COHOMOLOGIE DE LA FIBRATION DE HITCHIN TRONQUÉE

par

Pierre-Henri Chaudouard

Résumé. — Cet article est une introduction à la fibration de Hitchin pour un groupe reductif général et sa variante tronquée. Cette fibration est au cœur des démonstrations du lemme fondamental par Ngô et du lemme fondamental pondéré par Laumon et l'auteur. Nous expliquons le principal résultat cohomologique qui est la clef de notre démonstration. En guise d'illustration, nous esquissons la démonstration d'une relation entre les cohomologies des fibrations de Hitchin pour le groupe $Sp(2n)$ et son groupe dual $SO(2n+1)$.

Abstract. — This paper is an introduction to the (truncated) Hitchin fibration for a general reductive group. This fibration is the central object in the proofs of the fundamental lemma (by Ngô) and the weighted fundamental lemma (by Laumon and the author). We give also some explanations about the main cohomological result that is the key of our proofs. As an illustration of our methods, we sketch the proof of a relation between the cohomologies of Hitchin fibrations attached to the group $Sp(2n)$ and its dual group $SO(2n+1)$.

Table des matières

Mots clefs. — Fibration de Hitchin, programme de Langlands, lemme fondamental de Langlands-Shelstad, lemme fondamental pondéré d'Arthur, cohomologie perverse.

MSC 2000: 14D20, 11F70, 11F72, 11R39, 22E55 .

1. Introduction

1.1. Le lemme fondamental.— Le «lemme fondamental» est une identité combinatoire entre intégrales orbitales sur les corps p-adiques formulée par Langlands-Shelstad. S'il avait pu être démontré «à la main» pour le groupe $GL(n)$ et des groupes reliés ainsi que dans quelques cas de petite dimension, il est resté longtemps comme la pierre d'achoppement dans l'obtention de fonctorialités de Langlands via la formule des traces d'Arthur-Selberg, l'un des outils les plus puissants dans le programme de Langlands. En fait, l'énoncé de Langlands est *mutandis mutatis* équivalent à l'énoncé analogue qu'on peut formuler sur un corps local de caractéristiques égales (cf. [**26**], [**28**], [**11**]). Dans cette situation, Goresky-Kottwitz-MacPherson (cf. [**15**]) ont montré que les intégrales orbitales en question comptent les points rationnels de certaines variétés sur les corps finis (des quotients de fibres de Springer affines). Via la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, ils ont obtenu une interprétation cohomologique du lemme fondamental. Mieux, ils ont ainsi pu en démontrer certains cas particuliers. Ils n'obtiennent pas le cas général car leur méthode bute sur une hypothèse de pureté des fibres de Springer affines (qui n'est pas connue en général) et utilise fortement l'action de certains tores qui n'apparaissent que dans les cas dits non ramifiés. Laumon (cf. [**21**]) a ensuite remarqué que les intégrales orbitales pour le groupe $GL(n)$ sont aussi reliées au comptage de points rationnels de jacobiennes compactifiées de certaines courbes singulières sur les corps finis. Plus généralement, et c'est une observation cruciale due à Ngô (cf. [**22**]), une intégrale orbitale globale (c'est-à-dire adélique) pour un groupe réductif quelconque s'interprète comme un comptage de points rationnels dans une fibre de la fibration de Hitchin «elliptique». Comme ces fibres varient dans des familles, on peut espérer que la cohomologie des fibres les plus singulières se déduise de celle des fibres «génériques» qui ont des propriétés bien plus agréables (pour $GL(n)$ ce sont essentiellement des variétés abéliennes). C'est précisément ce genre d'énoncé que démontre Ngô dans [**23**] via la théorie des faisceaux pervers. Et c'est la clef de sa démonstration du lemme fondamental.

1.2. Le lemme fondamental pondéré. — L'utilisation de la formule des traces pour démontrer certaines fonctorialités de Langlands requiert également un lemme fondamental étendu à d'autres intégrales orbitales «pondérées» : c'est le lemme fondamental pondéré formulé par Arthur. Dans un travail avec Gérard Laumon ([**9**], [**10**] et [**8**]) nous démontrons cet énoncé d'Arthur. Bien que notre approche suive de près celle de Ngô, notre démonstration est plus qu'une simple conséquence de son travail. Pour obtenir le lemme fondamental pondéré, il nous faut considérer en effet des fibres de Hitchin non-elliptiques. Or celles-ci ne sont même pas de type fini. Une de nos innovations consiste à introduire une troncature de ces fibres non-elliptiques en utilisant une notion de stabilité adéquate. On montre que les fibres de Hitchin ainsi tronquées sont alors propres. La première bonne surprise est que le comptage de ces fibres tronquées s'interprète parfaitement en terme d'intégrales orbitales pondérées. La seconde bonne surprise est que la cohomologie des fibres de Hitchin tronquées est déterminée par celle des fibres de Hitchin elliptiques. Ce résultat cohomologique est la clef de notre démonstration du lemme fondamental pondéré.

1.3. Contenu de l'article. — Dans cet article d'exposition, nous décrivons la troncature utilisée sur la fibration de Hitchin et le principal théorème cohomologique que nous obtenons. Dans la section 2, nous commençons par décrire la fibration de Hitchin pour un groupe réductif telle qu'elle apparaît dans l'article [**23**] de Ngô et nous en donnons les principales propriétés. Dans la section 3, nous expliquons notre troncature de la fibration de Hitchin. Dans la section finale 4, nous énonçons notre principal résultat cohomologique. Pour terminer, nous en esquissons une application à la situation de «l'endoscopie non-standard» entre le groupe symplectique $Sp(2n)$ et son groupe dual, le groupe orthogonal $SO(2n+1)$. Nous obtenons un isomorphisme entre certains facteurs directs de la cohomologie perverse de la fibration de Hitchin pour ces deux groupes.

1.4. Remerciements. — Ce texte repose d'une part sur les articles de Ngô ([**22**] et [**23**]) et d'autre part sur un travail que j'ai eu le plaisir de réaliser en collaboration avec Gérard Laumon. Je remercie chaleureusement les organisateurs de m'avoir invité à soumettre un texte aux actes de la conférence d'autant plus qu'une naissance imminente m'a empêché d'y participer. Je remercie enfin les rapporteurs de cet article pour leur relecture.

2. La fibration de Hitchin

2.1. Groupe, tore et groupe de Weyl. — Soit k une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Soit G un groupe algébrique réductif et connexe sur k. Soit

$$n = \mathrm{rang}(G).$$

Soit T un sous-tore maximal de G. Soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie respectives de G et T. Soit

$$W = W^G$$

le groupe de Weyl de (G, T). On suppose dans toute la suite que l'ordre du groupe de Weyl $|W^G|$ est inversible dans k.

2.2. Schéma $\mathfrak{car}$. — Le groupe W agit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Soit

$$\mathfrak{car} = \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W)$$

le spectre de l'algèbre $k[\mathfrak{t}]^W$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{t}$ invariantes par W. On sait bien que cette algèbre est engendrée par n éléments de $k[\mathfrak{t}]^W$ qui sont algébriquement indépendants et homogènes. Ces éléments ne sont pas uniques mais leurs degrés $e_1 \leqslant \ldots \leqslant e_n$ le sont. On a d'ailleurs

$$e_1 + \ldots + e_n = (\dim(G) + \mathrm{rang}(G))/2. \tag{2.2.1}$$

En particulier, le schéma $\mathfrak{car}$ est isomorphe non canoniquement à l'espace affine de dimension n, le rang de G.

L'inclusion de l'algèbre dans l'algèbre $k[\mathfrak{t}]$ de toutes les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{t}$ donne dualement un morphisme

$$\chi = \chi_G^T : \mathfrak{t} \to \mathfrak{car}$$

qui est un revêtement fini et galoisien de groupe W.

Soit D^G le discriminant défini comme le produit des dérivées des racines de T dans G : c'est une fonction régulière sur $\mathfrak{t}$ qui est W-invariante autrement dit $D^G \in k[\mathfrak{t}]^W$. La condition $D^G \neq 0$ définit un ouvert de $\mathfrak{car}$ appelé «l'ouvert régulier» et noté $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$. Au-dessus de cet ouvert, le morphisme χ est de plus étale. Soit

$$\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} = \chi^{-1}(\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}})$$

l'image inverse de l'ouvert $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$; c'est encore l'ouvert de $\mathfrak{t}$ où le discriminant ne s'annule pas.

2.3. Morphisme caractéristique. — Soit $k[\mathfrak{g}]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Le groupe G agit sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe. Soit $k[\mathfrak{g}]^G$ la sous-algèbre des fonctions polynomiales invariantes par G. Le morphisme de restriction

$$k[\mathfrak{g}] \to k[\mathfrak{t}]$$

induit un morphisme

$$k[\mathfrak{g}]^G \to k[\mathfrak{t}]^W$$

qui est en fait un isomorphisme dû à Chevalley. Le *morphisme caractéristique*

$$\chi = \chi_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{car}$$

est obtenu par composition du morphisme canonique

$$\mathfrak{g} \to \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G)$$

dual de l'inclusion $k[\mathfrak{g}]^G \subset k[\mathfrak{g}]$ avec l'isomorphisme de Chevalley

$$\mathrm{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G) \simeq \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W) = \mathfrak{car}\,.$$

L'ouvert de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{sreg}}$$

défini comme l'image inverse par χ de l'ouvert $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$ est l'ouvert formé des éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont semi-simples et réguliers au sens où leur centralisateur dans G est un tore maximal.

2.4. Centralisateur régulier. — Soit

$$I = \{(X, g) \in \mathfrak{g} \times G \mid \mathrm{Ad}(g)X = X\} \to \mathfrak{g}$$

le schéma en groupes des centralisateurs sur $\mathfrak{g}$. Ce schéma n'est pas plat (la dimension de ses fibres varie sur $\mathfrak{g}$ comme on peut déjà le voir pour $GL(n)$). Cependant si on définit l'ouvert régulier $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ de $\mathfrak{g}$ sur lequel les fibres de I sont de dimension minimale (égale au rang de G) et si l'on note I^{reg} la restriction de I à l'ouvert $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$, on obtient un schéma en groupes

$$I^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

qui est lisse et commutatif (c'est même un schéma en tores sur l'ouvert $\mathfrak{g}^{\mathrm{sreg}}$). D'après Ngô ([**23**] lemme 2.1.1), ce schéma en groupes I^{reg} se descend en un schéma en groupes lisse commutatif

$$J \to \mathfrak{car},$$

appelé schéma en groupes des centralisateurs réguliers, qui vérifie les deux propriétés fondamentales suivantes

1. la restriction de $\chi^* J$ à l'ouvert $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ est muni d'un isomorphisme avec I^{reg} ;
2. cet isomorphisme se prolonge en un morphisme

$$\chi^* J \to I \tag{2.4.1}$$

2.5. Courbe C, diviseur D et point ∞. — Dans toute la suite, on fixe de plus les données suivantes
- une courbe C projective, lisse et connexe sur k de genre g ;
- un diviseur D sur C, effectif, pair de degré $> 2g$;
- un point ∞ de $C(k)$ qui n'est pas dans le support de D.

Soit $\mathcal{L}_D$ le $\mathbb{G}_{m,k}$-torseur sur C associé à D, muni de sa trivialisation canonique sur l'ouvert complémentaire du support de D. Pour tout k-schéma V muni d'une action de $\mathbb{G}_{m,k}$, le groupe $\mathbb{G}_{m,k}$ agit diagonalement et librement sur $\mathcal{L}_D \times_k V$; soit

$$V_D = \mathcal{L}_D \times_k^{\mathbb{G}_{m,k}} V$$

le produit contracté c'est-à-dire le quotient de $\mathcal{L}_D \times_k V$ par l'action de $\mathbb{G}_{m,k}$. Dans ce cas, V_D est un schéma sur C qui est une fibration localement triviale de fibre type V. Au-dessus de l'ouvert complémentaire du support de D, le C-schéma V_D est isomorphe à $C \times_k V$.

2.6. La base $\mathcal{A}_G$ de la fibration de Hitchin. — Le groupe $\mathbb{G}_{m,k}$ agit par homothéties sur $\mathfrak{t}$ et cette action commute à celle de W. En particulier, le schéma $\mathfrak{car}$ est muni aussi d'une action de $\mathbb{G}_{m,k}$ pour laquelle le morphisme

$$\chi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{car}$$

est $\mathbb{G}_{m,k}$-équivariant. D'après la construction du paragraphe précédent, on dispose d'un C-schéma $\mathfrak{car}_D$ associé au diviseur D qui, localement, est un espace affine.

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$ le k-schéma qui classifie les couples $a = (h_a, t)$ tels que
– $h_a \in H^0(C, \mathfrak{car}_D)$ est une section de $\mathfrak{car}_D$ au-dessus de C ;
– $t \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ avec $\chi(t) = h_a(\infty)$.

Pour comprendre un peu mieux ce schéma $\mathcal{A}$, considérons d'abord le schéma $\mathbb{A}$ qui classifie les sections h_a. En identifiant le schéma $\mathfrak{car}$ à un espace affine, on voit que la section h_a s'interprète comme une section du fibré localement libre

$$\mathcal{O}(e_1 D) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(e_n D).$$

Par conséquent, le schéma $\mathbb{A}$ s'identifie au k-espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^{n} H^0(C, \mathcal{O}(e_i D))$$

dont la dimension se calcule par la formule de Riemann-Roch et la formule (2.2.1)

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{A}) &= (e_1 + \ldots + e_n) \deg(D) + \mathrm{rang}(G)(1-g) \\ &= (\dim(G) + \mathrm{rang}(G)) \deg(D)/2 + \mathrm{rang}(G)(1-g). \end{aligned}$$

Soit $\mathbb{A}^\infty$ l'ouvert de $\mathbb{A}$ formé des h_a tels que $h_a(\infty) \in \mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$. Le revêtement fini, étale, galoisien de groupe W de $\mathbb{A}^\infty$ obtenu lorsqu'on tire en arrière le revêtement

$$\chi : \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} \to \mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$$

par le morphisme $\mathbb{A}^\infty \to \mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$ d'évaluation au point ∞ n'est autre que le morphisme $\mathcal{A} \to \mathbb{A}$ d'oubli de la donnée supplémentaire t.

2.7. Une variante du morphisme caractéristique. — Le groupe $\mathbb{G}_{m,k}$ agit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par homothéties. On peut donc former le fibré vectoriel $\mathfrak{g}_D$ sur C. Comme l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$ est linéaire, G agit encore sur $\mathfrak{g}_D$ pour une action qu'on note Ad_D. Pour tout G-torseur $\mathcal{E}$ sur C, le groupe G agit diagonalement sur le produit fibré $\mathcal{E} \times_C \mathfrak{g}_D$. Le quotient est noté

$$\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}) \ ;$$

c'est un fibré en algèbres de Lie au-dessus de C.

Comme le morphisme caractéristique

$$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{car}$$

est à la fois G-invariant et $\mathbb{G}_{m,k}$-équivariant, il s'en déduit un C-morphisme, par abus encore noté χ

$$\chi : \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}) \to \mathfrak{car}_D\,. \tag{2.7.1}$$

2.8. L'espace total $\mathcal{M}_G$ de la fibration de Hitchin. — Soit $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G$ le k-champ algébrique qui classifie les triplets de Hitchin $m = (\mathcal{E}, \theta, t)$ formés de

1. $\mathcal{E}$ un G-torseur sur C ;
2. θ est une section du fibré $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$ tel que $\theta_\infty \in \mathfrak{g}^{\mathrm{sreg}}$ c'est-à-dire tel que $\theta_\infty \in \mathfrak{g}$ soit semi-simple régulier ;
3. $t \in \mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ tel que $\chi(t) = \chi(\theta)(\infty)$ dans $\mathfrak{car}$.

2.9. La fibration de Hitchin. — Il s'agit du morphisme

$$f : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

qui envoie un triplet de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta, t) \in \mathcal{M}$ sur le couple $(\chi(\theta), t)$. Puisque θ est une section de $\mathrm{Ad}_D(\mathcal{E})$, on voit que $\chi(\theta)$ est une section de $\mathfrak{car}_D$. De plus la condition 3 du §2.8 assure que $(\chi(\theta), t) \in \mathcal{A}$.

2.10. Commentaires. — Notre définition de la fibration de Hitchin diffère quelque peu des pratiques habituelles (cf. l'article original de Hitchin [**18**]). Détaillons un peu. Notons entre crochets les quotients au sens des champs algébriques. Par exemple, on peut former le quotient champêtre $[\mathfrak{g}_D/G]$, quotient de $\mathfrak{g}_D$ par l'action adjointe Ad_D de G. Se donner une section

$$h_m : C \to [\mathfrak{g}_D/G]$$

revient à se donner un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ formé d'un G-torseur $\mathcal{E}$ sur C et d'une section $\theta \in H^0(C, \mathrm{Ad}_D(\mathcal{E}))$. Soit $\mathbb{M}$ le k-champ algébrique qui classifie les sections h_m.

Le morphisme caractéristique χ de (2.7.1) induit un morphisme de champs

$$[\chi] \ : \ [\mathfrak{g}_D/G] \to \mathfrak{car}_D\,. \tag{2.10.1}$$

On a introduit au §2.6 le schéma affine $\mathbb{A}$ qui classifie les sections

$$h_a : C \to \mathfrak{car}_D\,.$$

On a alors un morphisme de champs

$$\mathbb{M} \to \mathbb{A}$$

qui envoie la section h_m sur la section h_a de $\mathfrak{car}_D$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h_m"] \arrow[dr, "h_a"'] & {[\mathfrak{g}_D/G]} \arrow[d, "{[\chi]}"] \\ & \mathfrak{car}_D \end{tikzcd}\,. \tag{2.10.2}$$

Autrement dit, ce morphisme envoie le couple $(\mathcal{E}, \theta)$ correspondant à h_m sur la section $\chi(\theta)$ de $\mathfrak{car}_D$. C'est la forme usuelle de la fibration de Hitchin, à ceci près : on préfère prendre le fibré $\mathcal{O}(D)$ de grand degré plutôt que le fibré Ω^1_C. Pour certains arguments, on aura besoin de cette liberté sur le degré de D.

En tirant le morphisme $\mathbb{M} \to \mathbb{A}$ par le morphisme $\mathcal{A} \to \mathbb{A}$ du §2.6, on obtient le morphisme de Hitchin

$$f : \mathcal{M} = \mathbb{M} \times_{\mathbb{A}} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

que nous considérons. Par rapport à la situation habituelle, on se restreint donc à un ouvert étale de $\mathbb{M}$.

Pour le lecteur peu féru de théorie des groupes, on peut donner, pour le groupe $G = GL(n)$, une définition alternative mais équivalente, des morphismes $\mathbb{M} \to \mathbb{A}$ et f. Dans ce cas, $\mathbb{M}$ classifie plus concrètement les couples $(\mathcal{V}, \theta)$ où $\mathcal{V}$ est un fibré vectoriel de rang n sur C et $\theta : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}(D)$ est un endomorphisme «avec pôles». On sait définir la trace de θ qui est en fait une section de $\mathcal{O}(D)$. Plus généralement, on sait définir le polynôme caractéristique de θ qui est donnée par

$$X^n - \mathrm{trace}(\theta) X^{n-1} + \mathrm{trace}(\wedge^2(\theta)) X^{n-2} + \ldots + (-1)^n \,\mathrm{trace}(\wedge^n(\theta))$$

où le coefficient $\mathrm{trace}(\wedge^i(\theta))$ est la trace de l'endomorphisme $\wedge^i(\mathcal{E}) \to \wedge^i(\mathcal{E}(D))$ donné par la puissance extérieure i-ième de θ. C'est donc un élément de $H^0(C, \mathcal{O}(iD))$. On peut effectivement identifier $\mathfrak{car}_D$ à l'espace total du fibré $\mathcal{O}(D) \oplus \ldots \mathcal{O}(nD)$ vu que, pour $G = GL(n)$, l'algèbre $k[\mathfrak{g}]^G$ est l'algèbre de polynômes en les coefficients du polynôme caractéristique. L'espace affine $\mathbb{A}$ s'identifie donc ici au k-espace des polynômes caractéristiques

$$X^n - a_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$$

où $a_i \in H^0(C, \mathcal{O}(iD))$.

Le morphisme $\mathbb{M} \to \mathbb{A}$ associe au couple $(\mathcal{E}, \theta)$ le polynôme caractéristique de θ. Le morphisme $\mathcal{A} \to \mathbb{A}$ est obtenu par composition de l'immersion ouverte $\mathbb{A}^\infty$ avec le revêtement étale $\mathcal{A} \to \mathbb{A}^\infty$. Ici $\mathbb{A}^\infty$ s'interprète comme l'ouvert des polynômes caractéristiques qui ont n racines distinctes au point ∞ et le revêtement $\mathcal{A} \to \mathbb{A}^\infty$ consiste à se donner pour chaque polynôme la collection *ordonnée* de ses n racines distinctes au point ∞ : c'est donc bien un revêtement galoisien de groupe le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ qui n'est autre que le groupe de Weyl de $GL(n)$. Un point de $\mathcal{M}$ s'interprète alors comme la donnée d'un triplet $(\mathcal{V}, \theta, t)$ formé d'un couple $(\mathcal{V}, \theta)$ comme ci-dessus tel que la section θ ait n valeurs propres distinctes au point ∞ et t est la collection ordonnée de ces n valeurs propres.

2.11. Lissité sur k du champ $\mathcal{M}$. — Pour un triplet $(\mathcal{E}, \theta, t)$, on a imposé à la section θ d'être semi-simple régulière au point ∞. En particulier, θ est génériquement un élément semi-simple régulier pour tout triplet $(\mathcal{E}, \theta, t)$ de $\mathcal{M}$

de sorte qu'on évite les ennuis liés au cône nilpotent. Par exemple, on a la proposition suivante, due à Biswas et Ramanan.

Proposition 2.11.1. — *(Biswas-Ramanan, cf.* **[5]** *et aussi* **[23]** *théorème 4.14.1) Le champ algébrique $\mathcal{M}$ est lisse sur k.*

2.12. Dimension des fibres de Hitchin. — Rappelons qu'on a introduit au §2.4 le schéma en groupes des centralisateurs $I \to \mathfrak{g}$. Celui-ci est naturellement muni d'une action de $\mathbb{G}_{m,k}$ si bien qu'on a aussi avec les constructions du §2.5 un schéma en groupes

$$I_D \to \mathfrak{g}_D.$$

Comme ce morphisme est G-équivariant, il admet une version champêtre lorsqu'on quotiente par G :

$$[I_D/G] \to [\mathfrak{g}_D/G].$$

Soit $m \in \mathcal{M}$. On peut voir m comme un couple (h_m, t) où $h_m : C \to [\mathfrak{g}_D/G]$ est une section. On peut tirer en arrière le schéma en groupes $[I_D/G]$ par la section h_m et le schéma en groupes obtenu $h_m^*[I_D/G]$ est tautologiquement le schéma en groupes $\mathrm{Aut}(m)$ des automorphismes de m. Autrement dit si l'on voit m comme un triplet $(\mathcal{E}, \theta, t)$, le schéma en groupes $h_m^*[I_D/G]$ est le sous-schéma de

$$\mathrm{Aut}_G(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \times^{G,\mathrm{Int}} G$$

(où G agit sur lui-même par automorphismes intérieurs) qui centralise la section θ.

Nous allons tirer maintenant parti du schéma en groupes $J \to \mathfrak{car}$ construit au §2.4. Il admet tout d'abord une variante $J_D \to \mathfrak{car}_D$. Soit $a = (h_a, t) \in \mathcal{A}$. En tirant J_D par la section $h_a : C \to \mathfrak{car}_D$, on obtient un schéma en groupes lisse et commutaitf

$$J_a = h_a^* J_D \to C.$$

Le point intéressant est pour tout $m \in f^{-1}(a)$ le schéma J_a est muni d'un morphisme

$$J_a \to \mathrm{Aut}(m). \tag{2.12.1}$$

En effet, on a vu au §2.4 qu'on a un morphisme $\chi^* J \to I$; celui admet une variante $\chi^* J_D \to I_D$ et plus généralement une version champêtre

$$[\chi]^* J_D \to [I_D/G]$$

où $[\chi]$ est le morphisme de (2.10.1). On a donc aussi un morphisme

$$h_m^*[\chi]^* J_D \to h_m^*[I_D/G] = \mathrm{Aut}(m).$$

Or si l'on consulte le diagramme (2.10.2), on voit qu'on a

$$h_m^*[\chi]^* J_D = h_a^* J_D = J_a$$

d'où le morphisme (2.12.1). Via le morphisme (2.12.1), pour tout J_a-torseur j et tout $m \in f^{-1}(a)$, on peut former le produit contracté

$$j \cdot m := j \times^{J_a} m. \tag{2.12.2}$$

Comme le schéma en groupes J_a est commutatif, le produit contracté de deux J_a-torseurs est encore un J_a-torseur. Soit $\mathcal{J}_a$ le champ de Picard (pour le produit contracté) des J_a-torseurs. Le produit contracté (2.12.2) définit alors une action du champ de Picard $\mathcal{J}_a$ sur la fibre $\mathcal{M}_a = f^{-1}(a)$. Un argument de calcul d'algèbre de Lie montre que ce champ est lisse de dimension (cf. corollaire 4.13.3 de [**23**])

$$\dim(\mathcal{J}_a) = (\dim(G) - \mathrm{rang}(G)) \deg(D)/2 + \mathrm{rang}(G)(g-1). \tag{2.12.3}$$

Soit $a \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{M}_a = f^{-1}(a)$. Soit $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ l'ouvert de $\mathcal{M}_a$ formé des $m = (h_m, t)$ dont la section h_m se factorise par l'ouvert régulier $[\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$. Cet ouvert est un torseur sous l'action de J_a et on a même $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}} = \mathcal{M}_a$ pour a dans un ouvert de $\mathcal{A}$ (le lecteur pourra trouver un argument dans la preuve de la proposition 4.3 de [**22**]). La proposition suivante fait la synthèse de plusieurs résultats de Ngô.

Proposition 2.12.1. *—(Ngô)*

1. *L'ouvert $\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$ est dense dans $\mathcal{M}_a$ (cf. proposition 4.16.1 de* [**23**]*).*
2. *La fibre $\mathcal{M}_a$ est équidimensionnelle de dimension (cf. corollaire 4.16.3 de* [**23**]*)*
$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M}_a) &= \dim(\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}})\\ &= \dim(\mathcal{J}_a)\\ &= (\dim(G) - \mathrm{rang}(G)) \deg(D)/2 + \mathrm{rang}(G)(g-1).\end{aligned}$$
3. *Le morphisme de Hitchin f est plat à fibres réduites (cf. corollaire 4.16.4 de* [**23**]*).*
4. *Les fibres de Hitchin ne sont pas nécessairement irréductibles mais l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{M}_a$ est un torseur sous le groupe des composantes irréductibles de $\mathcal{J}_a$. (cf. corollaire 4.16.3 de* [**23**]*).*

On a aussi la formule suivante

$$\dim(\mathcal{M}) = \dim(G)\deg(D).$$

Remarquons que lorsque $\deg(D) = 2g-2$, on a

$$\dim(\mathcal{A}) = \dim(G)(g-1) = \dim(\mathcal{M})/2$$

(cas de la fibration de Hitchin usuelle) mais ici avec notre hypothèse que le degré de D est grand, on a

$$\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{M})/2 = \mathrm{rang}(G)(\deg(D)/2 + 1 - g) > 0.$$

3. La fibration de Hitchin tronquée

3.1. Sous-groupes de Levi de G. — On a fixé un sous-tore maximal T de G. Tout sous-groupe parabolique P de G contenant T possède une unique décomposition de Levi $P = M_P N_P$ où N_P est le radical unipotent de P et M_P est un sous-groupe réductif de P contenant T et isomorphe à P/N_P. On appellera sous-groupe de Levi de G les groupes réductifs M_P ainsi obtenus. Il y en a un nombre fini et on note $\mathcal{L}$ leur ensemble.

3.2. Lieu elliptique. — Pour tout sous-groupe de Levi $M \in \mathcal{L}$, on dispose du groupe de Weyl W^M relatif à M, d'un k-schéma $\mathfrak{car}_M$, d'un C-schéma $\mathfrak{car}_{M,D}$ et plus généralement d'un k-schéma $\mathcal{A}_M$. Ce dernier n'est pas tout-à-fait l'analogue pour M de l'espace $\mathcal{A}_G$. On demande en effet que la donnée additionnelle t soit dans l'ouvert plus petit $\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}}$ défini par $D^G \neq 0$ (et non $D^M \neq 0$). L'avantage est qu'on peut alors définir via le morphisme évident $\mathfrak{car}_{M,D} \to \mathfrak{car}_{G,D}$ un morphisme

$$\mathcal{A}_M \hookrightarrow \mathcal{A} \tag{3.2.1}$$

qu'on vérifie être une immersion fermée (cf. **[10]** proposition 3.5.1).

L'ouvert elliptique $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$ de $\mathcal{A}$ est par définition l'ouvert complémentaire de la réunion des $\mathcal{A}_M$ pour $M \in \mathcal{L}$, $M \neq G$. Pour chaque espace $\mathcal{A}_M$, on dispose de même d'un ouvert elliptique $\mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ dans $\mathcal{A}_M$ ce qui définit une partie localement fermée dans $\mathcal{A}$. Aucune des strates $\mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ n'est vide pour des raisons de dimension. Elles vérifient les relations d'adhérence suivantes : l'adhérence de $\mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ dans $\mathcal{A}$ contient $\mathcal{A}_L^{\mathrm{ell}}$ si et seulement si $L \subset M$. En particulier $\mathcal{A}_T^{\mathrm{ell}} = \mathcal{A}_T$ est la seule strate fermée. On a, en outre, la proposition suivante.

Proposition 3.2.1. *—(cf.* **[10]** *proposition 3.6.2) Le schéma $\mathcal{A}$ est la réunion disjointe des sous-schémas localement fermés $\mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ pour $M \in \mathcal{L}(T)$*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{M \in \mathcal{L}} \mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}.$$

En particulier, pour un point $a = (h_a, t) \in \mathcal{A}$, il existe un unique sous-groupe de Levi $M \in \mathcal{L}$ tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites

1. la section $h_a : C \to \mathfrak{car}_{G,D}$ se factorise par une section $h'_a : C \to \mathfrak{car}_{M,D}$ telle que $(h'_a, t) \in \mathcal{A}_M$;
2. le groupe M est minimal pour la propriété 1.

On notera aussi que la section h'_a dans 1 si elle existe est unique.

Pour $GL(n)$ les éléments de $\mathcal{L}$ sont en bijection avec les partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Dans cette bijection, le groupe G correspond à la partition triviale et le tore T à l'unique partition formée de singletons. Donc un point de $\mathcal{A}$ s'interprète comme la donnée d'un couple (P,t) formé d'un polynôme caractéristique

$$P = X^n - a_1 X^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$$

où $a_i \in H^0(C, \mathcal{O}(iD))$ et d'un n-uplet $t = (t_1, \ldots, t_n)$ de k^n tels que

- $t_i \neq t_j$ pour $i \neq j$;
- au point ∞ on a

$$P_\infty = \prod_{i=1}^{n} (X - t_i).$$

Le couple (P,t) appartient à l'ouvert elliptique si et seulement si P est irréductible. Même si P n'est pas irréductible, il possède une unique factorisation en polynômes irréductibles et unitaires

$$P = \prod_{Q|P, Q \text{ irred.}} Q.$$

Notons que cette décomposition est sans facteur carré puisque P_∞ est sans facteur carré. Alors $(P,t) \in \mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ où $M \in \mathcal{L}$ correspond à la partition

$$\{1, \ldots, n\} = \coprod_{Q|P, Q \text{ irred.}} I_Q$$

où la partie I_Q est définie par la condition

$$Q_\infty = \prod_{i \in I_Q} (X - t_i).$$

3.3. Propreté au-dessus de l'ouvert elliptique de la fibration de Hitchin. — Soit $\mathcal{M}^{\mathrm{ell}} = \mathcal{M} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$ l'ouvert elliptique de $\mathcal{M}$. Soit $f^{\mathrm{ell}} : \mathcal{M}^{\mathrm{ell}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$ le morphisme déduit de f par le changement de base $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}} \to \mathcal{A}$.

Théorème 3.3.1. — *(Langton* **[20]***, Nitsure* **[25]***, Faltings* **[14]***) Supposons que le groupe G soit semi-simple. Le champ $\mathcal{M}^{\mathrm{ell}}$ est alors un champ de Deligne-Mumford et le morphisme f^{ell} est propre.*

On fera un commentaire sur la restriction aux groupes semi-simples au §3.8. Hors de l'ouvert elliptique, le morphisme f n'est pas propre et ce défaut de propreté a plusieurs origines : d'une part le champ $\mathcal{M}$ n'est plus de type fini au-dessus de $\mathcal{A}$ et d'autre part il n'est même plus séparé. Or la propreté du morphisme de Hitchin sur l'ouvert elliptique est cruciale dans l'approche de Ngô. Dans la suite, on va définir des ouverts de stabilité de $\mathcal{M}$ qui sont séparés, propres au-dessus de $\mathcal{A}$ et qui contiennent l'ouvert elliptique.

3.4. Réduction à un sous-groupe parabolique d'un fibré de Hitchin. — Soit $a = (h_a, t) \in \mathcal{A}$. On a vu qu'un point $m \in f^{-1}(a)$ peut s'interpréter comme un couple $m = (h_m, t)$ où la section h_m s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h_m"] \arrow[dr, "h_a"'] & {[\mathfrak{g}_D/G]} \arrow[d, "{[\chi]}"] \\ & \mathfrak{car}_D \end{tikzcd}$$

Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $a \in \mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ (cf. proposition 3.2.1). Dans ce cas, la section h_a se factorise par une unique section h'_a de $\mathfrak{car}_{M,D}$. Soit P un sous-groupe parabolique de G qui admet M comme facteur de Levi. Il n'y a qu'un nombre fini de tels sous-groupes ; par exemple si M est le tore maximal T, il y en a exactement l'ordre du groupe de Weyl W. Soit

$$\mathcal{P}(M)$$

leur ensemble.

Les constructions du §2.10 pour le groupe réductif G s'adaptent au groupe parabolique P et à son algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. On peut former le champ en algèbres de Lie $\mathfrak{p}_D$ qui est muni de l'action adjointe de P ; on peut aussi considérer le quotient champêtre $[\mathfrak{p}_D/P]$. Le quotient catégorique est le schéma $\mathfrak{car}_{P,D}$ où $\mathfrak{car}_P$ est le spectre $k[\mathfrak{p}]^P$ de l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{p}$ qui sont invariantes sous l'action adjointe de P. On a un morphisme caractéristique

$$[\chi_P] : [\mathfrak{p}_D/P] \to \mathfrak{car}_{P,D} \,.$$

En fait, on voit facilement que la flèche de restriction $k[\mathfrak{p}] \to k[\mathfrak{m}]$ induit un isomorphisme $k[\mathfrak{p}]^P \to k[\mathfrak{m}]^M$ de sorte qu'on a $\mathfrak{car}_{P,D} = \mathfrak{car}_{M,D}$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. — *Soit m comme ci-dessus. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$, il existe une et une seule section*

$$h_{P,m} : C \to [\mathfrak{p}_D/P]$$

qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h_{P,m}"] \arrow[rr, bend left, "h_m"] \arrow[dr, "h'_a"'] \arrow[drr, bend right, "h_a"'] & {[\mathfrak{p}_D/P]} \arrow[r] \arrow[d, "{[\chi_P]}"] & {[\mathfrak{g}_D/G]} \arrow[d, "{[\chi]}"] \\ & \mathfrak{car}_{M,D} \arrow[r] & \mathfrak{car}_{G,D} \end{tikzcd} \qquad (3.4.1)$$

Ici la flèche $[\mathfrak{p}_D/P] \to [\mathfrak{g}_D/G]$ est la flèche évidente qui consiste essentiellement à pousser un P-torseur par le morphisme inclusion $P \to G$. Dans la suite, on dira que $h_{P,m}$ est *la réduction* de m à P.

Précisons un peu le sens de cette proposition pour le groupe $G = GL(n)$. Soit $m = (h_m, t) \in \mathcal{M}$. On voit t comme un élément de k^n et la donnée de la section h_m équivaut à celle d'un couple $(\mathcal{V}, \theta)$ comme au §2.10. Soit χ le polynôme caractéristique de θ. On a expliqué au §3.2 que la factorisation de χ en produits de polynômes irréductibles et la donnée $t \in k^n$ déterminent une partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ autrement dit un sous-groupe de Lévi M de $GL(n)$. La donnée supplémentaire d'un sous-groupe parabolique P de Levi M revient à ordonner cette partition ou encore à numéroter les facteurs irréductibles de χ. On peut donc écrire la factorisation de χ en irréductibles de la manière suivante

$$\chi = \prod_{i=1}^{r} \chi_i$$

de sorte que les racines de χ_i au point ∞ soient les t_j lorsque j décrit le i-ème ensemble de la partition ordonnée de $\{1, \ldots, n\}$.

Une réduction de m à P s'interprète alors comme la donnée d'un drapeau partiel

$$(0) \subsetneq \mathcal{V}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{V}_r = \mathcal{V}$$

de sous-fibrés vectoriels de $\mathcal{V}$ qui vérifient les conditions suivantes :

1. chaque $\mathcal{V}_i$ est invariant par θ au sens où $\theta(\mathcal{V}_i) \subset \mathcal{V}_i \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}(D)$;
2. pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, le polynôme χ_i est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme tordu

$$\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1} \to (\mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}(D)$$

induit par θ.

Un tel drapeau existe et est unique puisqu'au point générique de C, il est donné par le drapeau

$$(0) \subsetneq \mathrm{Ker}(\chi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(\chi_1\chi_2) \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Ker}(\chi).$$

3.5. Convexe associé à un triplet de Hitchin. — Soit $m = (h_m, t) \in \mathcal{M}$. Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $f(m) \in \mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$. Soit $P \in \mathcal{P}(M)$. D'après la proposition 3.4.1, il existe une unique réduction de m à P : c'est une section

$$h_{P,m} : C \to [\mathfrak{p}_D/P].$$

Soit $X^*(P) = X^*(M)$ le groupe des caractères rationnels de P qui est aussi celui de M. On définit alors

$$\deg(h_{P,m})$$

comme un élément de
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{Z})$$
ainsi : pour tout $\lambda \in X^*(P) = X^*(M)$, l'entier $\lambda(\deg(h_P))$ est le degré du fibré en droites $\lambda(\mathcal{E}_P)$ que l'on obtient en poussant $\mathcal{E}_P$ par la représentation $\lambda : P \to \mathbb{G}_{m,k}$.

On peut voir le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{Z})$ comme un réseau dans l'espace vectoriel réel
$$\mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{R}).$$
La flèche, duale de la flèche de restriction $X^*(M) \to X^*(T)$,
$$\mathfrak{a}_T \to \mathfrak{a}_M$$
est surjective de noyau noté $\mathfrak{a}_T^M$. Le sous-espace de $\mathfrak{a}_T$ orthogonal aux racines de T dans M est un supplémentaire de $\mathfrak{a}_T^M$ auquel on identifie $\mathfrak{a}_M$.

Soit
$$\mathcal{C}_m \subset \mathfrak{a}_T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(T), \mathbb{R})$$
l'ensemble convexe que l'on obtient en translatant par les vecteurs du sous-espace $\mathfrak{a}_T^M \oplus \mathfrak{a}_G$ l'enveloppe convexe des points
$$-\deg(h_{P,m}) \in \mathfrak{a}_M$$
pour $P \in \mathcal{P}(M)$.

Lorsque m appartient à l'ouvert elliptique $\mathcal{M}^{\mathrm{ell}}$, on a $M = G$ et l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ est le singleton $\{G\}$. On obtient un seul point $-\deg(h_m) \in \mathfrak{a}_G$ mais comme on translate par le sous-espace $\mathfrak{a}_T^G \oplus \mathfrak{a}_G = \mathfrak{a}_T$, on a $\mathcal{C}_m = \mathfrak{a}_T$.

L'application $m \mapsto \mathcal{C}_m$ est semi-continue inférieurement au sens où pour toute partie $\Xi \subset \mathfrak{a}_T$ la condition $\Xi \subset \mathcal{C}_m$ définit un ouvert de $\mathcal{M}$ (cf. propositions 5.6.1 et 6.1.4 de [**10**]). Cette construction de convexes associés à des réductions est proche de constructions dues à Behrend dans le cadre des schémas en groupes réductifs (cf. [**3**]).

3.6. ξ-semi-stabilité. — On fixe un point ξ dans l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_T$, qu'on verra comme un paramètre de stabilité. On introduit la notion suivante.

Définition 3.6.1. — On dit que m est ξ-*semi-stable* si le convexe $\mathcal{C}_m$ défini ci-dessus contient le point ξ.

Lorsque m appartient à l'ouvert elliptique $\mathcal{M}^{\mathrm{ell}}$, on a dit qu'on a $\mathcal{C}_m = \mathfrak{a}_T$ de sorte que m est ξ-stable quel que soit ξ.

Cette définition possède de nombreuses sources d'inspiration parmi lesquelles les troncatures de Langlands et Arthur dans leurs travaux sur les séries d'Eisenstein et la formule des traces (cf. [**19**] et [**1**]), le travail de Behrend (cf. [**3**]) sur la stabilité et la réduction canonique des schémas en groupes et la stabilité avec poids introduite par Esteves [**13**] dans le cadre des jacobiennes compactifiées. Elle est également proche de la stabilité des fibrés ordinaires ou de Hitchin avec structure parabolique étudiée dans [**6**] et [**17**]. Donnons rapidement, pour $G = GL(n)$, le lien avec le travail d'Estèves : une fibre de Hitchin $f^{-1}(a)$ peut s'interpréter comme le champ des modules sans torsion de rang 1 sur la courbe spectral Y_a associée à a (introduite par Hitchin et Beauville-Narasimhan-Ramanan). Convenablement tronqué par une notion de stabilité, ce champ fournit une compactification du champ des modules inversibles sur la courbe spectrale (essentiellement la jacobienne de la courbe Y_a).

Toujours pour $GL(n)$, on peut donner une définition de la ξ-semi-stabilité par une «inégalité de pentes». Le paramètre ξ est un n-uplet $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Un point de $\mathcal{M}$, à savoir ici un triplet $(\mathcal{V}, \theta, t)$, est ξ-semi-stable si pour tout sous-fibré

$$(0) \subsetneq \mathcal{W} \subsetneq \mathcal{V}$$

qui est invariant par θ on a l'inégalité

$$\mu_\xi(\mathcal{W}) \leqslant \mu_\xi(\mathcal{V}) \tag{3.6.1}$$

où la pente est définie par

$$\mu_\xi(\mathcal{W}) = \frac{\deg(\mathcal{W})}{\mathrm{rang}(\mathcal{W})} + \sum_i \xi_i,$$

la somme étant prise sur les entiers $1 \leqslant i \leqslant n$ tels que t_i est valeur propre de θ restreint à $\mathcal{W}_\infty$ (les t_i sont les composantes de $t \in k^n$ et elles sont deux à deux distinctes par hypothèse).

Pour $\xi = 0$, la ξ-semi-stabilité de $(\mathcal{V}, \theta, t)$ est équivalente à la semi-stabilité usuelle du couple $(\mathcal{V}, \theta)$ sous-jacent ; en particulier, elle ne dépend pas de la donnée supplémentaire t.

3.7. Champ $\mathcal{M}^\xi$ et morphisme f^ξ. — Soit $\mathcal{M}^\xi$ le sous-champ de $\mathcal{M}$ formé des fibrés de Hitchin ξ-semi-stables et

$$f^\xi : \mathcal{M}^\xi \to \mathcal{A}$$

la restriction du morphisme de Hitchin f à $\mathcal{M}^\xi$. Le champ $\mathcal{M}^\xi$ est en fait un sous-champ ouvert de $\mathcal{M}$ (cf. [**10**] proposition 6.1.4) qui contient l'ouvert elliptique $\mathcal{M}^{\mathrm{ell}}$. La lissité de $\mathcal{M}$ sur k (cf. proposition 2.11.1) implique donc la proposition suivante.

Proposition 3.7.1. — *Le champ algébrique $\mathcal{M}^\xi$ est lisse sur le corps de base k.*

3.8. Propreté du morphisme f^ξ. — Voici le principal résultat de [**10**].

Théorème 3.8.1. —*(cf. théorème 6.2.2 de* [**10**]*) Si G est semi-simple et si ξ est* en position générale *, le champ $\mathcal{M}^\xi$ est un champ de Deligne-Mumford et le morphisme f^ξ est propre.*

Comme on le voit, le théorème exclut les groupes qui contiennent un tore central non trivial, comme $GL(n)$. Pour un groupe réductif quelconque, le champ $\mathcal{M}^\xi$ n'est pas, en général, de type fini pour une raison évidente : il possède une infinité de composantes connexes indexées, disons pour $GL(n)$, par les degrés des fibrés vectoriels sous-jacents que la condition de stabilité ne borne pas. Mais on s'est restreint aux groupes semi-simples pour une raison plus profonde : lorsque le groupe G possède un tore central non trivial, celui-ci se retrouve dans les groupes d'automorphismes de tous les objets (y compris les stables et les elliptiques) qui ne sont donc pas propres si bien que les champs $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\xi$ ne sont jamais séparés.

Que signifie ξ en position générale ? On demande que ξ évite certains hyperplans rationnels explicites. Par exemple, pour $GL(n)$, on exige que ξ soit dans le complémentaire des hyperplans définis par la condition

$$\sum_{i\in I}\xi_i \in \mathbb{Z}$$

pour toute partie I non vide et propre de $\{1,\ldots,n\}$. Lorsque ξ est en position générale, il n'y a plus de différence entre la ξ-semi-stabilité et la ξ-stabilité — qui est définie pour $GL(n)$ par les inégalités (3.6.1) prises au sens strict —.

Sans cette condition sur ξ, le champ $\mathcal{M}^\xi$ est de type fini et le morphisme f^ξ vérifie la partie existence du critère valuatif de propreté mais il n'est pas séparé. Inversement si on avait pris la notion usuelle de stabilité (pour $GL(n)$ on prend les inégalités (3.6.1) au sens strict avec $\xi = 0$), on aurait obtenu un champ de type fini, séparé mais pour lequel le morphisme de Hitchin met en défaut la partie existence du critère valuatif de propreté.

4. Cohomologie de la fibration de Hitchin tronquée

4.1. Théorème de décomposition. — On suppose désormais le groupe G semi-simple et le point $\xi \in \mathfrak{a}_T$ en position générale au sens du §3.8. On a donc un morphisme propre de source un champ lisse sur k

$$f^\xi : \mathcal{M}^\xi \to \mathcal{A}.$$

Le théorème de Deligne assure que le complexe de faisceaux ℓ-adiques $Rf^\xi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est pur. On peut donc appliquer le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber (cf. [**4**] théorème 5.3.8) qui nous dit que le faisceau pervers gradué

$${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(Rf^\xi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}{}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i(Rf^\xi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

donné par la somme directe des faisceaux pervers de cohomologie du complexe $Rf^\xi_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est en fait semi-simple.

Le résultat cohomologique clef de notre travail [**8**] tout comme celui de Ngô (cf. [**23**]) est qu'on peut en fait décrire précisément les supports des constituants irréductibles qui apparaissent dans le théorème de décomposition pour $Rf_*^{\xi}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Il y a tout de même une complication technique qui explique le paragraphe suivant et qui va rendre les énoncés un peu plus lourds à formuler.

4.2. L'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$. — Rappelons qu'on a un revêtement fini, galoisien de groupe W, étale au-dessus de l'ouvert $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$, donné par

$$\chi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{car}$$

qui est $\mathbb{G}_{m,k}$-équivariant. Moyennant les constructions du §2.5, on a aussi un morphisme au-dessus de C, par abus toujours noté χ

$$\chi : \mathfrak{t}_D \to \mathfrak{car}_D\,.$$

Soit $a = (h_a, t) \in \mathcal{A}(k)$ un point de la base de la fibration de Hitchin. Lorsqu'on tire en arrière le morphisme χ par la section $h_a : C \to \mathfrak{car}_D$, on obtient un revêtement galoisien de groupe de Galois W

$$\pi : Y \to C$$

qui rend le diagramme ci-dessous cartésien

(4.2.1)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathfrak{t}_D \arrow[d, "\chi"] \\ C \arrow[r, "h_a"'] & \mathfrak{car}_D \end{tikzcd}$$

Comme $h_a(\infty)$ tombe dans l'ouvert régulier $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$, le morphisme π est étale au-dessus d'un voisinage du point ∞. On obtient ainsi une courbe Y qui est *la courbe camérale* introduite par Donagi-Gaitsgory (cf. [**12**]). Cette courbe peut être singulière et on introduit le morphisme de normalisation

$$\rho : X \to Y.$$

Il y a un invariant bien connu qui mesure la différence entre la courbe Y et sa normalisée X et qui est donnée ici par

$$\dim_k(H^0(C, \pi_*(\rho_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y))).$$

Cet invariant est nul si et seulement Y est lisse. Dans notre situation, on aura en fait besoin d'un autre invariant, introduit par Ngô, qui tient compte de l'action de W ; il est donné par

$$\delta_a = \dim_k(H^0(C, (\mathfrak{t} \otimes_k \pi_*(\rho_*\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_Y))^W)).$$

Bien sûr si Y est lisse on a $\delta_a = 0$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant lorsque l'invariant δ_a vaut 0, ce qui arrive sur un ouvert dense de $\mathcal{A}$, la fibre de Hitchin $f^{-1}(a)$ est lisse. Cet invariant δ_a mesure en quelque sorte les singularités de la fibre de Hitchin $f^{-1}(a)$. On obtient alors une fonction $a \mapsto \delta_a$ qui est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{A}$. Pour tout entier δ, soit $\mathcal{A}_\delta$ la partie localement fermée formée des a tels que $\delta_a = \delta$. Introduisons la définition suivante.

Définition 4.2.1. — Soit $\mathcal{A}^{\text{bon}} \subset \mathcal{A}$ le plus grand ouvert de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout point de Zariski $a \in \mathcal{A}^{\text{bon}}$, on ait l'inégalité suivante

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{A}}(a) \geqslant \delta_a.$$

L'ouvert $\mathcal{A}^{\text{bon}}$ est le complémentaire de la réunion sur δ des composantes irréductibles $\mathcal{I}_\delta$ de $\mathcal{A}_\delta$ qui vérifient

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{I}_\delta) < \delta.$$

Par noethérianité de $\mathcal{A}$, il n'y a qu'un nombre fini de δ pour lesquels $\mathcal{A}_\delta$ n'est pas vide.

En caractéristique nulle, Ngô (cf. §2 de [**24**]) a montré l'égalité

$$\mathcal{A}^{\text{bon}} = \mathcal{A}$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\operatorname{codim}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_\delta) \geqslant \delta$$

pour tout δ. Il est raisonnable de conjecturer avec Ngô que cette inégalité est encore vraie en caractéristique positive mais nous ne savons pas le démontrer. Or cette inégalité est cruciale pour certains arguments. Voilà pourquoi on est amené à introduire $\mathcal{A}^{\text{bon}}$. Bien sûr, tel qu'il est défini, $\mathcal{A}^{\text{bon}}$ pourrait être vide. En fait, on peut montrer qu'il est tout de même assez gros. Il contient évidemment l'ouvert où $\delta_a = 0$. Si l'on fixe δ, Ngô montre (cf. proposition 5.7.2 de [**23**]) en utilisant un travail de Goresky-Kottwitz-MacPherson ([**16**]), qu'on peut toujours choisir le degré du diviseur D assez grand devant δ pour que la strate $\mathcal{A}_\delta$ soit dans $\mathcal{A}^{\text{bon}}$. Bien que suffisant pour le lemme fondamental ordinaire, l'argument de Ngô ne dit rien lorsque δ est de l'ordre de $\deg(D)$, ce qui est le cas des δ_a pour a non-elliptique. Or, dans notre travail sur le lemme fondamental pondéré, nous avions justement besoin de trouver des éléments non-elliptiques dans $\mathcal{A}^{\text{bon}}$. Pour cela, on a dégagé un autre ouvert de $\mathcal{A}$ pour lequel les strates à δ constant se calculent par un argument de théorie des déformations. Cela nous a donné une condition suffisante pour qu'un point $a \in \mathcal{A}$ se trouve être dans $\mathcal{A}^{\text{bon}}$ (cf. théorème 9.1.3 de [**8**]). À partir de là, on peut construire suffisamment de points dans $\mathcal{A}^{\text{bon}}$ pour la démonstration du lemme fondamental pondéré.

4.3. Le théorème cohomologique. — Voici le résultat clef de notre travail [**8**].

Théorème 4.3.1. *—([**8**], théorème 10.5.1) On suppose G semi-simple et $\xi \in \mathfrak{a}_T$ en position générale. Soit $K^\bullet$ la restriction de*

$$^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^\bullet(Rf_*^\xi\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(\mathcal{M}^\xi)]) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}{}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i(Rf_*^\xi\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(\mathcal{M}^\xi)])$$

à l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$. Soit

$$j : \mathcal{A}^{\mathrm{ell}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{bon}} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$$

l'inclusion de l'ouvert elliptique dans $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$. On a alors un isomorphisme canonique

$$K^\bullet \cong j_{!*}j^*K^\bullet.$$

En d'autres termes, le faisceau pervers gradué $K^\bullet$ est le prolongement intermédiaire de sa restriction à l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$.

Sur l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$ la cohomologie de la fibre de Hitchin ξ-semi-stable est donc déterminée par la cohomologie de Hitchin elliptique. En particulier elle ne dépend pas de ξ ce qui n'était pas évident *a priori* car les ouverts $\mathcal{M}^\xi$ dépendent eux fortement de ξ. Le théorème affirme que les constituants simples du faisceau pervers gradué $K^\bullet$ ont tous un support qui rencontre l'ouvert elliptique. À partir de là, on peut décrire tous les supports qui apparaissent vu que Ngô les a déterminés sur l'ouvert elliptique (théorème 7.8.3 et 7.8.5 de [**23**]). On montre que $\mathcal{A}$ entier est un support et que les autres supports s'interprètent comme les bases des fibrations de Hitchin pour des groupes explicitement reliés à G, les fameux «groupes endoscopiques» de Langlands.

4.4. Quelques mots sur la démonstration du théorème 4.3.1. — Elle repose en grande partie sur des arguments de Ngô. Fixons un point $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$. Ce point définit un fermé irréductible $\overline{\{a\}}$ de $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$ dont on note d_a la dimension. On suppose que $\overline{\{a\}}$ est un support d'un constituant irréductible de $K^\bullet$. Il s'agit de voir que $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$. Il existe donc un système local gradué $\mathcal{F}_a^\bullet$ sur un ouvert dense V de $\overline{\{a\}}$ tel que $i_{a,*}j_{a,!*}\mathcal{F}_a^\bullet[d_a]$ soit le facteur direct de $K^\bullet$ supporté par $\overline{\{a\}}$ (on note j_a l'immersion ouverte de V dans $\overline{\{a\}}$ et i_a l'immersion fermée de $\overline{\{a\}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$).

La composante neutre $\mathcal{J}_a^0$ du champ de Picard $\mathcal{J}_a$ s'obtient, à l'instar du dévissage d'un schéma en groupes commutatif lisse, comme une extension d'une partie «abélienne» $\mathcal{J}_a^{\mathrm{ab}}$ par une partie affine $\mathcal{J}_a^{\mathrm{aff}}$ (cf. [**23**], proposition 4.8.2). Soit δ_a^{aff} la dimension de la partie affine $\mathcal{J}_a^{\mathrm{aff}}$. La fonction

$$a \mapsto \delta_a^{\mathrm{aff}}$$

est semi-continue supérieurement.

L'action de la composante neutre de $\mathcal{J}_a$ sur $\mathcal{M}_a$ laisse stable l'ouvert $\mathcal{M}_a^\xi$. On en déduit une action de l'homologie de $\mathcal{J}_a^0$ sur la fibre en a de $\mathcal{F}_a^\bullet$. Par un argument de poids (cf. [**23**] §7.4.8), cette action se factorise en une action de l'homologie de $\mathcal{J}_a^{\mathrm{ab}}$ et une propriété fondamentale est que la fibre en a de

$\mathcal{F}_a^\bullet$ est alors un module gradué libre sur cette homologie (proposition 7.4.10 de [**23**], cf. aussi [**8**] proposition 10.3.1 et preuve du théorème 10.5.1).

On définit *l'amplitude* de $\mathcal{F}_a^\bullet$ par

$$\mathrm{Ampl}(\mathcal{F}_a^\bullet) = n_a - n_a^- \geqslant 0$$

où n_a, resp. n_a^-, est le plus grand entier n, resp. le plus petit, tel que $\mathcal{F}_a^n \neq (0)$. En fait, par dualité de Poincaré, on a $n_a^- = -n_a$ et donc $\mathrm{Ampl}(\mathcal{F}_a^\bullet) = 2n_a$. Comme $\mathcal{F}_a^{n_a}$ apparaît dans $R^{\dim(\mathcal{M}_\xi)+n_a-d_a} f_*^\xi \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on a nécessairement

$$\dim(\mathcal{M}_\xi) + n_a - d_a \leqslant 2\dim(f^\xi)$$

soit

$$n_a \leqslant \dim(f^\xi) - \dim(\mathcal{A}) + d_a$$

où l'on note $\dim(f^\xi) = \dim(\mathcal{M}^\xi) - \dim(\mathcal{A})$ la dimension de f^ξ. On a donc une première inégalité pour l'amplitude

$$\mathrm{Ampl}(\mathcal{F}_a^\bullet) = 2n_a \leqslant 2(\dim(f^\xi) - \dim(\mathcal{A}) + d_a).$$

Mais une conséquence immédiate de la liberté de $\mathcal{F}_a^\bullet$ est l'inégalité

$$\mathrm{Ampl}(\mathcal{F}_a^\bullet) \geqslant 2\dim(\mathcal{J}_a^{\mathrm{ab}}) = 2(\dim(\mathcal{J}_a) - \delta_a^{\mathrm{aff}}).$$

On se rappelle (cf. §2.12) qu'on a $\dim(\mathcal{J}_a) = \dim(f) = \dim(f^\xi)$ de sorte qu'en combinant les deux inégalités pour l'amplitude on obtient

(4.4.1) $$\delta_a^{\mathrm{aff}} \geqslant \mathrm{codim}_{\mathcal{A}}(a).$$

Soit $M \in \mathcal{L}$ tel que $a \in \mathcal{A}_M^{\mathrm{ell}}$ (cf. proposition 3.2.1). On montre que l'invariant δ_a^{aff} est relié à l'invariant δ_a par l'inégalité (cf. preuve du théorème 10.5.1 de [**8**])

(4.4.2) $$\delta_a^{\mathrm{aff}} \leqslant \delta_a - \dim(Z_M)$$

où l'on note Z_M le centre de M. On dispose alors de deux inégalités pour $\mathrm{codim}_{\mathcal{A}}(a)$, l'une qui résulte de la conjonction de (4.4.1) et (4.4.2) et l'autre de la définition 4.2.1 de $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$; c'est ainsi qu'on aboutit à l'inégalité

$$\delta_a \leqslant \mathrm{codim}_{\mathcal{A}}(a) \leqslant \delta_a - \dim(Z_M),$$

d'où $\dim(Z_M) = 0$ ce qui n'arrive que si $M = G$ c'est-à-dire si $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$ comme on voulait.

4.5. Le lemme fondamental pondéré «non-standard». — Soit G_1 le sous-groupe de $SL(2n)$ qui stabilise la forme symplectique sur k^{2n} définie par

$$(x, y) \mapsto (x_1 y_{-1} - x_{-1} y_1) + \ldots + (x_n y_{-n} - x_{-n} y_n)$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{-n}, \ldots, x_{-1})$ et $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{-n}, \ldots, y_{-1})$ dans k^n. Soit G_2 le sous-groupe de $SL(2n+1)$ qui stabilise la forme quadratique sur k^{2n+1} définie par

$$x = (x_1, \ldots, x_n, x_0, x_{-n}, \ldots, x_{-1}) \mapsto x_0^2 + 2(x_1 x_{-1} + \ldots + x_n x_{-n}).$$

Le sous-tore T_1 de $SL(2n)$ défini comme l'image de $\mathbb{G}_{m,k}^n$ par le morphisme

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n, t_n^{-1}, \ldots, t_1^{-1}) \tag{4.5.1}$$

est un sous-tore maximal de G_1. De même, le sous-tore T_2 de $SL(2n+1)$ défini comme l'image de $\mathbb{G}_{m,k}^n$ par le morphisme

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n, 1, t_n^{-1}, \ldots, t_1^{-1}) \tag{4.5.2}$$

est un sous-tore maximal de G. On peut identifier les groupes de Weyl W_1 et W_2 respectivement de G_1 et G_2 au produit semi-direct $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Ce dernier groupe agit sur $\mathbb{G}_{m,k}^n$ — le groupe $\mathfrak{S}_n$ opère par permutations des t_i et le i-ème facteur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par $t_i \mapsto t_i^{-1}$ — de sorte que cette action s'identifie à l'action de W_1 sur T_1 (resp. de W_2 sur T_2) via le morphisme (4.5.1), resp. (4.5.2). Affectons les objets relatifs à G_1, resp. G_2, d'un indice 1, resp. 2. Via les morphismes dérivés des morphismes (4.5.1) et (4.5.2), on peut identifier les espaces caractéristiques $\mathfrak{car}_1$ et $\mathfrak{car}_2$. On a donc aussi une identification des bases des fibrations de Hitchin pour G_1 et G_2

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2.$$

On vérifie qu'on a $\mathcal{A}_1^{\mathrm{ell}} = \mathcal{A}_2^{\mathrm{ell}}$. On a aussi $\mathcal{A}_1^{\mathrm{bon}} = \mathcal{A}_2^{\mathrm{bon}}$ puisque ces ouverts sont définis uniquement en terme du tore maximal et du groupe de Weyl. Dans la suite, on utilise ces identifications et on supprime l'indice 1 et 2. Soit ξ en position générale. Sur $\mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$, on se retrouve avec deux faisceaux pervers gradués $K_1^\bullet$ et $K_2^\bullet$ attachés à la cohomologie de la fibration de Hitchin f_i^ξ respectivement de G_1 et G_2 (cf. la notation utilisée dans l'énoncé du théorème 4.3.1). Soit $K_1^{\bullet,\mathrm{ell}}$ et $K_2^{\bullet,\mathrm{ell}}$ les restrictions de ces faisceaux pervers à l'ouvert $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$. Les champs de Picard $\mathcal{J}_a$ attachés aux $a \in \mathcal{A}$ se mettent en famille de sorte qu'on obtient un champ de Picard relatif $\mathcal{J}$ au-dessus de $\mathcal{A}$. Pour $i = 1, 2$, ce champ agit sur $\mathcal{M}_i^{\mathrm{ell}}$ au-dessus de $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$. On en déduit une action de ce champ sur les faisceaux pervers de cohomologie qui se factorise par un lemme d'homotopie par le faisceau en groupes abéliens $\pi_0(\mathcal{J})$ de ses composantes connexes. Comme ce faisceau au-dessus de $\mathcal{A}^{\mathrm{ell}}$ est un quotient fini du faisceau constant $X_*(T)$, on a une décomposition en facteurs directs

$$K_i^{\bullet,\mathrm{ell}} = \bigoplus_\kappa K_{i,\kappa}^{\bullet,\mathrm{ell}} \tag{4.5.3}$$

où κ parcourt $\mathrm{Hom}(X_*(T), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (cf. **[23]**, §6.2). Soit

$$K_{i,st}^{\bullet,\mathrm{ell}}$$

le facteur direct dit «stable» attaché à $\kappa = 1$. D'après Ngô (c'est un des résultats principaux de [**23**], cf. théorème 8.8.2), on a un isomorphisme

$$K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{1,st} \simeq K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{2,st}.$$

En utilisant le prolongement intermédiaire défini par l'immersion ouverte

$$j : \mathcal{A}^{\mathrm{ell}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{bon}} \hookrightarrow \mathcal{A}^{\mathrm{bon}},$$

on en déduit un isomorphisme

$$j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{1,st} \simeq j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{2,st}. \tag{4.5.4}$$

Cet énoncé est un analogue cohomologique d'un «lemme fondamental pondéré non standard» formulé par Waldspurger (cf. [**27**]). Plus précisément, lorsque tous les objets sont définis sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ et qu'on prend la trace de Frobenius agissant sur la fibre en $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$ des complexes $j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,st}$, on obtient une identité globale, analogue à l'énoncé local conjecturé par Waldspurger, qui traduit l'isomorphisme (4.5.4). Réciproquement, on peut montrer que cette identité globale implique l'énoncé local (les méthodes suivent celles de [**8**] sect. 17 à 19). Cette identité globale repose sur le fait remarquable et hautement non trivial suivant (cf. théorème 14.1.1 de [**8**]) : la trace de Frobenius agissant sur la fibre en a des complexes $j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,st}$ s'interprète comme une «intégrale orbitale pondérée stable globale», associée à a et au groupe G_i, construite par Arthur à l'aide d'une récurrence très élaborée (cf. [**2**]). Voici dans ses grandes lignes le principe de la preuve. Tout d'abord, par la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, la trace de Frobenius agissant sur la fibre en a du complexe $K_i^\bullet$ n'est autre que le comptage des points sur $\mathbb{F}_q$ de la fibre de Hitchin $\mathcal{M}_a^{G_i,\xi}$. On a montré dans [**10**] sect. 11 que ce comptage s'exprime à l'aide d'une intégrale orbitale pondérée globale d'Arthur, ou plutôt d'une variante évidente pour les algèbres de Lie introduite dans [**7**] (ainsi le comptage des points de $\mathcal{M}^\xi(\mathbb{F}_q)$ s'interprète comme la partie semi-simple régulière de la formule des traces pour les algèbres de Lie établie dans [**7**]). En utilisant le théorème 4.3.1, on voit que (4.5.3) implique qu'on a aussi

$$K_i^\bullet = j_{!*}K_i^{\bullet,\mathrm{ell}} = \bigoplus_\kappa j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,\kappa}. \tag{4.5.5}$$

Un autre théorème fondamental de Ngô ([**23**], théorème 6.4.1) montre que, pour un caractère κ non trivial, le facteur $K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,\kappa}$ est (essentiellement) isomorphe à $K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{H_\kappa,st}$ pour un groupe endoscopique H_κ (qui est de dimension strictement plus petite que celle de G_i). On a alors pour $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{bon}}$ l'égalité (on note τ le Frobenius)

$$\mathrm{trace}(\tau, K_i^\bullet) = \mathrm{trace}(\tau, j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,st}) + \sum_{\kappa\neq 1} \mathrm{trace}(\tau, j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{H_\kappa,st}).$$

Ceci fournit une relation de récurrence, analogue à celle d'Arthur, qui permet en fin de compte de calculer trace$(\tau, j_{!*}K^{\bullet,\mathrm{ell}}_{i,st})$.

Références

[1] J. Arthur. The trace formula in invariant form. *Ann. of Math.*, 114 :1–74, 1981.

[2] J. Arthur. A stable trace formula. I. General expansions. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1(2) :175–277, 2002.

[3] K. Behrend. Semi-stability of reductive group schemes over curves. *Math. Ann.*, 301(2) :281–305, 1995.

[4] A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[5] I. Biswas and S. Ramanan. An infinitesimal study of the moduli of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc. (2)*, 49(2) :219–231, 1994.

[6] H. Boden and K. Yokogawa. Moduli spaces of parabolic Higgs bundles and parabolic $K(D)$ pairs over smooth curves. I. *Internat. J. Math.*, 7(5) :573–598, 1996.

[7] P.-H. Chaudouard. La formule des traces pour les algèbres de Lie. *Math. Ann.*, 322(2) :347–382, 2002.

[8] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Le lemme fondamental pondéré. II. Enoncés cohomologiques. *Ann. of Math.*, à paraître.

[9] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Sur l'homologie des fibres de Springer affines tronquées. *Duke Math. J.*, 145(3) :443–535, 2008.

[10] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Le lemme fondamental pondéré. I. Constructions géométriques. *Compos. Math.*, 146(6) :1416–1506, 2010.

[11] R. Cluckers, T. Hales, and F. Loeser. Transfer principle for the fundamental lemma. In *On the stabilization of the trace formula*, volume 1 of *Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl.*, pages 309–347. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[12] R. Donagi and D. Gaitsgory. The gerbe of Higgs bundles. *Transform. Groups*, 7(2) :109–153, 2002.

[13] E. Esteves. Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(8) :3045–3095 (electronic), 2001.

[14] G. Faltings. Stable G-bundles and projective connections. *J. Algebraic Geom.*, 2(3) :507–568, 1993.

[15] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson. Homology of affine Springer fibers in the unramified case. *Duke Math. J.*, 121(3) :509–561, 2004.

[16] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson. Codimensions of root valuation strata. *Pure Appl. Math. Q.*, 5(4, Special Issue : In honor of John Tate. Part 1) :1253–1310, 2009.

[17] J. Heinloth and A. Schmitt. The cohomology rings of moduli stacks of principal bundles over curves. *Doc. Math.*, 15 :423–488, 2010.

[18] N. Hitchin. Stable bundles and integrable systems. *Duke Math. J.*, 54(1) :91–114, 1987.

[19] R. Langlands. *On the functional equations satisfied by Eisenstein series.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[20] S. Langton. Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 101 :88–110, 1975.

[21] G. Laumon. Fibres de Springer et jacobiennes compactifiées. In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 515–563. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[22] B. C. Ngô. Fibration de Hitchin et endoscopie. *Invent. Math.*, 164(2) :399–453, 2006.

[23] B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (111) :1–169, 2010.

[24] B. C. Ngô. Decomposition theorem and abelian fibration. In *On the stabilization of the trace formula*, volume 1 of *Stab. Trace Formula Shimura Var. Arith. Appl.*, pages 253–264. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[25] N. Nitsure. Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 62(2) :275–300, 1991.

[26] J.-L. Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique. *J. Inst. Math. Jussieu*, 5(3) :423–525, 2006.

[27] J.-L. Waldspurger. À propos du lemme fondamental pondéré tordu. *Math. Ann.*, 343(1) :103–174, 2009.

[28] J.-L. Waldspurger. Endoscopie et changement de caractéristique : intégrales orbitales pondérées. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(5) :1753–1818, 2009.

Pierre-Henri Chaudouard, Institut de Mathématiques de Jussieu et Université Paris Diderot (Paris 7), Bâtiment Chevaleret, 75205 Paris cedex 13, France
E-mail : `chaudouard@math.jussieu.fr`