Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Version de travail – 6 juin 2016

ADDENDUM À UN THÉORÈME DU SUPPORT POUR LA FIBRATION DE HITCHIN

par Pierre-Henri CHAUDOUARD and Gérard LAUMON (*)

Addendum to A support theorem for the Hitchin fibration

Les notations et les références renvoient, sauf mention contraire, à [1].

1. Sur la démonstration du théorème 9.1

Mark Andrea de Cataldo, nous l'en remercions, nous a signalé quelques faiblesses de rédaction dans la démonstration du résultat central (théorème 9.1) : la distinction entre points géométriques et points de Zariski est parfois obscure et l'égalité incorrecte de dimensions (l.12 p.721) doit être remplacée par l'inégalité (1.1) ci-dessous. Pour que les choses soient claires, on reprend dans ce qui suit les arguments.

Soit Λ_n l'ensemble des couples $(\underline{n},\underline{m})$ de suites $\underline{n}=(n_1\geqslant\cdots\geqslant n_s)$ et $\underline{m}=(m_1,\ldots,m_s)$ d'entiers strictement positifs telles que

$$m_{i+1}\geqslant m_i \text{ si } n_{i+1}=n_i,\ \forall i=1,\ldots,s-1,$$

et

$$n=n_1m_1+\cdots+n_sm_s.$$

Pour chaque $\lambda=(\underline{n},\underline{m})$ on a un morphisme fini

$$\iota_\lambda:\mathbb{A}_{n_1}\times_k\cdots\times_k\mathbb{A}_{n_s}\to\mathbb{A}_n$$

Mots-clés : Fibration de Hitchin, faisceaux pervers, théorème de décomposition, cohomologie relative.
Classification math. : 14F20, 14D20, 14D24.
(*) Pierre-Henri Chaudouard a bénéficié du support de l'Institut Universitaire de France et des projets Ferplay ANR-13-BS01-0012 et Vargen ANR-13-BS01-0001-01 de l'ANR.

défini par $P_{\iota_\lambda(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_s)}(u) = P_{\overline{a}_1}^{m_1}(u)\cdots P_{\overline{a}_s}^{m_s}(u)$ pour tous points géométriques $\overline{a}_i$ de $\mathbb{A}_{n_i}$.

Pour chaque point géométrique $\overline{a}$ de $\mathbb{A}_n$, il existe un unique $\lambda = \lambda(\overline{a}) \in \Lambda_n$ tel que $\overline{a}$ puisse s'écrire $\overline{a} = \iota_\lambda(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_s)$ où les $\overline{a}_i$ sont des points géométriques des $\mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$ tels que $P_{\overline{a}_i}(u) \neq P_{\overline{a}_j}(u)$, $\forall i \neq j$. Les $X_{n_i,\overline{a}_i}$ sont les composantes irréductibles de $X_{\overline{a}}$ et, pour chaque i, m_i est la multiplicité de $X_{n_i,\overline{a}_i}$ dans le diviseur de Cartier $X_{\overline{a}}$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda_n$, on définit une partie localement fermée $\mathbb{A}_{n,\lambda}$, incluse dans l'image de ι_λ dans $\mathbb{A}_n$, par la condition $\lambda(\overline{a}) = \lambda$. On obtient alors une stratification, la strate ouverte étant $\mathbb{A}_{n,((n),(1))} = \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ et la strate fermée étant la strate « nilpotente » $\mathbb{A}_{n,((1),(n))}$.

Soit $\lambda \in \Lambda_n$ et a un point de Zariski de $\mathbb{A}_{n,\lambda} \subset \mathbb{A}_n$. Ce dernier est l'image par ι_λ d'un point $\tilde{a}$ de $\mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s}$ dont on note a_i la projection sur $\mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$. On a donc (les barres signifiant les adhérences)

$$\overline{\{\tilde{a}\}} \subset \overline{\{a_1\}} \times_k \cdots \times_k \overline{\{a_s\}}$$

et donc

$$\mathrm{d}_a = \mathrm{d}_{\tilde{a}} \leqslant \mathrm{d}_{a_1} + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}. \tag{1.1}$$

On peut trouver des points géométriques $\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_s$ localisés en $a_1,\dots,a_s$ de sorte que $\overline{a} = \iota_\lambda(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_s)$ soit un point géométrique localisé en a. Écrivons $\lambda = (\underline{n},\underline{m}) \in \Lambda_n$ et posons $n' = n_1 + \cdots + n_s$. On définit le point géométrique $\overline{a}'$ de $\mathbb{A}_{n'}^{\mathrm{grss}}$ par $P_{\overline{a}'}(u) = P_{\overline{a}_1}(u)\cdots P_{\overline{a}_s}(u)$. Ainsi $X_{\overline{a}'}$ n'est autre que la courbe réduite $(X_{\overline{a}})_{\mathrm{red}}$.

On a un homomorphisme de restriction de $X_{\overline{a}}$ à $X_{\overline{a}'}$

$$J_{n,\overline{a}} \to J_{n',\overline{a}'}$$

qui est surjectif, et dont le noyau est affine et est une extension successive de copies du groupe additif. De plus on a un homomorphisme

$$J_{n',\overline{a}'} \to J_{n_1,\overline{a}_1} \times_k \cdots \times_k J_{n_s,\overline{a}_s}$$

qui est lui aussi surjectif à noyau affine. Par définition de $\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}$ et des $\mathrm{d}_{a_i}^{\mathrm{ab}}$, on déduit de ce qui précède l'égalité

$$\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) = \mathrm{d}_{a_1}^{\mathrm{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}^{\mathrm{ab}}(J_{n_s}). \tag{1.2}$$

Supposons, de plus, $a \in \mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell)$. Alors on a, d'une part,

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n)$$

d'après le théorème 7.2 (voir le paragraphe 4.12 de [3] pour l'hypothèse sur la polarisation), et, d'autre part, pour chaque i,

$$\mathrm{d}^{\mathrm{ab}}_{a_i}(J_{n_i}) \geqslant d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i}$$

d'après le théorème 7.3 appliqué à $a_i \in \mathbb{A}^{\mathrm{ell}}_{n_i}$. Combinant ces deux dernières inégalités avec l'égalité (1.2), on obtient

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geqslant \sum_{i=1}^{s} (d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i})$$

En tenant compte de l'égalité

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} = n(2g-2-d)+1$$

et de l'inégalité (1.1), il vient

$$1 - s \geqslant (n - n_1 - \cdots - n_s)(d - 2g + 2)$$

qui n'est possible que si $s = 1$ et $n_1 = n$, c'est-à-dire $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \mathbb{A}^{\mathrm{ell}}_n$ puisque l'on a supposé $d > 2g - 2$.

2. Sur la restriction sur la caractéristique

Un ingrédient crucial dans la démonstration du théorème 9.1 est une inégalité de type Severi (théorème 7.3). Longtemps celle-ci ne fut connue qu'en caractéristique nulle. Or récemment, Melo, Rapagnetta et Viviani ont donné une démonstration de cette inégalité valable en toute caractéristique (cf. [2] théorème 3.3). Il s'ensuit que le théorème principal (théorème 9.1) vaut pour un corps de caractéristique $> n$. Notons alors le corollaire suivant du théorème 9.1 et de la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz.

Corollaire 2.1. — *Soit X une courbe géométriquement connexe, projective et lisse sur un corps fini de caractéristique $> n$. Le nombre de classes d'isomorphie de fibrés de Hitchin sur X, stables de rang n et de degré e premier au rang ne dépend pas de e.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Un théorème du support pour la fibration de Hitchin. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(2) :711–727, 2016.

[2] M. Melo, A. Rapagnetta, and F. Viviani. Fourier-Mukai and autoduality for compactified Jacobians. I. *ArXiv e-prints*, July 2012.

[3] B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (111) :1–169, 2010.

Pierre-Henri CHAUDOUARD
Université Paris-Diderot (Paris 7) et Institut Universitaire de France
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
UMR 7586
Bâtiment Sophie Germain, Case 7012
F-75205 PARIS Cedex 13, France
Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr

Gérard LAUMON
CNRS et Université Paris-Sud
UMR 8628
Mathématique, Bâtiment 425
F-91405 Orsay Cedex , France

gerard.laumon@math.u-psud.fr