)|dx<\infty.$$

Preuve. On dispose de l'analogue du lemme 2.8 pour les fonctions $j_{\mathfrak{o}}^T(f,.)$ et $I_{P,\mathfrak{o}}$. En utilisant également le corollaire 2.7, on montre que

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} |j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)|dx \tag{5.1}$$

se majore par la somme sur les sous-groupes paraboliques de G, P_1, R et P_2 tels que $P_1 \subset R \subset P_2$, de l'intégrale sur $x \in P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ de

$$F^1(x,T)\sigma_1^2(H_0(x)-T)$$

multiplié par la somme sur $X \in \tilde{\mathfrak{m}}_1^R(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}$ de

$$\left| \sum_{\{P;\ R\subset P\subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \left(\sum_{V\in\mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \sum_{\eta\in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(\eta^{-1})(X+V)) \right) \right|.$$

Comme X est semi-simple régulier, on a, pour tout sous-groupe unipotent N, $N(X)=\{1\}$ et $\mathfrak{n}(X)=\{0\}$. En utilisant cette remarque et en appliquant le corollaire 2.4 à la somme sur $N_P(\mathbb{Q})$, on montre que

$$\begin{aligned}
&\sum_{V\in\mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \sum_{\eta\in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(\eta^{-1})(X+V))\\
&= \sum_{V\in\mathfrak{n}_R^P(\mathbb{Q})} \sum_{U\in\mathfrak{n}_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+U+V))\\
&= \sum_{V\in\mathfrak{n}_R(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+V)).
\end{aligned}$$

Cette dernière expression ne dépend plus de P. En utilisant le lemme 2.2, on majore (5.1) par la somme sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$ de

$$\int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} F^1(x,T)\sigma_1^2(H_0(x)-T). \sum_{X\in\tilde{\mathfrak{m}}_1^2(\mathbb{Q})\cap\mathfrak{o}} \sum_{V\in\mathfrak{n}_2(\mathbb{Q})} |f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+V))|dx.$$

En utilisant les mêmes arguments que ceux qui ont servi dans la démonstration du théorème 3.1, on voit que cette dernière intégrale est convergente. □

Proposition 5.2. *Pour* $T \in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$,

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f) = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)dx.$$

Preuve. L'intégrale $\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} j_{\mathfrak{o}}^T(x, f)dx$ est égale à la somme sur les sous-groupes paraboliques $P_1 \subset P_2$ de l'intégrale sur $P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ du produit de $F^1(x, T)\sigma_1^2(H_0(x) - T)$ par

$$\sum_{\{P: P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} \left(\sum_{X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1}) \, \mathrm{Ad}(\eta^{-1})X) \right). \tag{5.2}$$

On décompose l'intégrale sur $P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ en une intégrale double sur $x \in M_1(\mathbb{Q})\, N_1(\mathbb{A}) \setminus G(\mathbb{A})^1$ et $n_1 \in N_1(\mathbb{Q}) \setminus N_1(\mathbb{A})$. On fait passer l'intégrale sur $N_1(\mathbb{Q}) \setminus N_1(\mathbb{A})$ à l'intérieur de la somme sur P et sur X. Ceci est licite car l'intégrale sur $N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})$ porte sur un volume fini et

$$\sum_{X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}} \sum_{\eta \in N_P(\mathbb{Q})} |f(\mathrm{Ad}(x^{-1} n_1^{-1} \eta^{-1})X)|$$

est borné sur cet ensemble.
On considère donc

$$\int_{N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})} \sum_{\eta \in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1} n_1^{-1} \eta^{-1})X) dn_1.$$

Comme $N_P(\mathbb{Q})\backslash N_P(\mathbb{A})$ est de volume 1, cette dernière expression est égale à

$$\begin{aligned} &\int_{N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})} \int_{N_P(\mathbb{Q})\backslash N_P(\mathbb{A})} \sum_{\eta \in N_P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1} n_1^{-1} n^{-1} \eta^{-1})X) dn_1 dn \\ &= \int_{N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})} \int_{N_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1} n_1^{-1} n^{-1})X) dn_1 dn \\ &= \int_{N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1}) \, \mathrm{Ad}(n_1^{-1})(X + U)) dn_1 dU. \end{aligned}$$

On a appliqué le corollaire 2.5 à l'intégrale sur $N_P(\mathbb{A})$. On intervertit de nouveau la somme qui porte sur P et sur X avec l'intégrale sur $N_1(\mathbb{Q})\backslash N_1(\mathbb{A})$. Si l'on recombine cette dernière avec l'intégrale sur $M_1(\mathbb{Q})N_1(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})^1$, on trouve précisément

$$\int_{P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} F^1(x, T)\sigma_1^2(H_0(x) - T). \left(\sum_{\{P:\ P_1 \subset P \subset P_2\}} (-1)^{\dim(A_P/A_G)} K_{P,\mathfrak{o}}(x) \right) dx.$$

D'après le théorème 3.1, cette intégrale est absolument convergente : le passage d'une double intégrale à une intégrale sur $P_1(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ est donc justifiée *a posteriori*.

A l'aide du lemme 2.8, on aboutit alors à l'égalité suivante

$$\int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)dx = \int_{G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1} k_{\mathfrak{o}}^T(x,f)dx,$$

ce qui donne le résultat.

□

5.2. *Intégrales orbitales pondérées*

Soit $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}_{\mathrm{reg}}$. Fixons un élément $X_1 \in \mathfrak{o}$ et un sous-groupe parabolique P_1 de G tel que $X_1 \in \mathfrak{m}_1(\mathbb{Q})$ mais qu'aucun conjugué de X_1 par $M_1(\mathbb{Q})$ n'appartienne à $\mathfrak{r}$ pour un sous-groupe parabolique $R \subsetneq P_1$. On dit alors que X_1 est un élément elliptique de $\mathfrak{m}_1(\mathbb{Q})$. Pour tout sous-groupe parabolique P de G et tout $X \in \mathfrak{m}_P(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{o}$, il existe un sous-groupe parabolique $P_2 \subset P$ et $X_2 \in \mathfrak{m}_2(\mathbb{Q})$, qui est $M_P(\mathbb{Q})$-conjugué à X et tel que le plus grand tore déployé central de $G(X_2)$ soit A_2. Tout élément de $G(\mathbb{Q})$ qui conjugue X_1 et X_2 conjugue A_1 et A_2. Il s'ensuit qu'il existe $s \in \Omega(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ et $\eta \in M_P(\mathbb{Q})$ tels que

$$X = \mathrm{Ad}(\eta)\,\mathrm{Ad}(w_s)X_1. \tag{5.3}$$

Soit $P_3 \subset P$ un sous-groupe parabolique, $s' \in \Omega(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_3)$ et $\eta' \in M(\mathbb{Q})$ tel que

$$X = \mathrm{Ad}(\eta')\,\mathrm{Ad}(w_{s'})X_1.$$

Alors il existe $\zeta \in G(\mathbb{Q}, X)$ tel que

$$\eta' w_{s'} = \zeta\eta w_s.$$

Comme $G(X) \subset M$, on voit que $w_{s'} = \xi w_s$ pour un élément $\xi \in M(\mathbb{Q})$. Soit $\Omega(\mathfrak{a}_1; P)$ l'ensemble des $s \in \cup_{\mathfrak{a}_2}\Omega(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)$ tel que $\mathfrak{a}_P \subset s\mathfrak{a}_1$ et $s^{-1}\alpha$ est positive pour tout $\alpha \in \Delta_2^P$. Pour X et P donnés, il existe un unique $s \in \Omega(\mathfrak{a}_1; P)$ tel qu'un élément η de $M_P(\mathbb{Q})$ vérifie (5.3).
On en déduit les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_{P,\mathfrak{o}}(x) &= \sum_{s\in\Omega(\mathfrak{a}_1;P)} \sum_{\eta\in M(\mathbb{Q},\mathrm{Ad}\,w_sX_1)\backslash M(\mathbb{Q})} \sum_{\delta\in N(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1}\delta^{-1}\eta^{-1}w_s)X_1) \\ &= \sum_{s\in\Omega(\mathfrak{a}_1;P)} \sum_{\delta\in M(\mathbb{Q},\mathrm{Ad}\,w_sX_1)\backslash P(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1}\delta^{-1}w_s)X_1). \end{aligned}$$

Par conséquent, $j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)$ est égal à

$$\sum_{\{P:P_0\subset P\}}(-1)^{\dim(A_P/A_G)}\sum_{s\in\Omega(\mathfrak{a}_1;P)}\sum\hat{\tau}_P(H_0(\delta x)-T).f(\mathrm{Ad}(x^{-1}\delta^{-1}w_s)X_1);$$

la dernière somme est à prendre sur les $\delta\in M(\mathbb{Q},\mathrm{Ad}\,w_sX_1)\backslash G(\mathbb{Q})$. Or le centralisateur de $\mathrm{Ad}(w_s)X_1$ dans G est contenu dans M. De cette façon,

$$j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)=\sum_{\delta\in G(\mathbb{Q},X_1)\backslash G(\mathbb{Q})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(\delta^{-1})X_1).\chi_T(\delta x).$$

On a posé

$$\chi_T(y)=\sum_{\{P:P_0\subset P\}}(-1)^{\dim(A_P/A_G)}\sum_{s\in\Omega(\mathfrak{a}_1;P)}\hat{\tau}_P(H_0(w_sy)-T).$$

On considère désormais $T\in T_+ + \mathfrak{a}_0^+$. Pour obtenir $J_{\mathfrak{o}}^T(f)$, on intègre sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})^1$ la dernière expression obtenue pour $j_{\mathfrak{o}}^T(x,f)$. Comme l'intégrande est invariante à gauche par A_G^∞, on peut intégrer sur $A_G^\infty G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$. En combinant l'intégrale sur x et la somme sur δ, on trouve que

$$J_{\mathfrak{o}}^T(f)=\mathrm{vol}(A_1^\infty G(\mathbb{Q},X_1)\backslash G(\mathbb{A},X_1)).\int_{G(\mathbb{A},X_1)\backslash G(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})X_1)v(x,T)dx, \tag{5.4}$$

où

$$v(x,T)=\int_{A_G^\infty\backslash A_1^\infty}\chi_T(ax)da.$$

D'après [Art78] p.951, $v(x,T)$ est égal au volume de l'enveloppe convexe de la projection sur $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_G$ de

$$\{s^{-1}T-s^{-1}H_0(w_sx)\ :\ s\in\cup_{P_2}\Omega(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)\}.$$

Ainsi $v(x,T)$ est un polynôme en T. L'égalité (5.4) se prolonge alors à tout $T\in\mathfrak{a}_0$, en particulier à T_0, et donne une expression de $J_{\mathfrak{o}}(f)$ à l'aide d'une intégrale orbitale pondérée. Dans ce cas, le poids $v(x,T_0)$ est le volume de l'enveloppe convexe des points $T_0-H_Q(x)$ pour $Q\in\mathcal{P}(M_1)$. Rappelons pour terminer que, dans la formule des traces pour les groupes, les termes associés à des orbites semi-simples régulières s'expriment également à l'aide d'intégrales orbitales pondérées qui sont les analogues des intégrales (5.4) ; en particulier les poids qui apparaissent sont les mêmes que ceux que nous venons de trouver.

Références

[Art76] J. Arthur, The characters of discrete series as orbital integrals, Invent. Math. **32**: 205–261, 1976

[Art78] J. Arthur, A trace formula for reductive groups I, Duke Math. J. **45**: 911–952, 1978

[Art79] J. Arthur, Eisenstein series and the trace formula. In: Automorphic forms, Representations, and L-functions, vol. 33 of Proc. of Symp. in Pure Math., pp. 253–274. A.M.S., 1979

[Art80] J. Arthur, A trace formula for reductive groups II, Comp. Math. **40**: 87–121, 1980

[Art81] J. Arthur, The trace formula in invariant form, Ann. of Math. **114**: 1–74, 1981

[Bor91] A. Borel, Linear algebraic groups. Springer, 1991

[Wei] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. In: Oeuvres scientifiques III, pp. 1–69. Springer