Sur le comptage des fibrés de Hitchin

Pierre-Henri Chaudouard

Table des matières

1 Introduction

1.1. Soit C une courbe projective, lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k, de genre g. Soit D un diviseur sur C. Un fibré de Hitchin est un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ formé d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C ainsi qu'un homomorphisme $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(D)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{Z}$, Nitsure a construit un espace de modules grossier $M(n, e, D)$ qui classifie les fibrés de Hitchin semi-stables (à équivalence convenable près) de rang n et degré e (cf. [20]). C'est un schéma quasi-projectif muni d'un morphisme propre (dit de Hitchin) vers l'espace affine

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \oplus \ldots \oplus H^0(C, \mathcal{O}_C(nD)).$$

Pour les besoins de l'introduction, on suppose de plus qu'on est dans la situation suivante :

1. le rang n et le degré e sont premiers entre eux ;
2. soit $\deg(D) > 2g - 2$ soit D est un diviseur canonique.

L'hypothèse 1 entraîne que le schéma $M(n, e, D)$ classifie les classes d'isomorphisme de fibrés de Hitchin semi-stables. L'hypothèse 2 implique que ce schéma est lisse sur k.

1.2. Dans ce paragraphe, on suppose, de plus, que le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes et que le diviseur D est un diviseur canonique K. La théorie de Hodge non-abélienne fournit un difféomorphisme entre $M(n, e, D)$ et une variété de caractères, qui est la variété affine de certaines représentations ≪ tordues ≫ de dimension n du groupe fondamental de la courbe C (cf. [14] en rang 2 et [21] pour des résultats généraux). Dans [13], Hausel et Rodriguez-Villegas ont entrepris une étude approfondie de cette variété des caractères. En particulier, ils ont réussi à calculer le E-polynôme de cette variété, qui est une spécialisation du polynôme de Hodge mixte. En extrapolant leur résultat, ces auteurs ont obtenu une formule conjecturale pour le polynôme de Hodge mixte de cette variété. Comme une autre spécialisation du polynôme de Hodge mixte est le polynôme de Poincaré, ces auteurs ont *ipso facto* une formule conjecturale pour le polynôme de

Poincaré de la variété des caractères et donc pour celui de la variété $M(n,e,K)$ (c'est bien sûr le même). Celle-ci est compatible avec les calculs de Hitchin en rang 2 (cf. [14]) et Gothen en rang 3 (cf. [10]).

Suite à ces travaux, García-Prada, Heinloth et Schmitt (cf. [9]) ont donné un algorithme pour calculer le motif de la variété $M(n,e,K)$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ agit sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))$ pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C ; on en déduit une action de $\mathbb{C}^\times$ sur $M(n,e,D)$ par homothétie sur θ. Par un procédé de localisation, il leur suffit d'étudier le lieu des points fixes pour cette action et ce dernier admet une description en termes de chaînes. En rang 4, ils obtiennent une formule explicite pour le motif de $M(4,e,K)$ ce qui leur a permis de vérifier en rang 4 (et petit genre) la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas. Mentionnons que Mozgovoy [19] a donné une version de la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas qui calcule le motif.

1.3. Supposons que le corps de base k est une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et que la courbe C, ainsi que le diviseur D, proviennent par extension des scalaires de ce corps fini. Le schéma $M(n,e,D)$ est alors défini sur $\mathbb{F}_q$. Le groupe multiplicatif agit sur $M(n,e,D)$ et contracte $M(n,e,D)$ sur la fibre en 0 du morphisme de Hitchin qui est propre. Comme $M(n,e,D)$ est lisse sur $\mathbb{F}_q$, un argument d'homotopie combiné au théorème de Deligne montre que la cohomologie de $M(n,e,D)$ est pure. On peut donc déduire les nombres de Betti de $M(n,e,D)$ de la connaissance du nombre de points de $M(n,e,D)$ sur les corps finis $\mathbb{F}_{q^d}$. Le but de cet article est d'initier une approche au comptage des points de $M(n,e,D)$ sur les corps finis.

1.4. Les résultats de cet article. — Notre point de vue est de compter les points sur les extensions finies de $\mathbb{F}_q$ du champ algébrique $\mathcal{M}^{ss}$ des fibrés de Hitchin semi-stables de rang n et degré e. Comme $\mathcal{M}^{ss}$ est une $\mathbb{G}_m$-gerbe au-dessus de l'espace grossier $M(n,e,D)$, les deux comptages sont égaux à un facteur évident près. Le point de vue champêtre présente de nombreux avantages. Tout d'abord, on peut introduire le champ algébrique $\mathcal{M}$ de tous les fibrés de Hitchin (sans condition de stabilité) ainsi que des sous-champs ouverts intermédiaires $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ de « T-semi-stabilité » ; les champs $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ sont obtenus en bornant l'instabilité des fibrés de Hitchin par un paramètre T qui vit dans un certain réseau de cocaractères. Pour $T=0$, on retrouve le champ $\mathcal{M}^{ss}$. Le champ total $\mathcal{M}$ n'est pas de type fini et l'une des difficultés majeures du comptage est que son nombre de points sur les corps finis n'est pas fini. Par contre, les champs intermédiaires $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ sont de type fini.

Le groupoïde des points sur $\mathbb{F}_q$ des champs $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ s'interprète selon le point de vue de Weil comme un quotient adélique (pour les adèles de la courbe C). Il en résulte tout naturellement que le nombre de points sur les corps finis du champ $\mathcal{M}^{\leqslant T}$ s'exprime comme une intégrale adélique (cf. l'égalité (4.1.3) du §4.1). Lorsque le paramètre T grossit, le comptage $|\mathcal{M}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ tend vers l'infini. Cependant, la fonction $T\mapsto \mathcal{M}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)$ a un comportement remarquablement simple : c'est un quasi-polynôme (c'est-à-dire un polynôme à coefficients périodiques, cf. corollaire 4.5.6). Il en résulte alors que le comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ s'exprime par une intégrale adélique réminiscente de la formule des traces d'Arthur (cf. corollaire 5.2.2). À partir de là, on en déduit le principal résultat de cet article qui est le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. — *(cf. corollaire 6.1.2) Supposons que D soit un diviseur canonique ou que l'inégalité $\deg(D) > 2g-2$ soit satisfaite. Alors le comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ des fibrés de Hitchin semi-stables dans le cas coprimaire vérifie l'égalité*

$$|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^* J_{nilp}$$

où q^* est une puissance de q explicite et J_{nilp} est la contribution nilpotente d'une fonction test très simple dans (un analogue de) la formule des traces d'Arthur.

On a aussi le résultat suivant.

Théorème 1.4.2. — *(cf. corollaire 7.4.3) On suppose $\deg(D) \geqslant 2g-2$. Soit $\mathcal{N}^{ss}$ le champ des fibrés de Hitchin semi-stables $(\mathcal{E},\theta)$ dont l'endomorphisme θ est nilpotent. Alors on a, avec les notations du 1.4.1,*

$$|\mathcal{N}^{ss}(\mathbb{F}_q)| = J_{nilp}.$$

Dans un autre article (cf. [8]), on a montré que cette contribution nilpotente dans la formule des traces d'Arthur admet un développement suivant les orbites nilpotentes (l'énoncé est rappelé au corollaire 7.4.4)

$$J_{nilp} = \sum_{\mathfrak{o} \in (Nilp)} J_{\mathfrak{o}}.$$

Le théorème 1.4.1 ramène donc le problème du comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ au calcul des $J_{\mathfrak{o}}$. Pour certaines orbites $\mathfrak{o}$, on sait exprimer la contribution $J_{\mathfrak{o}}$ en termes de la fonction ζ de la courbe C (cf. §§. 7.5 à 7.7 où l'on discute des résultats de [8]). Les termes $J_{\mathfrak{o}}$ ne s'interprètent pas directement comme un comptage. Néanmoins, à une orbite $\mathfrak{o}$, on sait associer un champ $\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}$ formé des fibrés de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$ T-semi-stables et tels que θ appartienne à l'orbite $\mathfrak{o}$ au point générique de la courbe ; alors le comptage $|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ est asymptotique à un quasi-polynôme dont le terme constant est $J_{\mathfrak{o}}$ (cf. théorème 7.4.2).

Pour finir, en s'inspirant de la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas, on formule une conjecture sur la valeur des expressions $J_{\mathfrak{o}}$.

1.5. Organisation de l'article. — Dans la section 2, on décrit notre approche dans le cas plus simple et bien connu du comptage des fibrés vectoriels semi-stables. La section 3 introduit la description adélique des fibrés de Hitchin. On y trouve également un calcul d'extension utile par la suite (cf. lemme 3.9.4) ainsi qu'un exemple de calcul sur la droite projective qu'on va développer tout au long de l'article. Dans la section 4, on introduit la notion de T-semi-stabilité. Un certain nombres de résultats annexes est rassemblé qui servent ensuite pour démontrer le caractère quasi-polynomial en T de certaines fonctions de comptage. Dans la section 5, on introduit des intégrales adéliques analogues à celles considérées par Arthur. On montre que, dans les cas favorables, elles expriment le comptage $|\mathcal{M}^{ss}(\mathbb{F}_q)|$. On énonce également un analogue dans notre situation de la formule des traces d'Arthur (cf. corollaire 5.2.3). Dans la section 6, on démontre le théorème 1.4.1 ci-dessus. Dans la section 7, on décrit certains résultats obtenus dans [8] ; en particulier on définit les expressions $J_{\mathfrak{o}}$ auxquelles nous avons fait allusion dans le paragraphe précédent. On illustre les résultats obtenus par quelques calculs sur la droite projective en rang 2. Dans la section 8 finale, on énonce une conjecture pour le calcul des expressions $J_{\mathfrak{o}}$. Cette conjecture n'est qu'un raffinement de la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas. On montre que la conjecture est vraie en rang $\leqslant 3$.

1.6. Remerciements. — Ce travail fait partie d'un projet en collaboration avec Gérard Laumon. Je le remercie pour les nombreuses discussions que nous avons eues.

Je remercie également Tamás Hausel, Jochen Heinloth et Fernando Rodriguez-Villegas pour des échanges enrichissants.

2 Le champ des fibrés vectoriels

2.1. Soit C une courbe géométriquement connexe, projective et lisse sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q. Soit g_C son genre.

2.2. Un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C est un $\mathcal{O}_C$-module localement libre. On lui associe trois invariants

– son rang noté
$$\mathrm{rang}(\mathcal{E}) \in \mathbb{N} ;$$

– son degré noté
$$\deg(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z} ;$$

– sa pente
$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rang}(\mathcal{E})} \in \mathbb{Q}$$

lorsque $\mathrm{rang}(\mathcal{E}) > 0$ c'est-à-dire lorsque $\mathcal{E} \neq 0$.

2.3. Pour tous entiers $n \geqslant 1$ et $e \in \mathbb{Z}$, soit

$$Fib_n^e$$

le champ algébrique des fibrés vectoriels de rang n et de degré e sur C. C'est un champ lisse sur $\mathbb{F}_q$ de dimension

$$n^2(g_C - 1).$$

Ce champ est localement de type fini sur $\mathbb{F}_q$ (sans être de type fini).

La catégorie $Fib_n^e(\mathbb{F}_q)$ est le groupoïde des fibrés vectoriels de rang n et de degré e sur C. Pour tout groupoïde, on peut définir son cardinal comme la somme sur les classes d'isomorphisme des objets de l'inverse de l'ordre du groupe des automorphismes. Par convention, on pose l'inverse de l'ordre d'un groupe infini égal à 0. Lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini d'objets à isomorphisme près, on obtient un nombre rationnel. Sinon, le cardinal peut être fini ou infini.

Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$, soit $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ son groupe d'automorphismes : c'est un groupe fini. On a

$$|Fib_n^e(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\mathcal{E}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\mathcal{E})|} \tag{2.3.1}$$

où $\mathcal{E}$ parcourt l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang n et de degré e sur C. Cet ensemble de classes d'isomorphisme n'est pas fini. Cependant les groupes d'automorphimes grossissent suffisamment pour que l'expression dans le membre de gauche de (2.3.1) soit une série convergente.

Soit ζ la fonction zêta de la courbe C. De notre point de vue, ζ est une fonction de la variable complexe s. C'est en fait une fraction rationnelle en q^{-s} à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Voici une formule qui fait intervenir la cohomologie ℓ-adique

$$\zeta(s) = \zeta_{C/\mathbb{F}_q}(s) = \prod_{i=0}^{2} \det(1 - F_q^* q^{-s} | H^i(C \times_{\mathbb{F}_q} k, \mathbb{Q}_\ell))^{(-1)^{i+1}} \tag{2.3.2}$$

où ℓ est un nombre premier qui ne divise pas q, le corps k est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et $F_q : C \times_{\mathbb{F}_q} k \to C \times_{\mathbb{F}_q} k$ est l'endomorphisme de Frobenius. Par exemple, pour la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ on a

$$\zeta_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q}(s) = \frac{1}{(1 - qq^{-s})(1 - q^{-s})} \tag{2.3.3}$$

On a alors la formule suivante.

Théorème 2.3.1. —*(Formule de Siegel, cf. [12] et [22])*

$$|Fib_n^e(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2(g_C - 1)} \zeta^*(1)\zeta(2)\ldots\zeta(n)$$

où l'on pose

$$\zeta^*(1) = \lim_{s \to 1} (1 - q^{1-s})\zeta(s). \tag{2.3.4}$$

2.4. Semi-stabilité. — Un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C est semi-stable, resp. stable, si pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$, on a

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \mu(\mathcal{E}) \quad (\text{resp. } \mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E}))$$

La condition de semi-stabilité définit le sous-champ ouvert des fibrés vectoriels semi-stables noté

$$Fib_n^{e,ss} \subset Fib_n^e.$$

Le champ $Fib_n^{e,ss}$ est de type fini sur le corps de base.

Théorème 2.4.1. —*(Filtration de Harder-Narasimhan, cf. [12]) Pour tout $\mathcal{E} \neq 0$, il existe une unique filtration de sous-fibrés*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

telle que

1. *pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, les quotients $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ sont semi-stables ;*
2. *Les pentes des quotients vont en décroissant strictement $\mu(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) > \mu(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) > \ldots$.*

On l'appelle la filtration canonique de Harder-Narasimhan.

L'existence et l'unicité de la filtration de Harder-Narasimham conduisent à une stratification du champ Fib_n^e : une strate est formée des fibrés vectoriels dont la filtration de Harder-Narasimhan a les rangs et les degrés de ses quotients fixés. Le comptage des fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ dont la filtration de Harder-Narasimhan a ses quotients fixés se calcule aisément en termes des degrés et des rangs de ces quotients. Il s'agit d'un comptage champêtre d'extensions itérées, qui consiste essentiellemnt à calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un complexe $R\,\mathrm{Hom}$ placé en degré 0 et 1 : par la formule de Riemann-Roch, celui-ci s'exprime en termes des degrés et rangs et bien sûr du cardinal q du corps de base $\mathbb{F}_q$ et du genre g_C de la courbe. Il s'ensuit que le comptage de la strate associée aux rangs $(n_1, n_2, \ldots)$ et degrés $(e_1, e_2, \ldots)$ s'exprime en termes de ces données et des quantités $|Fib_{n_i}^{e_i,ss}(\mathbb{F}_q)|$. Lorsqu'il y a un seul rang n et un seul degré e, la strate correspondante est l'ouvert semi-stable. On en déduit qu'il existe une formule de récurrence qui exprime $|Fib_n^{e,ss}(\mathbb{F}_q)|$ en terme de $|Fib_n^e(\mathbb{F}_q)|$ et des $|Fib_{n'}^{e',ss}(\mathbb{F}_q)|$ pour $n' < n$ (cf. [12] dans un contexte voisin).

Nous allons voir aux paragraphes suivants qu'à la place de cette récurrence on peut donner une formule fermée pour le comptage $|Fib_n^{e,ss}(\mathbb{F}_q)|$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant (cf. [3] lemme 2.1, cf. aussi [16] proposition 3 p.221) qui apparaît dans les travaux d'Arthur et Langlands sur les formes automorphes et dont la pertinence dans notre contexte avait été notée par Laumon et Rapoport (cf. [17]). Comme on aura plus tard besoin de variantes de ce lemme pour les fibrés de Hitchin, on en donne une démonstration.

Lemme 2.4.2. —*(Langlands-Arthur) Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E} \neq 0$, on a*

$$\sum_{\mathcal{F}_\bullet} (-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)-1} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mathcal{E} \text{ est semi-stable} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

où l'on somme sur tous les drapeaux $\mathcal{F}_\bullet$ de sous-fibrés de $\mathcal{E}$

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

qui sont déstabilisants au sens où l'on a $\mu(\mathcal{F}_i) > \mu(\mathcal{E})$ pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$. La longueur du drapeau $\mathcal{F}_\bullet$, qui est notée $long(\mathcal{F}_\bullet)$, est l'entier r.

Démonstration. — En intercalant des sous-fibrés, on obtient un nouveau drapeau qu'on appelle un raffinement. On peut associer de manière canonique à tout drapeau déstabilisant (au sens du lemme 2.4.2) un raffinement déstabilisant dont les quotients successifs sont semi-stables. Il suffit pour cela de prendre la filtration de Harder-Narasimhan des quotients. Réciproquement, un drapeau déstabilisant $\mathcal{F}_\bullet$ dont les quotients successifs sont semi-stables est le raffinement canonique d'un nombre fini de drapeaux déstabilisants : ce sont les drapeaux

$$\mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_{i_1} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_{i_k} \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

où $i_1 < \ldots < i_k$ est une partie de $\{1, \ldots, r-1\}$ qui contient

$$\{i \mid 1 \leqslant i \leqslant r-1 \text{ et } \mu(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}) \leqslant \mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i)\}.$$

Si $\mathcal{E}$ est semi-stable, le seul drapeau déstabilisant est l'unique drapeau de longueur 1 ; la somme est donc bien 1. Si $\mathcal{E}$ n'est pas semi-stable, il suffit de prouver le même résultat pour la somme sur les drapeaux déstabilisants de même rafinement canonique. En utilisant leur description, on voit, par la formule du binôme, que la somme alternée vaut bien 0. □

2.5. Les adèles. — Soit $F = \mathbb{F}_q(C)$ le corps des fonctions de C et $|C|$ l'ensemble des points fermés de C. Pour tout $c \in |C|$, soit F_c le corps complété de F en c et $\mathcal{O}_c$ son anneau d'entiers. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F défini comme la limite inductive topologique

$$\mathbb{A} = \varinjlim_{S} \prod_{c \in S} F_c \prod_{c \notin S} \mathcal{O}_c$$

où S parcourt les parties finies de $|C|$ et où le produit $\prod_{c\in S} F_c \prod_{c \notin S} \mathcal{O}_c$ est muni de la topologie produit. Le corps F se plonge diagonalement et discrètement dans $\mathbb{A}$. Le produit

$$\mathcal{O} = \prod_c \mathcal{O}_c \subset \mathbb{A}$$

est compact. Le morphisme degré

$$\deg : \mathbb{A}^\times \to \mathbb{Z},\ a \mapsto \sum_c \deg(c)\,\mathrm{val}(a_c)$$

est trivial sur $\mathcal{O}^\times$ et sur $F^\times$.

Soit $G = GL(n)$ et $B \subset G$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Soit $T_0 \subset B$ le sous-tore maximal de G formé des matrices diagonales.

Soit P un sous-groupe parabolique standard de G (l'épithête standard signifie que P contient B). Soit $X^*(P)$ le groupe des caractères rationnels de P et

$$\mathfrak{a}_P = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(P), \mathbb{Z}).$$

On a un morphisme surjectif

$$H_P : P(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$$

tel que pour tout $\chi \in X^*(P)$ et $p \in P(\mathbb{A})$, on ait

$$\langle \chi, H_P(\delta g)\rangle = -\deg(\chi(p)).$$

Le sous-groupe parabolique P admet une décomposition de Levi standard $P = M_P N_P$ où N_P est le radical unipotent de P et M_P est le facteur de Levi de P qui contient T_0. Si l'on identifie M_P à un produit $GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r)$, alors $\mathfrak{a}_P$ s'identifie à $\mathbb{Z}^r$; pour tout $m \in M_P(\mathbb{A})$ et $n \in N_P(\mathbb{A})$, on identifie m à $(m_1, \ldots, m_r) \in GL(n_1, \mathbb{A}) \times \ldots \times GL(n_r, \mathbb{A})$ de sorte qu'on a

$$H_P(mn) = -(\deg(\det(m_1)), \ldots, \deg(\det(m_r))) \in \mathbb{Z}^r.$$

L'application H_P est invariante à gauche par $P(F)$ et à droite par $P(\mathcal{O})$. Il est alors loisible de poser pour tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$H_P(g) = H_P(p)$$

pour tout $p \in P(\mathbb{A})$ tel que $g \in pG(\mathcal{O})$. Un tel p existe toujours (c'est la décomposition d'Iwasawa). On obtient alors une application

$$H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$$

invariante à gauche par $P(F)$ et à droite par $G(\mathcal{O})$.

Soit $\Delta = \Delta_B \subset X^*(T_0)$ le sous-ensemble du groupe des caractères rationnels de T_0 formé des racines simples de T_0 dans B. Soit $\hat{\Delta} \subset X^*(T_0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ l'ensemble des poids simples $(\varpi_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$: c'est la base du $\mathbb{Q}$-espace engendré par Δ qui est duale de la famille des coracines simples $\alpha^\vee$ pour $\alpha \in \Delta$. On distingue le sous-ensemble $\Delta^P \subset \Delta$ des racines simples dans P et le sous-ensemble $\hat{\Delta}_P$ des poids ϖ_α pour $\alpha \in \Delta - \Delta^P$. On définit les espaces vectoriels

$$a_P = \mathfrak{a}_P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ et } a_P^* = X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

pour lesquels on a un accouplement canonique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : a_P^* \times a_P \to \mathbb{R}.$$

Soit $a_B \to a_P \to a_G$ les morphismes surjectifs duaux des morphismes de restriction $X^*(G) \to X^*(P) \to X^*(B)$. Soit

$$a_P^G = \ker(a_P \to a_G)$$

et

$$a_B^P = \ker(a_B \to a_P).$$

L'orthogonal de $\Delta^P \subset a_B^*$ dans a_B définit un supplémentaire de a_B^P dans a_B qu'on identifie par la projection ci-dessus à a_P. De la sorte, on considère a_P comme un sous-espace de a_B et on a une décomposition

$$a_B = a_B^P \oplus a_P. \tag{2.5.1}$$

Comme ci-dessus, si on identifie M_P à $GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r)$ et T_0 à $GL(1)^n$, on a $a_B \simeq \mathbb{R}^n$ et $a_P \simeq \mathbb{R}^r$ (avec $r \leqslant n$). Le morphisme $a_B \to a_P$ s'exprime concrètement par

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 + \ldots + a_{n_1}, \ldots, a_{n-n_r+1} + \ldots + a_n)$$

et l'inclusion $a_P \subset a_B$ est donnée par

$$(a_1, \ldots, a_r) \mapsto (\underbrace{\frac{a_1}{n_1}, \ldots, \frac{a_1}{n_1}}_{n_1 \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{\frac{a_r}{n_r}, \ldots, \frac{a_r}{n_r}}_{n_r \text{ fois}}).$$

Pour tout sous-groupe parabolique Q contenant P, on pose $a_P^Q = a_P \cap a_B^Q$. On a donc une décomposition

$$a_B = a_B^P \oplus a_P^Q \oplus a_Q^G \oplus a_G. \tag{2.5.2}$$

Dualement on a aussi une décomposition ce qui permet de définir une projection $a_B^* \to a_P^*$. Soit $\Delta_P \subset a_P^*$ l'image de $\Delta - \Delta^P$ par cette projection.

Les constructions précédentes et les notations valent encore lorsqu'on remplace B par un autre sous-groupe de Borel qui contient T_0. Pour tout sous-groupe parabolique P contenant T_0, celui-ci admet une unique décomposition de Levi $P = MN$ tel que le sous-groupe de Levi M contienne T_0. Les espaces a_P et a_B^P ne dépendent que de M et T_0 : on pourra les noter respectivement a_M et $a_{T_0}^M$.

On associe au sous-groupe parabolique P la chambre de Weyl aigüe

$$a_P^+ = \{H \in a_P \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \ \forall \alpha \in \Delta - \Delta^P\}$$

et la chambre de Weyl obtuse

$${}^+\mathfrak{a}_P = \{H \in a_P \mid \langle \varpi, H \rangle > 0 \ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_P\}.$$

On note τ_P et $\hat{\tau}_P$ les fonctions caractéristiques respectives de ces cônes. En les composant avec la projection $a_B \to a_P$, on pourra considérer ces fonctions comme des fonctions sur a_B. En utilisant la projection $a_B \to a_P^Q$ (relative à la décomposition 2.5.2), on obtient des fonctions notées respectivement τ_P^Q et $\hat{\tau}_P^Q$.

2.6. Les fibrés et les adèles. — L'intérêt des constructions adéliques du paragraphe précédent est le suivant. Pour tout $e \in \mathbb{Z}$, soit

$$G(\mathbb{A})^e = \{g \in G(\mathbb{A}) \mid \deg(\det(g)) = -e\}.$$

L'ensemble quotient $G(\mathbb{A})^e/G(\mathcal{O})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des fibrés $\mathcal{E}$ sur C de rang n et degré e muni d'un trivialisation générique (pour un énoncé plus général, cf. [6]). Le groupe $G(F)$ agit par translation à gauche sur ce quotient. La catégorie $Fib_n^e(\mathbb{F}_q)$ est alors équivalente au groupoïde quotient

$$[G(F)\backslash(G(\mathbb{A})^e/G(\mathcal{O}))].$$

Soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang n muni d'une trivialisation générique et soit $g \in G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$ la classe qui lui correspond. La donnée d'un drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de $\mathcal{E}$ est équivalente à celle d'un drapeau en fibre générique donc à un sous-groupe parabolique de G défini sur F. Un tel sous-groupe est conjugué à un sous-groupe standard P de G par un unique élément $\delta \in P(F)\backslash G(F)$. La collection des degrés des quotients de $\mathcal{F}_\bullet$ est essentiellement le vecteur $H_P(\delta g)$. La condition $\tau_P(H_P(\delta g) = 1$ est équivalente au fait que les pentes des quotients vont en décroissant et la condition $\hat{\tau}_P(H_P(\delta g) = 1$ signifie que le drapeau est destabilisant.

Soit F^G la fonction définie pour $g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$ par

$$F^G(g) = \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g)) \tag{2.6.1}$$

où la somme est prise sur les sous-groupes paraboliques standard P de G. D'après le lemme 2.4.2, on a $F^G(g) = 1$ si et seulement si le fibré vectoriel correspondant à g est semi-stable. Pour tout sous-groupe parabolique standard $P = M_P N_P$ de G, muni de sa décomposition de Levi standard, on pose pour tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$F^P(g) = F^{M_P}(m)$$

où $m \in M_P(\mathbb{A})$ vérifie $g \in N_P(\mathbb{A})mG(\mathcal{O})$. Un tel m existe toujours et est unique à un élément de $M(\mathcal{O})$ près par la décomposition d'Iwasawa. Le groupe M_P est un produit de groupes linéaires. La fonction F^{M_P} est simplement le produit des fonctions sur les blocs linéaire. La fonction F^P est alors invariante à gauche par $P(F)$ et à droite par $G(\mathcal{O})$.

On résume sous forme de tableau les correspondances entre à gauche les propriétés sur les fibrés vectoriels et à droite leur pendant adélique.

Fibrés vectoriels	Adèles
fibré $\mathcal{E}$ + trivialisation générique	$g \in G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$
$\deg(\mathcal{E})$	$-\deg(g)$
$\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$	$\{\delta \in G(F) \mid g^{-1}\delta g \in G(\mathcal{O})\}$
Drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de $\mathcal{E}$	(P, δ) avec P parabolique standard de G et $\delta \in P(F)\backslash G(F)$
$(\deg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0), \deg(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1), \ldots)$	$H_P(\delta g)$
Les quotients de $\mathcal{F}_\bullet$ sont semi-stables	$F^P(\delta g) = 1$
$\deg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) > \deg(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) > \ldots$	$\tau_P(H_P(\delta g)) = 1$
$\mathcal{F}_\bullet$ déstabilisant	$\hat{\tau}_P(H_P(\delta g)) = 1$
$\mathcal{E}$ semi-stable	$F^G(g) = 1$
Existence et unicité de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$	$\sum_{P} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} F^P(\delta g)\tau_P(H_P(\delta g)) = 1$

2.7. Intégrales adéliques et comptages. — Le sous-groupe $G(F)$ est discret dans $G(\mathbb{A})$. On munit le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ de la mesure notée dg, invariante à gauche par $G(\mathbb{A})$, qui est obtenue comme le quotient de la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$ qui donne le volume 1 à $G(\mathcal{O})$ par la mesure de comptage sur $G(F)$. On a la formule suivante :

$$|Fib_n^e(\mathbb{F}_q)| = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} dg. \tag{2.7.1}$$

Le membre de droite s'écrit encore

$$\sum_{g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e/G(\mathcal{O})} \mathrm{vol}(g^{-1}G(F)g \cap G(\mathcal{O})\backslash G(\mathcal{O})).$$

La somme sur g s'interprète comme la somme sur les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang n et degré e. Pour un tel g, soit $\mathcal{E}_g$ le fibré correspondant. Le groupe $g^{-1}G(F)g \cap G(\mathcal{O})$ est conjugué à $G(F) \cap g^{-1}G(\mathcal{O})g$ qui n'est autre que le groupe fini des automorphismes de $\mathcal{E}_g$. Le volume $\mathrm{vol}(g^{-1}G(F)g \cap G(\mathcal{O})\backslash G(\mathcal{O}))$ est donc l'inverse de l'ordre de ce groupe.

Remarque 2.7.1. — L'égalité (2.7.1) montre en particulier que le comptage $|Fib_n^e(\mathbb{F}_q)|$ ne dépend pas de e.

On part de la formule intégrale suivante :

$$|Fib_n^{e,ss}(\mathbb{F}_q)| = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} F^G(g)\, dg.$$

On utilise ensuite la somme alternée qui définit F^G, cf. (2.6.1). On permute somme et intégrale et on utilise la décomposition d'Iwasawa (ce qui correspond au calcul d'extensions mentionné plus haut). On obtient

$$(2.7.2) \qquad |Fib_n^{e,ss}(\mathbb{F}_q)| = \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \hat{\tau}_P(H_P(g))\, dg$$

$$= \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{H \in H_P(G(\mathbb{A})^e)} \int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})^H} q^{-\langle 2\rho_P, H\rangle} \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \int_{G(\mathcal{O})} \hat{\tau}_P(H_P(nmk))\, dk\, dn\, dm$$

où l'on note $M_P(\mathbb{A})^H$ l'ensemble des $m \in M_P(\mathbb{A})$ tels que $H_P(m) = H$ et $2\rho_P$ est la somme des racines de T dans N_P. Les mesures sur $M_P(\mathbb{A})$ et $N_P(\mathbb{A})$ sont les mesures qui donnent 1 aux sous-groupes $M_P(\mathcal{O})$ et $N_P(\mathcal{O})$. On a $H_P(nmk) = H_P(m)$ de sorte que de l'intégrale sortent les volumes

1. $\mathrm{vol}(G(\mathcal{O})) = 1$;
2. $\mathrm{vol}(N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})) = q^{\dim(N_P)(g_C-1)}$;
3. $\mathrm{vol}(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})^H) = |Fib^0_{M_P}(\mathbb{F}_q)|$, où l'on pose, pour $M_P = GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r)$,

$$|Fib^0_{M_P}(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^r |Fib^0_{n_i}(\mathbb{F}_q)|.$$

L'égalité 3 provient de (2.7.1) et de la remarque 2.7.1. On en déduit qu'on a la formule suivante

$$|Fib_n^{e,ss}(\mathbb{F}_q)| = \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} q^{\dim(N_P)(g_C-1)} |Fib^0_{M_P}(\mathbb{F}_q)| \theta_P^e(2\rho_P)$$

où pour $\lambda \in X^*(P) \otimes \mathbb{R}$, on introduit la série

$$\theta_P^e(\lambda) = \sum_{H \in H_P(G(\mathbb{A})^e)} \hat{\tau}_P(H) q^{-\langle \lambda, H\rangle}.$$

Cette série est absolument convergente dans le cône défini par $\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$. C'est même une série géométrique dont il est facile de donner la somme. Par exemple, on a

$$\theta_B^0(\lambda) = \prod_{\alpha^\vee \in \Delta_B^\vee} \frac{1}{q^{\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle} - 1}.$$

Cela résout donc la question du comptage des fibrés vectoriels semi-stables.

3 Le champ des fibrés de Hitchin

3.1. Les notations sont celles de la section 2. On fixe de plus un diviseur D sur la courbe C.

3.2. Fibrés de Hitchin. — Un fibré de Hitchin de degré e et rang n est un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ où
- $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang n et degré e ;
- $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(D)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_C$-module.

Remarque 3.2.1. — Lorsqu'on remplace le fibré en droites $\mathcal{O}_C(D)$ par le fibré canonique Ω^1_C on retrouve la notion classique de fibré de Higgs.

3.3. Polynôme caractéristique. — Le polynôme caractéristique d'un fibré de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$ de rang n est un polynôme de degré n

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$$

dont les coefficients sont les éléments

$$a_i = (-1)^i \operatorname{trace}(\wedge^i \theta) \in H^0(C, \mathcal{O}(iD)).$$

3.4. Espace de Hitchin. — On fixe un degré e et un rang n. Soit

$$\mathcal{M}_D = \mathcal{M}^e_{n,D}$$

le champ algébrique des fibrés de Hitchin sur C de degré e et rang n. Soit

$$\mathcal{A}_D = \mathcal{A}_{n,D} = \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(C, \mathcal{O}(iD))$$

l'espace affine des polynômes caractéristiques. La fibration de Hitchin est donné par le morphisme

$$f : \mathcal{M}_D \to \mathcal{A}_D$$

qui envoie $(\mathcal{E},\theta)$ sur son polynôme caractéristique.

3.5. Comptage. — Tout comme le champ Fib^e_n, le champ $\mathcal{M}_D$ n'est pas de type fini mais seulement localement de type fini. Le nombre de points sur $\mathbb{F}_q$ s'écrit, au moins formellement,

$$|\mathcal{M}_D(\mathbb{F}_q)| = \sum_{(\mathcal{E},\theta)} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E},\theta)|} \tag{3.5.1}$$

$$= \sum_{\mathcal{E}} \frac{|\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))|}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E})|}. \tag{3.5.2}$$

Dans la première expression, on somme sur les classes d'isomorphisme de fibrés de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$ (de rang n et degré e) pondérées par l'inverse de l'ordre du groupe $\operatorname{Aut}(\mathcal{E},\theta)$ des automorphismes. Comme ce groupe $\operatorname{Aut}(\mathcal{E},\theta)$ est le stabilisateur de θ dans $\operatorname{Aut}(\mathcal{E})$ pour l'action de ce dernier sur l'espace $\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))$ des morphismes de $\mathcal{O}_C$-modules de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}(D)$, on peut réécrire cette somme comme la somme sur les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ (de rang n et degré e) pondérés par le rapport

$$\frac{|\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))|}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E})|}.$$

Contrairement au cas des fibrés vectoriels, cette somme est infinie dès que le rang n est supérieur ou égal à 2 (cf. remarque 3.9.3 ci-dessous). L'exemple du paragraphe suivant illustre ce phénomène.

3.6. Un exemple sur la droite projective. — Dans ce paragraphe, on prend pour courbe C la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$. Les autres données fixées sont le rang $n = 2$ et le degré $e = 1$. Par le théorème de Grothendieck (cf. [11]), les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang 2 et degré 1 sont indexées par un entier $a \geqslant 1$ pour lequel un représentant est

$$\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a).$$

L'espace des endomorphismes d'un tel fibré est donné matriciellement par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{F}_q = H^0(C,\mathcal{O}) & H^0(C,\mathcal{O}(2a-1)) \\ 0 = H^0(C,\mathcal{O}(1-2a)) & \mathbb{F}_q = H^0(C,\mathcal{O}) \end{pmatrix}.$$

En particulier, la formule de Riemann-Roch montre que son groupe d'automorphismes est d'ordre $(q-1)^2q^{2a}$. On obtient alors la formule suivante de comptage

$$\begin{aligned} |Fib_2^1(\mathbb{F}_q)| &= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(1-a))|} \\ &= \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)^2q^{2a}} = \frac{q^{-4}}{(1-q^{-1})^2(1-q^{-2})} \\ &= q^{-4}\zeta^*(1)\zeta(2) \end{aligned}$$

où ζ est la fonction zêta de la droite projective.

Soit un entier $d \in \mathbb{Z}$. Les fibrés de Hitchin qu'on considère ici sont de rang 2, de degré 2 et relatifs à un diviseur D sur C de degré $2d$. À isomorphisme près, ce sont donc les couples $(\mathcal{E} = \mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(1-a),\theta)$ où $a \geqslant 1$ et θ appartient à l'espace (écrit matriciellement)

$$\begin{pmatrix} H^0(C,\mathcal{O}(2d)) & H^0(C,\mathcal{O}(2(a+d)-1)) \\ H^0(C,\mathcal{O}(1-2(a-d))) & H^0(C,\mathcal{O}(2d)) \end{pmatrix}$$

Cet espace a pour ordre

1. $q^{4(2d+1)}$ si $a \leqslant d$ et $d \geqslant 0$;
2. $q^{3(2d+1)}q^{2a-1}$ si $a > d$ et $d \geqslant 0$;
3. 1 si $a + d \leqslant 0$;
4. $q^{2(a+d)}$ $a + d \geqslant 1$ et $d < 0$.

En utilisant la formule (3.5.2), on obtient

– pour $\deg(D) = 2d \geqslant 0$

$$|\mathcal{M}_D(\mathbb{F}_q)| = \sum_{a=1}^{d} \frac{q^{4(2d+1)}}{(q-1)^2q^{2a}} + \sum_{a=d+1}^{\infty} \frac{q^{3(2d+1)}q^{2a-1}}{(q-1)^2q^{2a}} \ ;$$

– pour $\deg(D) = 2d < 0$

$$|\mathcal{M}_D(\mathbb{F}_q)| = \sum_{a=1}^{-d} \frac{1}{(q-1)^2q^{2a}} + \sum_{a=1-d}^{\infty} \frac{q^{2(a+d)}}{(q-1)^2q^{2a}}.$$

Dans l'un ou l'autre cas, on obtient une série divergente pour la simple raison que, pour $a > d$, son terme général ne dépend plus de a.

3.7. Semi-stabilité des fibrés de Hitchin. — Un fibré de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$ sur C est semi-stable, resp. stable, si pour tout sous-fibré $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ qui est θ-invariant, c'est-à-dire tel que le composé

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E} \to^{\theta} \mathcal{E}(D) \to \mathcal{E}(D)/\mathcal{F}(D)$$

est nul, on a l'inégalité de pente

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \mu(\mathcal{E}) \quad (\text{resp. } \mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})).$$

La condition de pente ne porte donc que sur les sous-fibrés $\mathcal{F}$ tels que $(\mathcal{F},\theta_{|\mathcal{F}})$ soit un fibré de Hitchin.

3.8. L'ouvert semi-stable $\mathcal{M}_D^{ss}$. — Soit $\mathcal{M}_D^{ss}$ l'ouvert de $\mathcal{M}_D$ formé des fibrés de Hitchin semi-stables. On obtient un champ de type fini sur le corps de base et le comptage $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ des fibrés de Hitchin semi-stables est fini. Voici le principal problème auquel nous allons nous intéresser :

Problème : Peut-on trouver une formule en termes de la fonction ζ de la courbe, du rang n, du degré e et du diviseur D pour $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|$?

Remarque 3.8.1. — La torsion par un fibré en droites de degré d définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,D}^{e}$ sur $\mathcal{M}_{n,D}^{e+nd}$ qui envoie $\mathcal{M}_{n,D}^{e,ss}$ sur $\mathcal{M}_{n,D}^{e+nd,ss}$. En particulier, lorsque le rang n est fixé, le comptage $|\mathcal{M}_{n,D}^{e,ss}(\mathbb{F}_q)|$ ne dépend que de la classe de e modulo n.

3.9. Les strates de Harder-Narasimhan. — On a l'analogue suivant du théorème 2.4.1.

Théorème 3.9.1. — *Pour tout fibré de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$, il existe une unique filtration $\mathcal{F}_\bullet$ de sous-fibrés θ-invariants*

$$0=\mathcal{F}_0\subsetneq\mathcal{F}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathcal{F}_r=\mathcal{E}$$

telle que

1. *pour $0\leqslant i\leqslant r-1$, le quotient $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ muni de l'endomorphisme induit par θ est un fibré de Hitchin semi-stable ;*
2. *Les pentes des quotients vont en décroissant strictement $\mu(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0)>\mu(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1)>\ldots$.*

Soit $1\leqslant r\leqslant n$, une collection de rang $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbb{N}^r$ avec $n_i\geqslant 1$ et $n_1+\ldots+n_r=n$ et une collection de degré $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_r)\in\mathbb{Z}^r$ avec $e_1+\ldots+e_r=e$. On appelle strate de Harder-Narasimhan de type $(\underline{n},\underline{e})$, la partie localement fermée de $\mathcal{M}_D$, notée $\mathcal{M}_{\underline{n},D}^{\underline{e},ss}$, formée des fibrés de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$ dont la filtration de Harder-Narasimhan est du type

$$0=\mathcal{F}_0\subsetneq\mathcal{F}_1\subsetneq\ldots\subsetneq\mathcal{F}_r=\mathcal{E}$$

avec $\mathrm{rang}(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1})=r_i$ et $\deg(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1})=e_i$ pour $1\leqslant i\leqslant r$. Bien sûr, la strate est vide sauf si on a l'inégalité

$$\frac{e_1}{n_1}>\frac{e_2}{n_2}>\ldots>\frac{e_r}{n_r}. \tag{3.9.1}$$

Lorsqu'on a $\deg(D)\geqslant 2g_C-2$, il est possible de donner une formule pour $\mathcal{M}_{\underline{n},D}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)$ en fonction du comptage des fibrés de Hitchin semi-stables en rang plus petit. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.9.2. — *Soit $\underline{e}$ et $\underline{n}$ une collection de degrés et de rangs qui vérifie l'inégalité* (3.9.1). *Pour tout diviseur D sur C de degré*

$$\deg(D)\geqslant 2g_C-2,$$

on a

$$|\mathcal{M}_{\underline{n},D}^{\underline{e},ss}(\mathbb{F}_q)|=q^{(n^2-\sum_{i=1}^r n_i^2)\deg(D)/2}\prod_{i=1}^r|\mathcal{M}_{n_i,D}^{e_i,ss}(\mathbb{F}_q)|.$$

Remarque 3.9.3. — Rappelons que $|\mathcal{M}_{n_i,D}^{e_i,ss}(\mathbb{F}_q)|$ ne dépend que de la classe de e_i modulo n_i (cf. remarque 3.8.1). La proposition nous dit en particulier que $|\mathcal{M}_{\underline{n},D}^{\underline{e},ss}(\mathbb{F}_q)|$ ne dépend que de des classes des e_i modulo n_i. Si $r>1$, à $\underline{n}$ fixé, il y a une infinité de $\underline{e}$ qui vérifient l'inégalité (3.9.1) ; on en déduit que $|\mathcal{M}_{n,D}^{e}(\mathbb{F}_q)|$ est infini si $n\geqslant 2$.

Démonstration. — Le cas $r=1$ est tautologique. Traitons le cas $r=2$. Il s'agit alors de compter, pour chaque paire de fibrés de Hitchin semi-stables $(\mathcal{F}_1,\theta_1)$ et $(\mathcal{F}_2,\theta_2)$ qui vérifient

$$\mu(\mathcal{F}_1)>\mu(\mathcal{F}_2),$$

le nombre de fibrés de Hitchin extension de $(\mathcal{F}_2, \theta_2)$ par $(\mathcal{F}_1, \theta_1)$ pondéré par l'inverse de l'ordre du groupe des automorphismes de chaque extension. On a donc, avec les notations de la remarque 3.9.5 ci-dessous,

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}_1, \theta_1) - \mu_{\max}(\mathcal{F}_2, \theta_2) = \mu(\mathcal{F}_1) - \mu(\mathcal{F}_2) > 0 \geqslant 2g_C - 2 - \deg(D).$$

L'hypothèse de l'assertion 3 du lemme 3.9.4 ci-dessous est donc vérifiée et la réponse attendue est bien celle de l'assertion 2 du même lemme. Observons que tout fibré de Hitchin $(\mathcal{F}, \theta)$ ainsi construit vérifie

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}, \theta) = \mu(\mathcal{F}_2).$$

De nouveau par le lemme 3.9.4, on peut compter les extensions d'un fibré de Hitchin semi-stable $(\mathcal{F}_3, \theta_3)$ de pente

$$\mu(\mathcal{F}_3) < \mu(\mathcal{F}_2)$$

par $(\mathcal{F}, \theta)$. On termine par récurrence. □

Lemme 3.9.4. — *Soit $(\mathcal{F}_1, \theta_1)$ et $(\mathcal{F}_2, \theta_2)$ deux fibrés de Hitchin. On note encore θ_1 et θ_2 les morphismes induits par θ_1 et θ_2*

$$R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \to R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1(D)).$$

Soit

$$R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\theta_1 - \theta_2} R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1(D)) \longrightarrow C \longrightarrow R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)[1].$$

un triangle distingué dans lequel s'insère le morphisme $\theta_1 - \theta_2$.

1. *L'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de $(\mathcal{F}_2, \theta_2)$ par $(\mathcal{F}_1, \theta_1)$ s'identifie à $H^1(C)$. Chaque extension a un groupe d'automorphismes qui s'identifie à $H^0(C)$.*
2. *Lorsqu'on a $H^2(C) = 0$, le groupoïde des extensions a pour cardinal*

$$q^{-\chi(C)} = q^{-\operatorname{rang}(\mathcal{F}_1)\operatorname{rang}(\mathcal{F}_2)\deg(D)}$$

où l'on introduit la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(C) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \dim(H^i(C))$.

3. *L'hypothèse $H^2(C) = 0$ est vérifiée dès qu'on a*

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}_1, \theta_1) - \mu_{\max}(\mathcal{F}_2, \theta_2) > 2g_C - 2 - \deg(D).$$

Remarque 3.9.5. — Pour tout fibré de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$, on note $\mu_{\max}(\mathcal{E}, \theta)$ la plus grande pente d'un sous-fibré vectoriel non nul de $\mathcal{E}$ qui est θ-invariant ; c'est encore la pente du premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de $(\mathcal{E}, \theta)$. De même, on note $\mu_{\min}(\mathcal{E}, \theta)$ la plus petite pente d'un quotient non nul $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ où $\mathcal{F}$ est un sous-fibré θ-invariant de $\mathcal{E}$. C'est aussi la pente du dernier quotient de la filtration de Harder-Narasimhan de $(\mathcal{E}, \theta)$.

Démonstration. — On laisse le 1 comme exercice au lecteur. Les complexes $R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$ et $R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1(D))$ n'ont de cohomologie qu'en degrés 0 et 1. Il s'ensuit que C n'a de cohomologie qu'en degrés 0, 1 et 2. La suite exacte longue de cohomologie se réduit à la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(C) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1(D)) \to \tag{3.9.2}$$

$$H^1(C) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \to \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1(D)) \to H^2(C) \to 0.$$

D'après l'assertion 1, le cardinal du groupoïde des extensions est le quotient

$$\frac{|H^1(C)|}{|H^0(C)|}.$$

Lorsque $H^2(C)=0$, ce rapport est bien $q^{-\chi(C)}$ puisque C s'identifie à un complexe nul en dehors des degrés 0, 1 et 2. Par ailleurs, en utilisant la suite (3.9.2) et la formule de Riemann-Roch, on obtient

$$\begin{aligned}\chi(C) &= \chi(R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1(D)))-\chi(R\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1))\\ &= \operatorname{rang}(\mathcal{F}_1)\operatorname{rang}(\mathcal{F}_2)\deg(D)\end{aligned}$$

La suite (3.9.2) montre qu'on a $H^2(C)=0$ si et seulement si le morphisme

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1)\to\operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_1(D))$$

est surjectif. Par dualité de Serre, cette condition est encore équivalente au fait que le morphisme induit par $\theta_1-\theta_2$

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_1(D),\mathcal{F}_2\otimes_{\mathcal{O}_C}\Omega^1_C)\to\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\otimes_{\mathcal{O}_C}\Omega^1_C) \tag{3.9.3}$$

est injectif. Soit $\phi\in\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_1(D),\mathcal{F}_2\otimes_{\mathcal{O}_C}\Omega^1_C)$ un élément non nul. Cet homomorphisme est dans le noyau du morphisme (3.9.3) si et seulement si on a

$$\theta_2\circ\phi=\phi\circ\theta_1.$$

Le noyau de ϕ est donc un sous-fibré θ_1-invariant propre de $\mathcal{F}_1(D)$ d'où

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}_1(D),\theta_1)\leqslant\mu(\mathcal{E}/\operatorname{Ker}(\phi))=\mu(coIm(\phi)).$$

De même, l'image de ϕ est un sous-fibré θ_2-invariant non nul de $\mathcal{F}_2$; on a donc

$$\mu(coIm(\phi))\leqslant\mu(Im(\phi))\leqslant\mu_{\max}(\mathcal{F}_2\otimes_{\mathcal{O}_C}\Omega^1_C,\theta_2).$$

En combinant les deux dernières inégalités, on obtient

$$\mu_{\min}(\mathcal{F}_1,\theta_1)+\deg(D)=\mu_{\min}(\mathcal{F}_1(D),\theta_1)\leqslant\mu_{\max}(\mathcal{F}_2\otimes_{\mathcal{O}_C}\Omega^1_C,\theta_2)=\mu_{\max}(\mathcal{F}_2,\theta_2)+2g_C-2$$

d'où l'assertion 3. □

3.10. Le lemme 2.4.2 a l'analogue suivant pour les fibrés de Hitchin. Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur C soit l'ensemble

$$\operatorname{Hom}^{ss}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))=\{\ \theta\in\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))\mid(\mathcal{E},\theta)\text{ est semi-stable}\}$$

Pour tout drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de $\mathcal{E}$, soit

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{F}_\bullet(D))$$

le sous-espace de $\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))$ formé des θ qui respectent le drapeau $\mathcal{F}_\bullet$.

Lemme 3.10.1. — *Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$,*

$$|\operatorname{Hom}^{ss}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))|=\sum_{\mathcal{F}_\bullet}(-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)-1}|\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{F}_\bullet(D))|$$

où l'on somme sur les drapeaux $\mathcal{F}_\bullet$ déstabilisants de $\mathcal{E}$.

Démonstration. — Le second membre se réécrit

$$\sum_{\theta\in\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))}\ \sum_{\{\mathcal{F}_\bullet\mid\theta\in\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{F}_\bullet(D))\}}(-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)-1}$$

où la somme intérieure est prise sur les drapeaux $\mathcal{F}_\bullet$ de sous-fibrés θ-invariants et déstabilisants. Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 2.4.2 (qui ne repose que sur l'existence et l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan) montre que pour fibré de Hitchin $(\mathcal{E},\theta)$, on a

$$\sum_{\{\mathcal{F}_\bullet\mid\theta\in\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet,\mathcal{F}_\bullet(D))\}}(-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)-1}=0$$

sauf si $(\mathcal{E}, \theta)$ est semi-stable auquel cas on trouve 1. $\square$

On déduit de (3.5.2) et du lemme 3.10.1 ci-dessus la formule suivante

$$|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\mathcal{E}} \frac{|\operatorname{Hom}^{ss}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D))|}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E})|} \tag{3.10.1}$$

$$= \sum_{\mathcal{E}} \sum_{\mathcal{F}_\bullet} (-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)-1} \frac{|\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}_\bullet(D))|}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E})|}, \tag{3.10.2}$$

où la somme sur $\mathcal{E}$ est prise sur les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels (de rang n et degré e) et celle sur $\mathcal{F}_\bullet$ sur les drapeaux déstabilisants de $\mathcal{E}$.

3.11. Fibrés de Hitchin et adèles. — On va étoffer le dictionnaire entrevu au § 2.6. Soit $g \in G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$. Cet élément correspond à un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ muni d'une trivialisation générique. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ détermine un endomorphisme de $\mathcal{E}$ en fibre générique. Pour que celui-ci se prolonge en un morphisme $\theta = \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D)$, il faut que X vérifie certaines conditions d'intégralité. Pour les formuler, on fixe pour tout $c \in |C|$ une uniformisante ϖ_c de l'anneau $\mathcal{O}_c$ et on pose

$$\varpi^{-D} = (\varpi_c^{-mult_c(D)})_{c \in |C|} \in \mathbb{A}^\times$$

où $mult_c(D)$ est la multiplicité du diviseur D en c. La condition que doit satisfaire X est la suivante

$$g^{-1}Xg \in \varpi^{-D}\mathfrak{g}(\mathcal{O}).$$

Elle ne dépend pas, comme il se doit, du choix des uniformisantes ϖ_c. On introduit alors la fonction $\mathbf{1}_D$ sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$ qui est la fonction caractéristique de $\varpi^{-D}\mathfrak{g}(\mathcal{O})$. De plus, pour tout sous-groupe parabolique standard $P \subset G$, soit $\mathfrak{p}$ son algèbre de Lie. On pose aussi

$$K_{P,D}(g) = \sum_{X \in \mathfrak{p}(F)} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg). \tag{3.11.1}$$

On complète alors le précédent tableau ainsi :

Fibrés vectoriels	Adèles
fibré $\mathcal{E}$ + trivialisation générique	$g \in G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$
$\theta \in \operatorname{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D))$	$X \in \mathfrak{g}(F)$ et $g^{-1}Xg \in \varpi^{-D}\mathfrak{g}(\mathcal{O})$
Drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de $\mathcal{E}$	$(P, \delta \in P(F)\backslash G(F))$
$\theta \in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}_\bullet(D))$	$X \in \delta^{-1}\mathfrak{p}(F)\delta$ et $g^{-1}Xg \in \varpi^{D}\mathfrak{g}(\mathcal{O})$
$\|\operatorname{Hom}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}_\bullet(D))\|$	$K_{P,D}(\delta g)$
$\|\operatorname{Hom}^{ss}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{F}_\bullet(D))\|$	$\sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g))K_{P,D}(\delta g)$

Il résulte alors de ce tableau et des égalités (3.10.1) et (3.10.2) qu'on a la formule intégrale suivante

$$|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g)) K_{P,D}(\delta g)\, dg$$

où, comme d'habitude, on somme sur les sous-groupes paraboliques P standard. Contrairement à l'intégrale (2.7.2), on ne peut pas intervertir l'intégrale et la somme sur P. Pour aller plus loin, on est conduit à introduire la notion de T-semi-stabilité.

4 Les fibrés de Hitchin T-semi-stables

4.1. La T-semi-stabilité. — Soit T un point de l'adhérence $\overline{a_B^+}$ de a_B^+ dans a_B. En prenant la base standard de $X^*(B) = X^*(T_0)$, on identifie a_B à $\mathbb{R}^n$. Ainsi T est un n-uplet $(T_1, T_2, \ldots, T_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $T_1 \geqslant T_2 \geqslant \ldots \geqslant T_n$.

On dit qu'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang n est T-semi-stable si pour tout sous-fibré $\mathcal{F}$ de rang r

$$0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$$

on a l'inégalité de pente

$$\mu(\mathcal{F}) - \frac{T_1 + \ldots + T_r}{r} \leqslant \mu(\mathcal{E}) - \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n}. \tag{4.1.1}$$

Remarque 4.1.1. — Cette définition est directement inspirée par les procédés de troncature d'Arthur dans ses travaux sur la formule des traces. On verra plus loin (cf. proposition 4.4.2) que la T-semi-stabilité de $\mathcal{E}$ consiste à majorer le polygone de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ par un polygone qui dépend de T (ce qui est le point de vue de [16]).

On définit de manière analogue la T-semi-stabilité d'un fibré de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$ de rang n (bien sûr, on n'impose la condition de pente qu'aux sous-fibrés de $\mathcal{E}$ qui sont globalement invariants par l'endomorphisme θ). Lorsque $T = 0$, on retrouve les notions usuelles de stabilité pour les fibrés vectoriels et les fibrés de Hitchin. La T-semi-stabilité définit des ouverts de type fini sur le corps de base, notés $Fib_n^{e,\leqslant T}$ et $\mathcal{M}_D^{\leqslant T}$, de Fib_n^e et $\mathcal{M}_D$.

Dans le cadre de la T-semi-stabilité, on a aussi l'existence et l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan qui s'énonce comme suit.

Théorème 4.1.2. — *Pour tout $\mathcal{E} \neq 0$, il existe une unique filtration de sous-fibrés*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E}$$

de rangs notés $n_i = \mathrm{rang}(\mathcal{F}_i)$ telle que

1. *pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, les quotients $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ sont $(T_{n_i+1}, \ldots, T_{n_{i+1}})$-semi-stables ;*
2. *Les T-pentes des quotients définis par*

$$\mu_T(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i) = \mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i) - \frac{T_{n_i+1} + \ldots + T_{n_{i+1}}}{n_{i+1} - n_i}$$

vont en décroissant strictement $\mu_T(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) > \mu_T(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) > \ldots$.

On peut alors généraliser les énoncés concernant la semi-stabilité à la T-semi-stabilité. Pour tout sous-groupe parabolique standard P, soit T_P la projection de T sur a_P suivant la décomposition(2.5.1). On pose pour $g \in G(\mathbb{A})$

$$F^P(g, T) = \sum_{B \subset Q \subset P} (-1)^{\dim(a_P^Q)} \sum_{\delta \in Q(F)\backslash P(F)} \hat{\tau}_Q(H_Q(\delta g) - T_Q),$$

où la somme est prise sur les sous-groupes paraboliques standard Q. On obtient une fonction sur $P(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$. Lorsque $P = G$, cette fonction est la fonction caractéristique des $g \in G(\mathbb{A})$ tels que le fibré associé $\mathcal{E}_g$ est T-semi-stable. Pour un sous-groupe P quelconque, cette fonction est la fonction caractéristique des $g \in G(\mathbb{A})$ tels que le drapeau $\mathcal{F}^\bullet$ de $\mathcal{E}_g$ défini par P a ses quotients $(T_{n_i+1}, \dots, T_{n_{i+1}})$-semi-stables (les entiers n_i sont les rangs des quotients). L'égalité suivante

$$\sum_{B \subset P \subset G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} F^P(\delta g, T)\tau_P(H_P(\delta g) - T_P) = 1$$

exprime l'existence et l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan pour la T-stabilité du fibré vectoriel associé à g. Enfin, pour $g \in G(\mathbb{A})$ et $\mathcal{E}$ le fibré vectoriel associé, l'expression

$$K_D^T(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) K_{P,D}(\delta g). \tag{4.1.2}$$

calcule le nombre d'homomorphismes $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D)$ tels que le couple $(\mathcal{E}, \theta)$ soit un fibré de Hitchin T-semi-stable. On a en particulier la formule intégrale suivante :

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K_D^T(g)\, dg. \tag{4.1.3}$$

4.2. Quelques lemmes sur la T-semi-stabilité. — Les lemmes suivants nous seront utiles par la suite.

Lemme 4.2.1. — *Supposons qu'on ait pour tout $1 \leqslant i < n$*

$$T_i - T_{i+1} \geqslant \max(0, 2g_C - 2). \tag{4.2.1}$$

Alors la filtration de Harder-Narasimhan pour la T-semi-stabilité est scindée.

Démonstration. — Avec les notations du théorème 4.1.2, le fibré $\mathcal{E}$ se retrouve extension de $\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}$ par $\mathcal{F}_{r-1}$. Si cette extension n'était pas scindée, sa classe dans $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{F}_{r-1})$ ne serait pas nulle. Par dualité de Serre, on obtiendrait un élément non nul

$$\phi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_{r-1}, \mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1} \otimes_{\mathcal{O}_C} \Omega_C^1).$$

Soit $s \geqslant 1$ le rang de ϕ. La co-image de ϕ est un quotient de $\mathcal{F}_{r-1}$ et, à ce titre, vérifie l'inégalité

$$\mu_T(\mathcal{F}_{r-1}/\mathcal{F}_{r-2}) \leqslant \mu(coIm(\phi)) - \frac{T_{n_{r-1}-s+1} + \dots + T_{n_{r-1}}}{s}.$$

Comme le quotient $\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1} \otimes_{\mathcal{O}_C} \Omega_C^1$ est $(T_{n_{r-1}}, \dots, T_{n_r})$-semi-stable, on a

$$\mu(Im(\phi)) - \frac{T_{n_{r-1}+1} + \dots + T_{n_{r-1}+s}}{s} \leqslant \mu_T(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}) + 2g_C - 2.$$

Ces deux inégalités impliquent

$$\mu_T(\mathcal{F}_{r-1}/\mathcal{F}_{r-2}) + \frac{T_{n_{r-1}-s+1} + \dots + T_{n_{r-1}}}{s} \leqslant \mu_T(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}) + 2g_C - 2 + \frac{T_{n_{r-1}+1} + \dots + T_{n_{r-1}+s}}{s}.$$

Or $\mu_T(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1}) < \mu_T(\mathcal{F}_{r-1}/\mathcal{F}_{r-2})$, on a donc

$$(T_{n_{r-1}-s+1} + \dots + T_{n_{r-1}}) - (T_{n_{r-1}+1} + \dots + T_{n_{r-1}+s}) < s(2g_C - 2)$$

ce qui contredit l'hypothèse (4.2.1). □

Lemme 4.2.2. — *Supposons qu'on ait pour tout $1 \leqslant i < n$*

$$T_i - T_{i+1} \geqslant \max(0, \deg(D)). \tag{4.2.2}$$

Soit $(\mathcal{E},\theta)$ un fibré de Hitchin. La filtration de Harder-Narasimhan pour la T-semi-stabilité du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ est nécessairement invariante par θ. En particulier, $(\mathcal{E},\theta)$ est un fibré de Hitchin T-semi-stable si et seulement si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel T-semi-stable.

Démonstration. — On reprend les notations du théorème 4.1.2. Montrons que le sous-fibré $\mathcal{F}_{r-1}$ de $\mathcal{F}_r = \mathcal{E}$ est stable par θ. Il s'agit de montrer que θ induit un élément nul de

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{r-1}, (\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1})(D)).$$

Le même calcul que dans la preuve du lemme 4.2.1 montre que si cet élément n'est pas nul on a l'inégalité

$$(T_{n_{r-1}-s+1} + \ldots + T_{n_{r-1}}) - (T_{n_{r-1}+1} + \ldots + T_{n_{r-1}+s}) < s\deg(D)$$

pour un entier s qui est le rang du morphisme induit par θ. Celle-ci contredit (4.2.2). Le lemme s'ensuit par récurrence. □

Lemme 4.2.3. — *Supposons qu'on ait pour tout $1 \leqslant i < n$*

$$T_i - T_{i+1} \geqslant \max(0, \deg(D), 2g_C - 2, 2g_C - 2 - \deg(D)). \tag{4.2.3}$$

Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de Hitchin, $\mathcal{F}_\bullet$ sa filtration de Harder-Narasimhan pour la T-semi-stabilité. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, soit $\mathcal{G}_i$ le quotient $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ et $n_i = \mathrm{rang}(\mathcal{G}_i)$. Alors $|\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))|$ est le produit des trois facteurs suivants

1. $\prod_{1\leqslant i\leqslant r} |\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_i(D))|$;
2. $q^{(n^2-\sum_{i=1}^r n_i^2)(1-g_C+\deg(D))/2}$ *où* $n = \mathrm{rang}(\mathcal{E})$;
3. $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant r} q^{n_i\deg(\mathcal{G}_j)-n_j\deg(\mathcal{G}_i)}$.

Démonstration. — D'après le lemme 4.2.2, tout homomorphisme $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D)$ préserve la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ pour la T-semi-stabilité. D'après le lemme 4.2.1, la filtration de Harder-Narasimhan est scindée. On a donc

$$|\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))| = \prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant r} |\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j(D))|$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on note $\mathcal{G}_i$ le quotient $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$. On va montrer qu'on a pour $j < i$

$$|\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j(D))| = q^{n_in_j(1-g_C+\deg(D))+n_i\deg(\mathcal{G}_j)-n_j\deg(\mathcal{G}_i)}$$

ce qui donne le résultat. Par la formule de Riemann-Roch, il suffit de montrer qu'on a

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j(D)) = 0$$

ou encore par dualité de Serre

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_j(D), \mathcal{G}_i \otimes_{\mathcal{O}_D} \Omega^1_C) = 0.$$

Or l'existence d'un homomorphisme de rang $s \geqslant 1$ dans cet espace implique, par le même raisonnement que dans les preuves des lemmes 4.2.1 et 4.2.2, l'inégalité

$$(T_{n_j-s+1} + \ldots + T_{n_j}) - (T_{n_{i-1}+1} + \ldots + T_{n_{i-1}+s}) < s(2g_C - 2 - \deg(D))$$

qui contredit (4.2.3). □

4.3. Exemple de calcul. — On retourne au cas étudié au § 3.6. Soit $T = (t,-t)$ un paramètre de stabilité avec $t \geqslant 0$ *entier*. Pour $a \geqslant 1$, un fibré vectoriel $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a)$ est T-instable seulement s'il existe un sous-fibré en droites $\mathcal{L}$ qui vérifie

$$\deg(\mathcal{L}) > \frac{1}{2} + t$$

c'est-à-dire $\deg(\mathcal{L}) \geqslant 1 + t$. En particulier, $\deg(\mathcal{L}) \geqslant 1$. Or un sous-fibré en droites de degré $\geqslant 1$ de $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a)$ est nécessairement inclus dans le facteur $\mathcal{O}(a)$ donc égal à $\mathcal{O}(a)$. Pour un fibré de Hitchin $(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a), \theta)$ relatif à un diviseur D de degré $2d$, on a les cas suivants :

1. $a \leqslant t$, le fibré vectoriel $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a)$ est T-semi-stable donc *a fortiori* le fibré de Hitchin considéré ;
2. $a > t$ et $\theta(\mathcal{O}(a) \oplus (0)) \subset \mathcal{O}(a+2d) \oplus (0)$, le fibré de Hitchin est T-instable ;
3. $a > t$ mais $\theta(\mathcal{O}(a) \oplus (0)) \not\subset \mathcal{O}(a+2d) \oplus (0)$, le fibré de Hitchin est T-semi-stable.

On se propose d'expliciter $|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ dans le cas où le diviseur D est de degré $2d \geqslant -2$. Pour le calcul, on utilise la formule suivante (qui généralise (3.10.1))

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\mathcal{E}} \frac{|\operatorname{Hom}^{\leqslant T}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D))|}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{E})|}$$

où $\mathcal{E}$ parcourt les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang 2 et degré 1 et $|\operatorname{Hom}^{\leqslant T}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D))|$ est le nombre d'endomorphismes θ tels que $(\mathcal{E}, \theta)$ est T-semi-stable.

Considérons d'abord le cas $\deg(D) = -2$. Il s'agit de compter les couples $(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a), \theta)$ T-stables où $a \geqslant 1$ et θ appartient à l'espace

$$\begin{pmatrix} 0 & H^0(C, \mathcal{O}(2a-3)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le cas 3 ci-dessus n'apparaît donc pas. La condition de T-semi-stabilité du fibré de Hitchin est équivalente à l'inégalité $a \leqslant t$. En tenant compte du calcul du groupe d'automorphismes effectué au §3.6, on trouve

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = t\frac{1}{q^2(q-1)^2}. \tag{4.3.1}$$

Passons ensuite au cas $\deg(D) = 2d \geqslant 0$. On compte les couples T-stables de la forme $(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(1-a), \theta)$ pour $a \geqslant 1$ où θ appartient à l'espace

$$\begin{pmatrix} H^0(C, \mathcal{O}(2d)) & H^0(C, \mathcal{O}(2(a+d)-1)) \\ H^0(C, \mathcal{O}(1-2(a-d))) & H^0(C, \mathcal{O}(2d)) \end{pmatrix}.$$

Pour $a \leqslant d$, on a T-semi-stabilité si l'on est dans les cas 1 et 3 ci-dessus donc si $a \leqslant t$ ou si $a > t$ mais la matrice de θ n'est pas triangulaire supérieure. Pour $a > d$, la matrice de θ est nécessairement triangulaire supérieure. Donc la T-semi-stabilité du fibré de Hitchin équivaut à $a \leqslant t$.

Supposons tout d'abord $t < d$. La T-semi-stabilité impose donc $a \leqslant d$. En distinguant $a \leqslant t$ (cas 1) et $a > t$ (cas 3), on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| &= \sum_{a=1}^{t} \frac{q^{8d+4}}{(q-1)^2 q^{2a}} + \sum_{a=t+1}^{d} \frac{q^{6d+2a+2}(q^{2+2d-2a}-1)}{(q-1)^2 q^{2a}} \\
&= \sum_{a=1}^{d} \frac{q^{8d+4}}{(q-1)^2 q^{2a}} + (t-d)\frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2} \\
&= \frac{q^{8d+4}(1-q^{-2d})}{(q-1)^2(q^2-1)} - \frac{dq^{6d+2}(q^2-1)}{(q-1)^2(q^2-1)} + t\frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2} \\
&= \frac{1}{(q-1)^2(q^2-1)} \cdot (q^{8d+4} - q^{6d+2}((d+1)q^2-d)) + t\frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2}.
\end{aligned}$$

Traitons ensuite $t \geqslant d$. Les fibrés obtenus pour $a \leqslant d$ sont tous T-semi-stables (cas 1). Les autres fibrés T-semi-stables sont obtenus pour $d < a \leqslant t$ (le cas 3 n'apparaît pas). On trouve de même

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| &= \sum_{a=1}^{d} \frac{q^{8d+4}}{(q-1)^2 q^{2a}} + \sum_{a=d+1}^{t} \frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2} \\ &= \sum_{a=1}^{d} \frac{q^{8d+4}}{(q-1)^2 q^{2a}} + (t-d)\frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

On a donc pour tout $t \geqslant 0$ et D de degré $2d \geqslant 0$,

(4.3.2) $$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{(q-1)^2(q^2-1)} \cdot (q^{8d+4} - q^{6d+2}((d+1)q^2 - d)) + t\frac{q^{6d+2}}{(q-1)^2}$$

On remarque que la réponse est affine en le paramètre t. On va voir que plus généralement le comptage est quasi-polynomial en le paramètre de troncature (sous certaines conditions sur D et T).

4.4. La T-semi-stabilité et les polygones de Harder-Narasimhan. — Dans ce paragraphe, on montre que la condition de T-semi-stabilité exprime que le polygone de Harder-Narasimhan est majoré par un polygone attaché à T. La discussion s'applique tout autant aux fibrés vectoriels qu'aux fibrés de Hitchin. Pour alléger les notations, nous ne formulons les énoncés que dans le premier cas. L'entier n désigne le rang des fibrés considérés. Par polygone, on entend une application continue

$$p : [0; n] \to \mathbb{R},$$

affine par morceaux sur les intervalles $[i, i+1]$, pour $0 \leqslant i < n$, et telle que $p(0) = p(1) = 0$. À un point $T = (T_1, \ldots, T_n) \in a_B$, on associe l'unique polygone p_T qui vérifie pour $1 \leqslant i \leqslant n$

(4.4.1) $$p_T(i) = i(\frac{T_1 + \ldots + T_i}{i} - \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n}).$$

Entre les points i et $i+1$, la fonction p_T est affine de pente

$$p_T(i+1) - p_T(i) = T_{i+1} - \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n}.$$

Lorsque, de plus, T appartient à $\overline{a_B^+}$, on a $T_1 \geqslant \ldots \geqslant T_n$; les pentes de p_T vont alors en décroissant et le polygone p_T est *concave.*

Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang n. À tout drapeau $\mathcal{F}_\bullet$

$$0 = \mathcal{F}_0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{F}_r = \mathcal{E},$$

on associe le polygone $p_{\mathcal{F}_\bullet}$ défini par les deux conditions

- $p_{\mathcal{F}_\bullet}(\mathrm{rang}(\mathcal{F}_i)) = \mathrm{rang}(\mathcal{F}_i)(\mu(\mathcal{F}_i) - \mu(\mathcal{E}))$ pour $0 < i \leqslant r$;
- $p_{\mathcal{F}_\bullet}$ est affine sur l'intervalle $[\mathrm{rang}(\mathcal{F}_i); \mathrm{rang}(\mathcal{F}_{i+1}]$ pour $0 \leqslant i < r$.

Les pentes des morceaux affines sont données par

$$\frac{p_{\mathcal{F}_\bullet}(\mathrm{rang}(\mathcal{F}_{i+1})) - p_{\mathcal{F}_\bullet}(\mathrm{rang}(\mathcal{F}_i))}{\mathrm{rang}(\mathcal{F}_{i+1}) - \mathrm{rang}(\mathcal{F}_i)} = \mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i) - \mu(\mathcal{E})$$

On définit le *polygone de Harder-Narasimhan* de $\mathcal{E}$ comme le polygone

$$p_{\mathcal{E}} = p_{\mathcal{F}_\bullet}$$

du drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ (cf. théorème 2.4.1). De nouveau, il s'agit d'un polygone concave. Le lemme suivant est bien connu. Pour la commodité du lecteur, on en donne une démonstration.

Lemme 4.4.1. — *Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré non nul de $\mathcal{E}$. Le point de coordonnées*

$$(\mathrm{rang}(\mathcal{F}), \mathrm{rang}(\mathcal{F})(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E}))$$

se trouve sous le graphe de $p_{\mathcal{E}}$, autrement dit on a l'inégalité

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F})(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E})) \leqslant p_{\mathcal{E}}(\mathrm{rang}(\mathcal{F})).$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}_\bullet$ le drapeau de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$. Soit i tel que $\mathrm{rang}(\mathcal{F}_i) \leqslant \mathrm{rang}(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{rang}(\mathcal{F}_{i+1})$. Pour alléger les notations, on pose $r = \mathrm{rang}(\mathcal{F})$ et $r_i = \mathrm{rang}(\mathcal{F}_i)$.

$$p_{\mathcal{E}}(\mathrm{rang}(\mathcal{F})) = r_i(\mu(\mathcal{F}_i) - \mu(\mathcal{E})) + (r - r_i)(\mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i) - \mu(\mathcal{E})).$$

L'inégalité à prouver est alors équivalente à

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \frac{r_i\mu(\mathcal{F}_i) + (r - r_i)\mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i)}{r}. \tag{4.4.2}$$

Montrons d'abord qu'il suffit de prouver le résultat pour un sous-fibré contenant le premier cran $\mathcal{F}_1$ de la filtration de Harder-Narasimhan. Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{G}$ le saturé dans $\mathcal{E}$ de la somme $\mathcal{F} + \mathcal{F}_1$. On suppose que le fibré $\mathcal{G}$, qui contient $\mathcal{F}_1$, vérifie l'inégalité cherchée. On a

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \mu(\mathcal{F}_1) \leqslant \mu((\mathcal{F}_1/(\mathcal{F}_1) \cap \mathcal{F})) = \mu((\mathcal{F} + \mathcal{F}_1)/\mathcal{F})$$

puisque $\mathcal{F}_1$ est à la fois semi-stable et de pente maximale parmi les sous-fibrés de $\mathcal{E}$. On déduit de l'inégalité entre les extrêmes l'inégalité

$$\mu(\mathcal{F}) \leqslant \mu(\mathcal{F} + \mathcal{F}_1) \leqslant \mu(\mathcal{G}).$$

Il s'ensuit que le point $(r, r(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E}))$ est en-dessous du point $(r, r(\mu(\mathcal{G}) - \mu(\mathcal{E}))$. Ce dernier est visiblement sur le segment qui relie $(0, 0)$ à $(\mathrm{rang}(\mathcal{G}), \mathrm{rang}(\mathcal{G})(\mu(\mathcal{G}) - \mu(\mathcal{E}))$. Cela conclut car les sommets de ce segment, donc aussi le segment lui-même par concavité de $p_{\mathcal{E}}$, sont en-dessous de $p_{\mathcal{E}}$.

Supposons désormais $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Par récurrence sur le rang de $\mathcal{E}$, on peut supposer l'inégalité (4.4.2) connue pour tout sous-fibré de $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$. La filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$ est donnée par $0 \subsetneq \mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 \subsetneq \mathcal{F}_3/\mathcal{F}_2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{E}/\mathcal{F}_1$. On a donc

$$(r - r_1)\mu(\mathcal{F}/\mathcal{F}_1) \leqslant (r_i - r_1)\mu(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_1) + (r - r_i)\mu(\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i)$$

ce qui, combiné avec l'égalité

$$r\mu(\mathcal{F}) = r_1\mu(\mathcal{F}_1) + (r - r_1)\mu(\mathcal{F}/\mathcal{F}_1)$$

donne (4.4.2).

□

Proposition 4.4.2. — *Pour tout $T \in \overline{\mathfrak{a}_B^+}$, le fibré vectoriel vectoriel $\mathcal{E}$ est T-semi-stable si et seulement si on a*

$$p_{\mathcal{E}} \leqslant p_T.$$

Démonstration. — Observons tout d'abord qu'un sous-fibré non nul $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifie l'inégalité de pente (4.1.1) si et seulement si le point de coordonnées $(\mathrm{rang}(\mathcal{F}), \mathrm{rang}(\mathcal{F})(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E}))$ se trouve sous le graphe de p_T. En effet, ce point est dans cette position si et seulement si on a

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F})(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E}) \leqslant \mathrm{rang}(\mathcal{F})(\frac{T_1 + \ldots + T_{\mathrm{rang}(\mathcal{F})}}{\mathrm{rang}(\mathcal{F})} - \frac{T_1 + \ldots + T_n}{n})$$

qui est bien équivalente à l'inégalité (4.1.1).

La condition est nécessaire. Soit $\mathcal{F}_\bullet$ le drapeau de Harder-Narasimhan d'un fibré $\mathcal{E}$ qui est T-semi-stable. Les sous-fibrés $\mathcal{F}_i$ vérifient tous l'inégalité de pente (4.1.1). Donc les sommets du polygone $p_\mathcal{E}$ sont tous sous le graphe de p_T (par l'observation précédente). Comme le polygone p_T est concave, on a bien $p_\mathcal{E} \leqslant p_T$.

Réciproquement, supposons qu'on a $p_\mathcal{E} \leqslant p_T$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{F}$ vérifie l'inégalité de pente (4.1.1). Par l'observation ci-dessus, il faut montrer que le point $(\mathrm{rang}(\mathcal{F}), \mathrm{rang}(\mathcal{F})(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E}))$ se trouve sous le graphe de p_T. D'après le lemme 4.4.1, il se trouve déjà sous le graphe de $p_\mathcal{E}$. L'inégalité $p_\mathcal{E} \leqslant p_T$ permet donc de conclure. □

4.5. Comptage des polygones de Harder-Narasimhan. — Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang n sur la courbe C muni d'une trivialisation générique et $\mathcal{F}_\bullet$ sa filtration de Harder-Narasimhan. On suppose que le sous-groupe parabolique de $G \times_{\mathbb{F}_q} F$ déterminé par $\mathcal{F}_\bullet$ est conjugué à P par un élément noté $\delta \in P(F)\backslash G(F)$. On en déduit un vecteur $H = H_P(\delta g) \in \mathfrak{a}_P$. Avec les identifications du §2.5, ce vecteur n'est autre que

$$H = (\deg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0), \deg(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1), \ldots, \deg(\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_{r-1})).$$

Il vérifie nécessairement l'inégalité suivante

$$\langle \alpha, H \rangle > 0$$

pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^P$, qui exprime que les pentes des quotients vont en décroissant. Soit $T \in \overline{a_B^+}$. Par la proposition 4.4.2, le fibré $\mathcal{E}$ est T-semi-stable si et seulement le polygone p_H associé à H (vu comme élément de a_B, cf. (4.4.1)) vérifie $p_H \leqslant p_T$ ou, de manière équivalente, si H vérifie les inégalités

$$\langle \varpi, H \rangle \leqslant \langle \varpi, T \rangle$$

pour tout poids $\varpi \in \hat{\Delta}_P$.

Ces conditions nous poussent à introduire la fonction de la variable $H \in a_P$

$$\Gamma_P(H, T) \tag{4.5.1}$$

qui est la fonction caractéristique des $H \in a_P$ qui vérifient
- $\langle \alpha, H \rangle > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^P$;
- $\langle \varpi, H \rangle \leqslant \langle \varpi, T \rangle$ pour tout poids $\varpi \in \hat{\Delta}_P$.

Remarques 4.5.1. — Lorsque $P = G$, on a $\Gamma_G(\cdot, T)$ est la fonction constante égale à 1. Si $T = 0$, le polygone p_0 est un segment. Il est en de même de tout polygone concave en-dessous de p_0. On a donc nécessairement $\Gamma_P(\cdot, 0) = 0$ pour $P \subsetneq G$.

La fonction $\Gamma_P(H, T)$ de la variable $H \in a_P$ ne dépend que la projection de H sur a_P^G. Restreinte à a_P^G, c'est une fonction à support compact.

Suivant Arthur (cf. [2] p.13), on pose, pour tous H et T dans a_B,

$$\Gamma'_P(H, T) = \sum_{P \subset Q \subset G} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \tau_P^Q(H) \hat{\tau}_Q(H - T) \tag{4.5.2}$$

où la somme porte sur les sous-groupes paraboliques Q de G. Cette fonction ne dépend que des projections sur a_P de H et T.

Le lemme suivant identifie les fonctions $\Gamma_P(\cdot, T)$ et $\Gamma'_P(\cdot, T)$ pour $T \in \overline{a_B^+}$.

Lemme 4.5.2. — *Pour tout $H \in a_P$ et tout $T \in \overline{a_B^+}$, on a l'égalité*

$$\Gamma_P(H, T) = \Gamma'_P(H, T).$$

Démonstration. — Soit $H \in a_P$ et $T \in \overline{a_B^+}$. D'après la définition (4.5.2), il s'agit de prouver qu'on a

$$\Gamma_P(H,T) = \sum_{P \subset Q \subset G} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \tau_P^Q(H) \hat{\tau}_Q(H-T).$$

Soit P_1 et P_2 les sous-groupes paraboliques de G contenant P définis par
– $\hat{\Delta}_{P_1} = \{\varpi \in \hat{\Delta}_P \mid \langle \varpi, H \rangle > \langle \varpi, T \rangle\}$;
– $\Delta^{P_2} = \Delta^P \cup \{\alpha \in \Delta - \Delta^P \mid \langle \alpha, H \rangle > 0\}$.

Il est clair qu'on a $\Gamma_P(H,T) = 1$ si et seulement si $P_1 = P_2 = G$. Par ailleurs, la somme dans le membre de droite se réduit à

$$\sum_{P_1 \subset Q \subset P_2} (-1)^{\dim(a_Q^G)}$$

qui est nulle sauf si $P_1 = P_2$. Pour conclure, il suffit de prouver que l'égalité $P_1 = P_2$ se produit si ett seulement si $P_1 = P_2 = G$.

Supposons qu'on ait $P_1 = P_2 \subsetneq G$. On va montrer qu'on aboutit à une contradiction. Soit Q le sous-groupe parabolique de G contenant strictement P définit par

$$\Delta^Q - \Delta^P = \Delta - \Delta^{P_2}.$$

Autrement dit, $\Delta^Q - \Delta_P$ est exactement l'ensemble des $\alpha \in \Delta - \Delta^P$ tels que

1. $\langle \alpha, H \rangle \leqslant 0$;
2. $\langle \varpi_\alpha, H - T \rangle > 0$.

Quitte à remplacer H par son projeté sur a_P^G, on peut et on va supposer qu'on a $H \in a_P^G$. On a alors

$$H = \sum_{\alpha \in \Delta - \Delta^P} \langle \varpi_\alpha, H \rangle \alpha_P^\vee$$

où $\alpha_P^\vee$ est la projection sur a_P^G de $\alpha^\vee$. Soit $\lambda \in a_P^*$ un vecteur tel que, pour tout $\alpha \in \Delta - \Delta^P$, on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$ si et seulement si $\alpha \in \Delta^Q$. La condition 2 ci-dessus implique qu'on a

$$\langle \lambda, H \rangle > \sum_{\alpha \in \Delta - \Delta^P} \langle \varpi_\alpha, T \rangle \langle \lambda, \alpha_P^\vee \rangle = \langle \lambda, T \rangle. \tag{4.5.3}$$

Prenons pour vecteur λ la demi-somme des racines de T_0 dans $M_Q \cap N_P$ qu'on note ρ_P^Q. On peut vérifier que c'est un vecteur de a_P^* qui vérifie les propriétés voulues. De plus, ρ_P^Q est clairement une combinaison linéaire à coefficients positifs de projetés sur a_P^* d'éléments de $\Delta^Q - \Delta^P$. On déduit de la condition 1 qu'on a

$$0 \geqslant \langle \rho_P^Q, H \rangle.$$

Par ailleurs, comme $T \in \overline{a_B^+}$, on a

$$\langle \rho_P^Q, T \rangle \geqslant 0$$

ce qui contredit manifestement (4.5.3) pour $\lambda = \rho_P^Q$. □

Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. Pour toute partie discrète $\mathfrak{h} \subset a_P$ telle que le composé $\mathfrak{h} \to a_P \to a_P^G$ est injectif, on forme la série de Fourier

$$\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}}(\lambda, T) = \sum_{H \in \mathfrak{h}} \Gamma_P(H,T) q^{-\langle \lambda, H \rangle}$$

où $\lambda \in a_P^*$. En vertu de la compacité du support de la restriction de $\Gamma_P(\cdot, T)$ à a_P (cf. remarques 4.5.1), la somme est à support finie et la fonction $\lambda \mapsto \hat{\Gamma}_P(\lambda, T)$ est une combinaison linéaire de fonctions $\lambda \mapsto q^{\langle \lambda, H \rangle}$.

Définition 4.5.3. — Soit

$$\Phi : \mathfrak{a}_B \to \mathbb{C}$$

une application. On dit que cette application est *quasi-polynomiale* s'il existe un ensemble fini

$$\mathfrak{f} \subset \frac{2\pi i}{\log(q)} X^*(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

et pour tout $\nu \in \mathfrak{f}$ un polynôme p_ν tels que pour tout $T \in \mathfrak{a}_B$ on ait l'égalité

$$\Phi(T) = \sum_{\nu \in \mathfrak{f}} p_\nu(T) q^{\langle \nu, T \rangle}.$$

Exemple 4.5.4. — Soit $\alpha \in X^*(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Soit $[\cdot]$ la fonction partie entière. Alors les fonctions $\lambda \in \mathfrak{a}_B \mapsto \exp(2\pi i [\langle \alpha, \lambda \rangle])$ et, pour tout polynôme P, $\lambda \in \mathfrak{a}_B \mapsto P([\langle \alpha, \lambda \rangle])$ sont quasi-polynomiales.

Proposition 4.5.5. — *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G dont on identifie le facteur de Levi standard à $GL(n_1) \times \ldots \times GL(n_r)$. On fixe un degré $e \in \mathbb{Z}$ et des éléments $e_i \in \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. On associe à ces données l'ensemble $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}_P \simeq \mathbb{Z}^r$ défini par*

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^e_{(e_i)} = \{(d_1, \ldots, d_r) \in \mathbb{Z}^r \mid d_1 + \ldots + d_r = e \text{ et } d_i \equiv e_i \mod n_i\}.$$

L'application

$$T \in \overline{a_B^+} \mapsto \hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}}(0, T)$$

est la restriction à $\overline{a_B^+} \cap \mathfrak{a}_B$ d'une fonction quasi-polynomiale sur $\mathfrak{a}_B$.

Démonstration. — Soit

$$\mathfrak{h}' = \{\frac{1}{r}(d_1, \ldots, d_r) \mid (d_1, \ldots, d_r)\mathbb{Z}^r \text{ et } d_1 + \ldots + d_r = 0\}.$$

et

$$\mathfrak{h}'' = \{(d_1, \ldots, d_r) \mid d_i \in n_i\mathbb{Z} \mid d_1 + \ldots + d_r = 0\}.$$

On a $\mathfrak{h}'' \subset \mathfrak{h}'$ et ce sont deux réseaux de a_P^G. La projection de $\mathfrak{h}$ sur a_P^G identifie $\mathfrak{h}$ à un sous-ensemble de $\mathfrak{h}'$, encore noté $\mathfrak{h}$, qui est en fait un $\mathfrak{h}''$-torseur. Comme la fonction $\hat{\Gamma}_P(H, T)$ ne dépend que la projection de H sur a_P^G, on peut bien remplacer $\mathfrak{h}$ par son projeté.

On a un morphisme injectif évident

$$\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}'' \to \mathbb{Z}/rn_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/rn_r\mathbb{Z}$$

qui identifie la classe $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}''$ à la fibre de la classe de $(re_1 - e, \ldots, re_r - e)$. Par conséquent, par une formule d'inversion de Fourier sur le quotient fini $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}''$, on voit qu'il suffit de prouver le résultat pour toute fonction $\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}'}(\mu, T)$, où $\mu \in \frac{2\pi i}{\log q} X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

De même, comme le réseau $\mathfrak{h}'$ est inclus dans le réseau

$$\mathfrak{h}_P = \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_r} \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee),$$

il suffit de prouver le résultat pour toute fonction $\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}_P}(\mu, T)$, où $\mu \in \frac{2\pi i}{\log q} X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Soit m_1 et m_2 des entiers tels que pour tout sous-groupe parabolique Q de G contenant P, on ait

$$\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee) \subset \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^{Q,\vee}) \oplus \frac{1}{m_1} \mathbb{Z}(\Delta_Q^\vee) \subset \frac{1}{m_2} \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee). \tag{4.5.4}$$

On va calculer la série de Fourier suivante $\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}_P}(\lambda, T)$ pour $\lambda \in X^*(P) \otimes \mathbb{C}$ dont la composante sur $X^*(P) \otimes \mathbb{R}$ appartient à a_P^+. Pour cela, on utilise le lemme 4.5.2. On commence par calculer, pour tout sous-groupe parabolique Q de G contenant P, la série

$$\sum_{H \in \mathfrak{h}_P} \tau_P^Q(H) \hat{\tau}_Q(H - T) q^{-\langle \lambda, H \rangle} = \sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)} \tau_P^Q(H) \hat{\tau}_Q(H - T') q^{-\langle \lambda', H \rangle}, \tag{4.5.5}$$

où l'on pose $T' = n_1 n_2 \dots n_r T$ et $\lambda' = \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_r}\lambda$. On fixe un ensemble fini $\mathfrak{f} \subset \frac{2\pi i}{\log q} X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que l'application

$$H \in \frac{1}{m_2}\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee) \mapsto \frac{1}{|\mathfrak{f}|}\sum_{\nu \in \mathfrak{f}} q^{-\langle \nu, H\rangle}$$

soit la fonction caractéristique de $\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^\vee)$. La série (4.5.5) s'écrit alors

$$\text{(4.5.6)} \qquad \frac{1}{|\mathfrak{f}|}\sum_{\nu\in\mathfrak{f}} \sum_{H \in \mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^{Q,\vee}) \oplus \frac{1}{m_1}\mathbb{Z}(\Delta_Q^\vee)} \tau_P^Q(H)\hat{\tau}_Q(H - T') q^{-\langle \lambda' + \nu, H\rangle}.$$

Pour $\nu \in \mathfrak{f}$, la série intérieure est géométrique et a pour somme

$$\prod_{\alpha \in \Delta_P^Q} \frac{q^{-\langle \lambda'+\nu, \varpi_\alpha^\vee\rangle}}{1 - q^{-\langle \lambda'+\nu, \varpi_\alpha^\vee\rangle}} \prod_{\alpha\in\Delta_Q} \frac{q^{-([\langle \varpi_\alpha, m_1 T'\rangle]+1)\langle \frac{\lambda'+\nu}{m_1}, \alpha^\vee\rangle}}{1 - q^{-\langle \frac{\lambda'+\nu}{m_1}, \alpha^\vee\rangle}},$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. On obtient donc l'égalité
(4.5.7)

$$\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}_P}(\lambda, T) = \frac{1}{|\mathfrak{f}|}\sum_{\nu\in\mathfrak{f}}\sum_{P\subset Q\subset G} (-1)^{\dim(a_Q^G)} \prod_{\alpha\in\Delta_P^Q} \frac{q^{-\langle\lambda'+\nu,\varpi_\alpha^\vee\rangle}}{1-q^{-\langle\lambda'+\nu,\varpi_\alpha^\vee\rangle}} \prod_{\alpha\in\Delta_Q} \frac{q^{-(\langle\varpi_\alpha, m_1 T'\rangle+1)\langle\frac{\lambda'+\nu}{m_1},\alpha^\vee\rangle}}{1-q^{-\langle\frac{\lambda'+\nu}{m_1},\alpha^\vee\rangle}}$$

pour $\lambda \in X^*(P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ dont la partie réelle appartient à a_P^+. Comme le membre de gauche est holomorphe $X^*(P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$, il en est de même du membre de droite et l'égalité ci-dessus est vraie partout par prolongement analytique. On cherche à montrer que le membre de gauche évalué en un point $\mu \in \frac{2\pi i}{\log q}X^*(P)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ est une fonction quasi-polynomiale de $T \in \mathfrak{a}_B$. Soit $\xi \in a_P$ un élément assez général et on utilise

$$\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}_P}(\mu, T) = \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}_P}(\mu+\varepsilon\xi, T).$$

La limite ci-dessus est aussi le terme d'ordre 0 dans le développement limité en ε du membre de droite dans l'expression (4.5.7). On obtient alors le résultat voulu. □

Corollaire 4.5.6. — *Supposons que le diviseur D vérifie*

$$\deg(D) \geqslant 2g_C - 2.$$

La fonction

$$T \mapsto |\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$$

est la restriction à $\overline{a_B^+} \cap \mathfrak{a}_B$ d'une fonction quasi-polynomiale sur $\mathfrak{a}_B$.

Démonstration. — Rappelons que $\mathcal{M}_D^{\leqslant T} = \mathcal{M}_{n,D}^{e,\leqslant T}$ dépend du choix d'un rang n et d'un degré e. Soit $\mathfrak{a}_P^e$ la fibre du morphisme $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_G$ en $e \in \mathbb{Z} \simeq \mathfrak{a}_G$. On identifie le sous-groupe de Levi standard de P à $GL(n_1)\times\ldots\times GL(n_r)$ et $\mathfrak{a}_P$ à $\mathbb{Z}^r$. Soit $\underline{n}_P = (n_1, \dots, n_r)$. On partitionne $\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)$ selon les strates de Harder-Narasimhan. On a donc

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{B\subset P\subset G}\sum_{H\in\mathfrak{a}_P^e} \Gamma_P(H,T)|\mathcal{M}_{\underline{n}_P,D}^{H,ss}(\mathbb{F}_q)|,$$

où la fonction Γ_P est définie en (4.5.1) et la strate de Harder-Narasimhan $\mathcal{M}_{\underline{n}_P,D}^{H,ss}$ est définie au §3.9. D'après la proposition 3.9.2 et la remarque 3.8.1, la somme se réécrit, avec les notations de la proposition 4.5.5,

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = \sum_{B\subset P\subset G} q^{\dim(N_P)\deg(D)} \sum_{\underline{e}_P} \hat{\Gamma}_{P,\mathfrak{h}^e_{\underline{e}_P}}(0,T)\prod_{i=1}^{r_P}|\mathcal{M}_{n_{i,P},D}^{e_{i,P},ss}(\mathbb{F}_q)|$$

où $\underline{e}_P = (e_{1,P}, \dots, e_{r_P,P})$ parcourt $\mathbb{Z}/n_{1,P}\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}/n_{r_P,P}\mathbb{Z}$. La proposition 4.5.5 permet de conclure. □

5 Comptage et un analogue de la formule des traces d'Arthur

5.1. Fonction k_D^T. — Soit $g \in G(\mathbb{A})$. Pour tout sous-groupe parabolique standard P et sa décomposition standard $P = MN$, on munit $\mathfrak{n}(\mathbb{A})$ de la mesure de Haar normalisée par

$$\mathrm{vol}(\mathfrak{n}(F)\backslash\mathfrak{n}(\mathbb{A})) = 1.$$

On pose aussi

$$k_{P,D}(g) = \sum_{X\in\mathfrak{m}(F)} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g)\,dU. \tag{5.1.1}$$

C'est une variante de la fonction $K_{P,D}$ de (3.11.1). C'est un analogue pour les algèbres de Lie d'un noyau considéré par Arthur (cf. [5], [1] et [7]). La fonction $k_{P,D}$ est invariante à gauche par $M(F)N(\mathbb{A})$ et à droite par $G(\mathcal{O})$. Pour tout $m \in M(\mathbb{A})$, on a

$$k_{P,D}(m) = q^{\dim(\mathfrak{n})(1-g_C+\deg(D))} q^{\langle 2\rho_P, H_P(m)\rangle} \sum_{X\in\mathfrak{m}(F)} \mathbf{1}_D(m^{-1}Xm). \tag{5.1.2}$$

On pose ensuite pour tout $T \in a_B$

$$k_D^T(g) = \sum_{B\subset P\subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) k_{P,D}(\delta g). \tag{5.1.3}$$

C'est une variante de la fonction K_D^T de (4.1.2). La fonction k_D^T est invariante à gauche par $G(F)$ et à droite par $G(\mathcal{O})$.

Proposition 5.1.1. — *Soit $T \in a_B$ tel que la condition*

$$T_i - T_{i+1} \geqslant \max(0, \deg(D), 2g_C - 2, 2g_C - 2 - \deg(D)). \tag{5.1.4}$$

soit satisfaite pour tout $1 \leqslant i < n$. Alors on l'égalité suivante pour tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$k_D^T(g) = K_D^T(g) = F^G(g,T) \sum_{X\in\mathfrak{g}(F)} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg).$$

Démonstration. — Elle est similaire à la démonstration du lemme 2.4.2. Soit $\mathcal{E}$ le fibré vectoriel correspondant à g. Pour tout drapeau $\mathcal{F}_\bullet$ de sous-fibrés de $\mathcal{E}$, on note r sa longueur, $\mathcal{G}_\bullet$ ses quotients et $n_\bullet$ les rangs de ses quotients. On définit $k_{\mathcal{F}_\bullet}$ comme le produit des trois facteurs suivants

1. $\prod_{1\leqslant i\leqslant r} |\operatorname{Hom}(\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i(D))|$;
2. $q^{(n^2-\sum_{i=1}^r n_i^2)(1-g_C+\deg(D))/2}$ où $n = \mathrm{rang}(\mathcal{E})$;
3. $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant r} q^{n_i\deg(\mathcal{G}_j) - n_j\deg(\mathcal{G}_i)}$.

Le lemme 4.2.3 montre que, sous la condition (5.1.4), cette fonction $k_{\mathcal{F}_\bullet}$ ne dépend que du raffinement canonique de $\mathcal{F}_\bullet$ pour la T-semi-stabilité. Plus précisément, on obtient le raffinement canonique en introduisant pour chaque quotient $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ la filtration de Harder-Narasimhan pour la $(T_{n_{i-1}+1}, \ldots, T_{n_i})$-stabilité.

À l'aide de (5.1.2), on voit qu'on a

$$k_D^T(g) = \sum_{\mathcal{F}_\bullet} (-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)} k_{\mathcal{F}_\bullet}$$

où l'on somme sur les drapeaux $\mathcal{F}_\bullet$ qui sont T-déstabilisants. De deux choses l'une : soit le seul drapeau déstabilisant est le drapeau $(0) \subsetneq \mathcal{E}$ auquel cas le fibré $\mathcal{E}$ est T-semi-stable et l'on a

$$\sum_{\mathcal{F}_\bullet} (-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)} k_{\mathcal{F}_\bullet} = \operatorname{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}(D)).$$

Soit $\mathcal{E}$ n'est pas T-semi-stable et en regroupant les drapeaux suivant leur raffinement canonique (au sens de la T-stabilité), on voit qu'on a

$$\sum_{\mathcal{F}_\bullet}(-1)^{long(\mathcal{F}_\bullet)}k_{\mathcal{F}_\bullet}=0.$$

On vient donc de prouver qu'on a

$$k_D^T(g)=F^G(g,T)\sum_{X\in\mathfrak{g}(F)}\mathbf{1}_D(g^{-1}Xg).$$

Le lemme 4.2.2 montre que sous la condition (5.1.4) le fibré $\mathcal{E}$ est T-semi-stable si et seulement s'il existe $\theta\in\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))$ tel que $(\mathcal{E},\theta)$ est un fibré de Hitchin T-semi-stable. Par le commentaire qui suit (4.1.2), ceci se traduit par l'égalité

$$K_D^T(g)=F^G(g,T)\sum_{X\in\mathfrak{g}(F)}\mathbf{1}_D(g^{-1}Xg).$$

□

Corollaire 5.1.2. — *Pour tout $e\in\mathbb{Z}$ et tout $T\in a_B$, la fonction*

$$g\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e\mapsto k_D^T(g)$$

est à support compact.

Démonstration. — La fonction $g\in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e\mapsto F^G(g,T)$ est la fonction caractéristique d'un compact. Le corollaire est donc une conséquence immédiate de la proposition 5.1.1 lorsque la condition (4.2.3) est satisfaite. Le cas général va résulter de ce cas particulier et de l'énoncé analogue sur les sous-groupes de Levi propres de G (qu'on suppose acquis par récurrence). Soit $T\in a_B$ qui vérifie (4.2.3) et $T'\in a_B$ quelconque. D'après Arthur (cf. [2] section 2), on a, pour tout $H\in a_B$

$$\hat\tau_P(H_P-T'_P)=\sum_{P\subset Q\subset G}(-1)^{\dim(a_Q^G)}\hat\tau_P^Q(H_P-T_P)\Gamma'_Q(H-T,T'-T)$$

où Γ'_Q est la fonction introduite en (4.5.2). Il s'ensuit qu'on a

$$k_D^{T'}(g)=\sum_{B\subset Q\subset G}\sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)}\Gamma'_Q(H_Q(\delta g)-T,T'-T)k_D^{Q,T}(\delta g) \tag{5.1.5}$$

où l'on pose pour $g\in G(\mathbb{A})$

$$k_D^{Q,T}(g)=\sum_{B\subset P\subset Q}(-1)^{\dim(a_P^Q)}\sum_{\eta\in P(F)\backslash Q(F)}\hat\tau_P^Q(H_B(\eta g)-T_P)k_{P,D}(\eta g). \tag{5.1.6}$$

La fonction $k_D^{Q,T}$ est invariante à gauche par $M_Q(F)N_Q(\mathbb{A})$ et à droite par $G(\mathcal{O})$. Pour tout sous-groupe parabolique standard Q de G, la fonction $\Gamma'_Q(\cdot-T,T'-T)$ est à support compact (cf. [2] lemme 2.1). Soit $H\in\mathfrak{a}_Q$ de projection e sur $a_G\simeq\mathbb{R}$ un élément dans le support de cette fonction. Il n'y a qu'un nombre fini de tels H. Par (5.1.5), le support de $k_D^{T'}$ est inclus dans la réunion, sur de tels couples (Q,H), de l'image par la projection

$$Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^e\to G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$$

du support de la fonction $k_D^{Q,T}$ restreinte à l'ensemble

$$\{g\in Q(F)\backslash G(\mathbb{A})\mid H_Q(g)=H\}.$$

On va montrer que ce support est toujours compact. Pour $Q = G$, on a $k_D^{G,T} = k_D^T$ et le résultat est acquis. On suppose désormais $Q \subsetneq G$. Comme $N_Q(F)\backslash N_Q(\mathbb{A})$ et K sont compacts, il suffit de prouver la compacité du support pour la restriction de $k_D^{Q,T}$ à l'ensemble $\{m \in M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A}) \mid H_Q(m) = H\}$. Pour $m \in M_Q(\mathbb{A})$, en posant $\mathfrak{n}_P^Q = \mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{m}_Q$ et en effectuant des changements de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
k_{P,D}(m) &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U)m)\,dU \\
&= \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{n}_Q(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U+U')m)\,dU\,dU' \\
&= q^{\langle 2\rho_Q, H_Q(m)\rangle} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)} \int_{\mathfrak{n}_P^Q(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}(X+U)m)\,dU \\
&= q^{\langle 2\rho_Q, H_Q(m)\rangle} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} k_{P\cap M_Q,D}^{M_Q}(m),
\end{aligned}$$

où la dernière notation $k_{P\cap M_Q,D}^{M_Q}$ est l'analogue de $k_{P,D}$ obtenu pour $G = M_Q$; cette fonction est d'ailleurs le produit des fonctions associées aux blocs GL de M_Q. Il s'ensuit qu'on a

$$k_D^{Q,T}(m) = q^{\langle 2\rho_Q, H_Q(m)\rangle} q^{\dim(N_Q)(1-g_C+\deg(D))} k_D^{M_Q,T}(m) \tag{5.1.7}$$

où $k_D^{M_Q,T}(m)$ est la fonction sur $M_Q(\mathbb{A})$ analogue à k_D^T et obtenue comme produit sur les blocs GL de M_Q. La compacité du support en résulte par récurrence.

□

5.2. Intégrales J^T. — On fixe une degré $e \in \mathbb{Z}$. Pour tout $T \in a_B$, on pose

$$J_D^{T,e} = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} k_D^T(g)\,dg. \tag{5.2.1}$$

D'après le corollaire 5.1.2, l'intégrande est à support compact. On pose aussi pour $T = 0$

$$J_D^e = J_D^{0,e}. \tag{5.2.2}$$

Théorème 5.2.1. — *La fonction sur* $\mathfrak{a}_B$

$$T \mapsto J_D^{T,e}$$

est quasi-polynomiale.

Démonstration. — Par une variante de (5.1.5), on a

$$k_D^T(g) = \sum_{B\subset Q\subset G} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} \Gamma'_Q(H_Q(\delta g), T) k_D^{Q,0}(g).$$

On a donc, en utilisant (5.1.7)

$$\begin{aligned}
J_D^{T,e} &= \sum_{B\subset Q\subset G} \int_{Q(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \Gamma'_Q(H_Q(g), T) k_D^{Q,0}(g)\,dg \\
&= \sum_{B\subset Q\subset G} q^{\dim(N_Q)\deg(D)} \int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^e} \Gamma'_Q(H_Q(m), T) k_D^{M_Q,0}(m)\,dm \\
&= \sum_{B\subset Q\subset G} q^{\dim(N_Q)\deg(D)} \sum_{H\in\mathfrak{a}_Q^e} \Gamma'_Q(H,T) \int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^H} k_D^{M_Q,0}(m)\,dm,
\end{aligned}$$

où l'on note

– $\mathfrak{a}_Q^e$ le sous-groupe des éléments de $\mathfrak{a}_Q$ dont la projection sur $a_G \simeq \mathbb{R}$ est égale à e ;
– $M_Q(\mathbb{A})^H$ le sous-ensemble des $m \in M_Q(\mathbb{A})$ tels que $H_Q(m) = H$.

Comme la fonction $k_D^{M_Q,0}$ est invariante par le centre $Z_{M_Q}(\mathbb{A})$ de $M_Q(\mathbb{A})$, l'intégrale

$$\int_{M_Q(F)\backslash M_Q(\mathbb{A})^H} k_D^{M_Q,0}(m)\, dm$$

est périodique comme fonction de H. On conclut alors en utilisant la proposition 4.5.5. $\square$

Corollaire 5.2.2. — *Supposons que le diviseur D vérifie*

$$\deg(D) \geqslant 2g_C - 2.$$

Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, on a

$$|\mathcal{M}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| = J_D^{T,e}.$$

En particulier, on a pour $T = 0$

$$|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| = J_D^e.$$

Démonstration. — L'égalité est vraie au moins si T vérifie les conditions (5.1.4) de la proposition 5.1.1. Par le théorème 5.2.1 et le corollaire 4.5.6, il s'agit d'une égalité de fonctions quasi-polynomiales. Elle se prolonge donc à tout $T \in \overline{a_B^+}$. $\square$

Corollaire 5.2.3. — *Soit K un diviseur canonique sur C. On a pour tout $T \in \mathfrak{a}_B$ et tout $e \in \mathbb{Z}$*

$$J_D^{T,e} = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} J_{K-D}^{T,e}.$$

Remarque 5.2.4. — Cette égalité est un analogue simple pour les algèbres de Lie de la formule des traces d'Arthur (pour un énoncé sur les corps de nombres cf. [7]).

Démonstration. — Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang n, on a, par la formule de Riemann-Roch et par dualité de Serre,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))| &= q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} |\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}(D))| \\ &= q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} |\operatorname{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}(K-D))|. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 5.1.1, on en déduit que pour tout $T \in a_B$ qui vérifie (5.1.4), on a

$$k_D^T = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} k_{K-D}^T$$

et donc aussi

$$J_D^T = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} J_{K-D}^T.$$

Comme les deux membres sont des fonctions quasi-polynomiales sur $\mathfrak{a}_B$, on en déduit l'égalité partout. $\square$

6 Développement suivant les polynômes caractéristiques

6.1. Fonction $J^T_{D,a}$. — Soit $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$. Soit $\mathcal{M}_a$ la fibre du morphisme de Hitchin $f^{-1}(a)$ (cf. §3.4). Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$, soit $\mathcal{M}_a^{\leqslant T}$ l'ouvert de $\mathcal{M}_a$ défini par la T-semi-stabilité. Considérons, dans ce qui suit, a comme un polynôme unitaire de degré n à coefficient dans F. Pour tout $Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{A})$ soit χ_Y son polynôme caractéristique. Pour toute partie $R \subset \mathfrak{g}(\mathbb{A})$, on note

$$R_a = \{Y \in R \mid \chi_Y = a\}.$$

On pose alors pour tout sous-groupe parabolique standard P de G et tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$K_{P,D,a}(g) = \sum_{X \in \mathfrak{p}(F)_a} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg). \tag{6.1.1}$$

et

$$k_{P,D,a}(g) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_P(F)_a} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g)\, dU. \tag{6.1.2}$$

En sommant sur $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$, on retrouve les fonctions $K_{P,D}$ et $k_{P,D}$ définies respectivement en (3.11.1) et (5.1.1). On pose alors pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in a_B$

$$K^T_{D,a}(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) K_{P,D,a}(\delta g) \tag{6.1.3}$$

et

$$k^T_{D,a}(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) k_{P,D,a}(\delta g). \tag{6.1.4}$$

Le théorème suivant rassemble pour les objets relatifs à a des propriétés déjà vues lorsqu'on somme ces mêmes objets sur $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$.

Théorème 6.1.1. — *Soit $a \in \mathcal{A}_D(\mathbb{F}_q)$.*

1. *Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$*
$$|\mathcal{M}^{\leqslant T}_{D,a}(\mathbb{F}_q)| = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} K^T_{D,a}(g)\, dg.$$
2. *Pour tout $T \in a_B$ qui vérifie la condition 5.1.4, on a pour tout $g \in G(\mathbb{A})$*
$$k^T_{D,a}(g) = K^T_{D,a}(g) = F^G(g,T) \sum_{X \in \mathfrak{g}(F)_a} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg).$$
3. *Pour tout $e \in \mathbb{Z}$ et tout $T \in a_B$, la fonction*
$$g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e \mapsto k^T_{D,a}(g)$$
est à support compact.
4. *Pour tout $T \in a_B$ et tout $e \in \mathbb{Z}$, soit*
$$J^{T,e}_{D,a} = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} k^T_{D,a}(g)\, dg. \tag{6.1.5}$$
La fonction $T \mapsto J^{T,e}_{D,a}$ est quasi-polynomiale sur $\mathfrak{a}_B$.
5. *Soit K un diviseur canonique sur C. Pour tout $T \in \mathfrak{a}_B$ et tout $e \in \mathbb{Z}$*
$$\sum_{a \in \mathcal{A}_D(\mathbb{F}_q)} J^{T,e}_{D,a} = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} \sum_{a \in \mathcal{A}_{K-D}(\mathbb{F}_q)} J^{T,e}_{K-D,a}.$$

Démonstration. — Elle reprend les méthodes des sections précédentes. Aussi serons-nous très brefs. L'assertion 1 se démontre comme (4.1.3). L'assertion 2 se démontre comme la proposition 5.1.1. L'assertion 3 se déduit de l'assertion 2 comme dans la démonstration du corollaire 5.1.2. L'intégrale (6.1.5) est bien définie par l'assertion 3. On démontre qu'elle définit une fonction quasi-polynomiale de T comme dans la démonstration du théorème 5.2.1. L'assertion 5 résulte du corollaire 5.2.3 et de l'égalité

$$J_D^{T,e} = \sum_{a \in \mathcal{A}_D(\mathbb{F}_q)} J_{D,a}^{T,e}$$

pour tout $T \in \mathfrak{a}_B$ et tout diviseur D sur C. □

On pose pour $T = 0$

(6.1.6) $$J_{D,a}^{e} = J_{D,a}^{0,e}.$$

Pour a qui a tous ses coefficients nuls sauf son coefficient dominant, la fibre $\mathcal{M}_a$ est composé de fibrés de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$ tels qu'en tout point de C l'endomorphisme θ est nilpotent. Aussi on note pour ce a-là

(6.1.7) $$J_{D,nilp}^{e} = J_{D,a}^{e}.$$

Corollaire 6.1.2. — *Soit $e \in \mathbb{Z}$ un degré. Soit D un diviseur sur C de* $\deg(D) \geqslant 2g_C - 2$*et K un diviseur canonique.*

1. *Si* $\deg(D) > 2g_C - 2$ *alors*

$$|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} J_{K-D,nilp}^{e}.$$

2. *Si $D = K$ et si, de plus le degré e est* premier *au rang n, on a*

$$|\mathcal{M}_K^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))+1} J_{K-D,nilp}^{e}.$$

Démonstration. — En utilisant successivement les corollaires 5.2.2 et 5.2.3, le théorème 6.1.1 assertion 5, on obtient pour $\deg(D) \geqslant 2g_C - 2$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| &= J_D^e \\ &= q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} J_{K-D}^e \\ &= q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} \sum_{a \in \mathcal{A}_{K-D}(\mathbb{F}_q)} J_{K-D,a}^e \end{aligned}$$

Lorsque, de plus, $\deg(D) > \deg(K) = 2g_C - 2$, la base de Hitchin $\mathcal{A}_{K-D}$ se réduit au point $a = 0$. Donc la dernière somme se réduit à $J_{K-D,nilp}^e$. Lorsque $K - D = 0$, on utilise le théorème 6.2.1 qui suit. □

6.2. Un théorème d'annulation. — Dans ce paragraphe, on suppose

$$D = 0.$$

Dans ce cas, un élément $a \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_q)$ n'est autre qu'un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{F}_q$.

Théorème 6.2.1. — *Supposons $D = 0$ et $e \in \mathbb{Z}$ un entier premier au rang n. Soit*

$$a = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{F}_q[X].$$

De deux choses l'une

1. *soit il existe* $\alpha \in \mathbb{F}_q$ *tel que* $a = (X-\alpha)^n$ *et alors*
$$J^e_{0,a} = J^e_{0,nilp}.$$
2. *soit il n'existe pas de* $\alpha \in \mathbb{F}_q$ *tel que* $a = (X-\alpha)^n$ *et alors*
$$J^e_{0,a} = 0.$$

Démonstration. — Le point clef consiste à trouver une nouvelle expression intégrale pour $J^e_{0,a}$, c'est l'objet de la proposition 6.2.3 et du lemme 6.2.4 ci-dessous. Le théorème résulte alors du lemme 6.2.6. □

Le reste du paragraphe est consacré à l'énoncé et la démonstration des résultats qui interviennent dans la preuve du théorème 6.2.1. On fixe
$$a = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathbb{F}_q[X].$$
Tout $X \in \mathfrak{g}(F)_a$ admet une décomposition de Jordan $X = X_s + X_n$ où X_s et X_n sont des éléments de $\mathfrak{g}(F)$ respectivement semi-simple et nilpotent. Soit $G(X_s)$ et $\mathfrak{g}(X_s)$ les centralisateurs de X_s respectivement dans G et $\mathfrak{g}$. La mesure de Haar sur $\mathfrak{g}(X_s, \mathbb{A})$ est normalisée par
$$\mathrm{vol}(\mathfrak{g}(X_s, F)\backslash \mathfrak{g}(X_s, \mathbb{A})) = 1,$$
Lorsque $X_s \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$, le groupe $G(X_s)$ est défini sur $\mathbb{F}_q$ et on met la mesure de Haar sur $G(X_s, \mathbb{A})$ qui donne le volume 1 à $G(X_s, \mathcal{O})$. En général, X_s est conjugué par un élément $\delta \in G(F)$ à un élément $Y \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$; on met alors la mesure sur $G(X_s, \mathbb{A})$ qui se déduit de celle de $G(Y, \mathbb{A})$ par conjugaison par δ. Ces notations et ces normalisations de mesure valent aussi pour les sous-groupes de G qu'on va considérer.

Lemme 6.2.2. — *Soit* P *un sous-groupe parabolique de* G. *Pour tout* $X \in \mathfrak{m}_P(F)_a$, *on a*

1. *l'égalité*
$$\{X + U \mid U \in \mathfrak{n}_P(F)\} = \bigcup_{\nu \in N_P(X_s,F)\backslash N_P(F)} \nu^{-1}\{X + V \mid V \in \mathfrak{n}_P(X_s, F)\}\nu$$
où, dans le membre de droite, la réunion est disjointe ;
2. *la formule suivante pour toute fonction* f *lisse à support compact sur* $\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})$
$$\int_{N_P(X_s,\mathbb{A})\backslash N_P(\mathbb{A})} \int_{\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})} f(n^{-1}(X+U)-X)\, dU\, dn = q^{\dim(\mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P(X_s))(g_C-1)} \int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})} f(U)\, dU.$$

Démonstration. — C'est une variante sur les corps de fonctions du lemme 2.3 et du corollaire 2.5 de [7]. La puissance de q qui apparaît ici est due à un choix différent de normalisation. □

En s'inspirant d'Arthur, on introduit une variante de (6.1.2) pour P un sous-groupe parabolique standard de G et $g \in P(F)\backslash G(\mathbb{A})/G(\mathcal{O})$

$$\tilde{k}_{P,D,a}(g) = \sum_{X \in \mathfrak{m}_P(F)_a} \sum_{\nu \in N_P(X_s,F)\backslash N_P(F)} \int_{\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((\nu g)^{-1}(X+U)\nu g)\, dU, \tag{6.2.1}$$

ainsi qu'une variante de (6.1.4)

$$\tilde{k}^T_{D,a}(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P)\tilde{k}_{P,D,a}(\delta g). \tag{6.2.2}$$

On a la proposition suivante, qui est un analogue du théorème 8.1 de [1].

Proposition 6.2.3. — *Soit* $e \in \mathbb{Z}$ *et* $T \in \overline{a_B^+}$.

1. *La fonction $\tilde{k}^T_{D,a}$ est à support compact sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$.*
2. *On a*

$$J^{T,e}_{D,a} = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} \tilde{k}^T_{D,a}(g)\, dg.$$

Démonstration. — La démonstration est une variante de la preuve du théorème 8.1 de [1]. Pour la commodité du lecteur donnons quelques détails. Avec les notations de [1] (le lecteur pourra avantageusement consulté [5] section 8 et le théorème 11.1 de la section 11), on a pour tout $g \in G(\mathbb{A})$

(6.2.3)
$$\tilde{k}^T_{D,a}(g) = F^G(g,T) \sum_{X\in\mathfrak{g}(F)_a} \mathbf{1}_D(g^{-1}Xg) = \sum_{P_1\subsetneq P_2} \sum_{\delta\in P_1(F)\backslash G(F)} F^{P_1}(\delta g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(\delta g)-T)\tilde{k}^{1,2}_{D,a}(\delta g)$$

où l'on introduit

(6.2.4)
$$\tilde{k}^{1,2}_{D,a}(g) = \sum_{P_1\subset P\subset P_2} (-1)^{\dim(a_P^G)}\tilde{k}_{P,D,a}(g).$$

Chaque facteur du produit $F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(g)-T)\tilde{k}^{1,2}_{D,a}(g)$ est invariant à gauche par $P_1(F)$. Pour tout $T \in \overline{a_B^+}$ et tout $g \in P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})$ tel que

(6.2.5)
$$F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(g)-T) \neq 0,$$

on peut dans l'expression (6.2.1) remplacer la somme sur $X \in \mathfrak{m}_P(F)_a$ par la somme sur

$$X \in \mathfrak{p}_1(F)\cap\mathfrak{m}_P(F)_a = \mathfrak{m}_1(F)_a \oplus \mathfrak{n}_1^P(F)$$

où l'on pose $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_{P_1}$ et $\mathfrak{n}_1^P = \mathfrak{m}_P \cap \mathfrak{n}_{P_1}$. On a

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{P,D,a}(g) &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a} \sum_{Y\in\mathfrak{n}_1^P(F)} \sum_{\nu\in N_P((X+Y)_s,F)\backslash N_P(F)} \int_{\mathfrak{n}_P((X+Y)_s,\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((\nu g)^{-1}(X+Y+U)\nu g)\, dU \\
&= \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a} \sum_{\eta\in N_1^P(X_s,F)\backslash N_1^P(F)} \sum_{V\in\mathfrak{n}_1^P(X_s,F)} \\
&\qquad \sum_{\nu\in\eta^{-1}N_P(X_s,F)\eta\backslash N_P(F)} \int_{\eta^{-1}\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})\eta} \mathbf{1}_D((\nu g)^{-1}(\eta^{-1}(X+V)\eta+U)\nu g)\, dU \\
&= \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a} \sum_{\nu\in N_1(X_s,F)\backslash N_1(F)} \sum_{V\in\mathfrak{n}_1^P(X_s,F)} \int_{\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})} \mathbf{1}_D((\nu g)^{-1}(X+V+U)\nu g)\, dU
\end{aligned}$$

La seconde ligne vient du changement de variables $X+Y = \eta^{-1}(X+V)\eta$ fourni par le lemme 6.2.2 et de l'égalité $(X+Y)_s = \eta^{-1}X_s\eta$. On va appliquer la formule sommatoire de Poisson à la somme sur $V \in \mathfrak{n}_1^P(X_s,F)$. Pour ce faire, on fixe une forme bilinéaire non dégénérée $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathfrak{g}$ invariante par conjugaison ainsi qu'un caractère ψ non-trivial de $F\backslash\mathbb{A}$. On obtient alors (en notant $\bar{\mathfrak{n}}_P$ l'algèbre de Lie du radical unipotent du sous-groupe parabolique opposé à P)

$$\tilde{k}_{P,D,a}(g) = \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a} \sum_{\nu\in N_1(X_s,F)\backslash N_1(F)} \sum_{V\in\bar{\mathfrak{n}}_1^P(X_s,F)} \Phi_1(\nu g, X, V),$$

où l'on pose pour $g \in G(\mathbb{A})$, $X \in \mathfrak{m}_1(F)$ et $V \in \bar{\mathfrak{n}}_1^2(F)$

$$\Phi_1(g,X,V) = \int_{\mathfrak{n}_1(X_s,\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g)\psi(\langle V,U\rangle)\, dU$$

Il s'ensuit qu'on a

$$\begin{aligned}\tilde{k}^{1,2}_{D,a}(g) &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a}\ \sum_{\nu\in N_1(X_s,F)\backslash N_1(F)}\ \sum_{V\in\bar{\mathfrak{n}}_1^2(X_s,F)} \Phi_1(\nu g,X,V) \sum_{P_1\subset P\subset P_2, V\in\mathfrak{m}_P(F)} (-1)^{\dim(a_P^G)}\\ &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_1(F)_a}\ \sum_{\nu\in N_1(X_s,F)\backslash N_1(F)}\ \sum_{V\in(\bar{\mathfrak{n}}_1^2)'(X_s,F)} \Phi_1(\nu g,X,V)\end{aligned}$$

où l'on note $(\bar{\mathfrak{n}}_1^2)' = \bar{\mathfrak{n}}_1^2 - \cup_{P_1\subset P\subsetneq P_2}\bar{\mathfrak{n}}_1^P$. On montre alors avec les méthodes de [7] qu'il existe une partie compacte de $P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ telle que pour tout $g\in P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ tel que

$$F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(g)-T)\tilde{k}^{1,2}_{D,a}(g)\neq 0$$

appartient à ce compact. Cela démontre l'assertion 1. Lorsque les différences $T_i - T_{i+1}$ sont assez grandes, on montre que pour $g\in P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ qui vérifie (6.2.5) et $V\in(\bar{\mathfrak{n}}_1^2)'(X_s,F)$ on a même

$$\Phi_1(g,X,V)=0.$$

En particulier, on a dans ce cas

$$\tilde{k}^T_{D,a} = F^G(g,T)\sum_{X\in\mathfrak{g}(F)_a}\mathbf{1}_D(g^{-1}Xg).$$

Pour l'assertion 2, on observe d'abord que pour tout sous-groupe parabolique standard P et tout $g\in G(\mathbb{A})$, on a

$$\begin{aligned}\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})}\tilde{k}_{P,a}(ng)\,dn &= \sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)_a}\int_{N_P(X_s,F)\backslash N_P(\mathbb{A})}\int_{\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})}\mathbf{1}_D((ng)^{-1}(X+U)ng)\,dU dn\\ &= q^{\dim(N_P(X_s))(g_C-1)}\sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)_a}\int_{N_P(X_s,\mathbb{A})\backslash N_P(\mathbb{A})}\int_{\mathfrak{n}_P(X_s,\mathbb{A})}\mathbf{1}_D((ng)^{-1}(X+U)ng)\,dU dn\\ &= q^{\dim(N_P)(g_C-1)}\sum_{X\in\mathfrak{m}_P(F)_a}\int_{\mathfrak{n}_P(\mathbb{A})}\mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g)\,dU\\ &= \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})}k_{P,a}(ng)\,dn.\end{aligned}$$

La troisième ligne provient du changement de variables fourni par le lemme 6.2.2. En particulier, on a pour tout $P_1\subset P$

$$\int_{N_1(F)\backslash N_1(\mathbb{A})}\tilde{k}_{P,a}(ng)\,dn = \int_{N_1(F)\backslash N_1(\mathbb{A})}k_{P,a}(ng)\,dn. \tag{6.2.6}$$

D'après (6.2.3)

$$\begin{aligned}&\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}\Big(\tilde{k}^T_a(g) - F^G(g,T)\sum_{X\in\mathfrak{g}(F)_a}\mathbf{1}(g^{-1}Xg)\Big)\,dg\\ &= \sum_{P_1\subsetneq P_2}\int_{P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(g)-T)\tilde{k}^{1,2}_a(g)\,dg.\end{aligned}$$

Par décomposition d'Iwasawa, on a

$$\int_{P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^e}F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(g)-T)\tilde{k}^{1,2}_a(g)\,dg$$

$$= \int_{M_1(F)\backslash M_1(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^e} q^{-\langle 2\rho_1, H_{P_1}(m)\rangle}F^{P_1}(m,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(m)-T)\int_{N_1(F)\backslash N_1(\mathbb{A})}\tilde{k}^{1,2}_a(nm)\,dm.$$

Par (6.2.6), on remplacer dans l'expression ci-dessus $\tilde{k}_a^{1,2}$ par $k_a^{1,2}$ (analogue de (6.2.4) pour le fonctions k) et remonter les égalités : cela donne l'assertion 2. □

Soit

(6.2.7) $$a = \prod_{i=1}^{r} a_i^{d_i}$$

la décomposition de a en produits de facteurs irréductibles et unitaires deux à deux distincts. Soit $n_i = \deg(a_i)$. Soit M_1 un sous-groupe de Levi standard de G isomorphe au produit

$$GL(n_1)^{d_1} \times \ldots \times GL(n_r)^{d_r}.$$

Soit M_2 le sous-groupe de Levi standard de G isomorphe au produit

$$GL(n_1 d_1) \times \ldots \times GL(n_r d_r)$$

de sorte que chaque facteur $GL(n_i d_i)$ contienne le facteur $GL(n_i)^{d_i}$ de M_1. On fixe dans la suite un élément *semi-simple* $X \in \mathfrak{m}_1(\mathbb{F}_q)_a$. Le centralisateur de X s'identifie à

$$\prod_{i=1}^{r} Res_{\mathbb{F}_{q^{n_i}}/\mathbb{F}_q} GL(d_i).$$

Soit P_1 et P_2 les sous-groupes paraboliques standard de G définis respectivement par M_1 et M_2. Alors $P_1(X)$ est un sous-groupe parabolique minimal de $G(X)$ et P_2 est minimal parmi les sous-groupes paraboliques de G qui contiennent $G(X)$. Les sous-groupes paraboliques de $G(X)$ qui contiennent $P_1(X)$ sont dits standard. Tout sous-groupe parabolique Q qui contient M_1 définit un sous-groupe parabolique de $G(X)$ à savoir $Q(X)$. Tout sous-groupe parabolique standard R de $G(X)$ s'obtient de cette façon et admet une décomposition de Levi standard $M_R N_R$ où N_R est le radical unipotent et M_R est le facteur de Levi qui contient $M_1(X)$. La décomposition standard de $Q(X)$ est donnée par $M_Q(X) N_Q(X)$.

Tout sous-groupe parabolique Q tel que $\mathfrak{q}(F)_a \neq \emptyset$ est conjugué à un sous-groupe parabolique Q' qui contient M_1. Ce sous-groupe Q' est unique si l'on impose de plus la condition $P_1(X) \subset Q'(X)$. On note $Nilp^G$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. On en déduit le lemme suivant qui est une variante du lemme 3.1 de [4].

Lemme 6.2.4. — *Pour $T = 0$ et tout $g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})$, on a*

$$\tilde{k}_a(g) = \sum_R \sum_{\xi \in R(F)\backslash G(F)} \sum_{U \in Nilp^{M_R}(F)} \int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} \mathbf{1}((\xi g)^{-1}(X + U + V)\xi g)\, dV \times$$

(6.2.8) $$\sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)} \hat{\tau}_P(H_P(\xi g))$$

où

1. *la somme sur R est prise sur les sous-groupes paraboliques standard de $G(X)$;*
2. *la somme sur P est prise sur les sous-groupes paraboliques (non nécessairement standard) de G contenant M_1 et tels que $P(X) = R$.*

Lemme 6.2.5. — *Soit $g \in G(\mathbb{A})$, R un sous-groupe parabolique standard de $G(X)$ et $U \in Nilp^{M_R}(F)$ tels que*

(6.2.9) $$\int_{\mathfrak{n}_R(\mathbb{A})} \mathbf{1}(g^{-1}(X + U + V)g)\, dV \neq 0.$$

Alors
$$g \in M_R(F)M_1(X,\mathbb{A})N_1(X,\mathbb{A})G(\mathcal{O}).$$

Démonstration. — Quitte à conjuguer U par un élément $\delta \in M_R(F)$ et remplacer g par δg, on peut et on va supposer qu'on a $U \in \mathfrak{m}_R(F) \cap \mathfrak{n}_1$. L'intégrale (6.2.9) est non nulle seulement s'il existe $V \in \mathfrak{n}_R(\mathbb{A})$ tel que

$$g^{-1}(X+U+V)g \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}). \tag{6.2.10}$$

Par la décomposition d'Iwasawa, on écrit $g = mnk$ avec $m \in M_1(\mathbb{A})$, $n \in N_1(\mathbb{A})$ et $k \in G(\mathcal{O})$. La condition (6.2.10) implique qu'on a
$$m^{-1}Xm \in \mathfrak{m}_1(\mathcal{O}).$$
Un argument standard (cf. par exemple [15] proposition 7.1) montre que $m^{-1}Xm$ et X sont conjugués par un élément de $M_1(\mathcal{O})$. Il s'ensuit qu'on a $m \in M_1(X,\mathbb{A})M_1(\mathcal{O})$. Quitte à modifier n et k en conséquence, on peut et on va supposer que $m \in M_1(X,\mathbb{A})$. La condition (6.2.10) devient alors
$$n^{-1}(X + m^{-1}(U+V)m)n - X \in \mathfrak{n}_1(\mathcal{O}).$$
Par une variante du lemme 6.2.2, on montre qu'on a $n \in N_1(X_s,\mathbb{A})N_1(\mathcal{O})$ ce qui conclut. □

Lemme 6.2.6. — *Soit $e \in \mathbb{Z}$ premier au rang n et $g \in G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e$ De deux choses l'une*

1. *soit il existe $\alpha \in \mathbb{F}_q$ tel que $a = (X-\alpha)^n$ et alors*
$$\tilde{k}_a(g) = \tilde{k}_{nilp}(g)$$
2. *soit il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{F}_q$ tel que $a = (X-\alpha)^n$ et alors*
$$\tilde{k}_a(g) = 0.$$

Démonstration. — Soit g tel que $\tilde{k}_a(g) \neq 0$. D'après le lemme 6.2.5 et l'expression de $\tilde{k}_a(g)$ donnée par le lemme 6.2.4, il existe R, un sous-groupe parabolique standard de $G(X)$, et $\xi \in G(F)$ tels que $\xi g \in M_R(F)M_1(X,\mathbb{A})N_1(X,\mathbb{A})G(\mathcal{O})$ et tels que la somme suivante

$$\sum_P (-1)^{\dim(a_P^G)}\hat{\tau}_P(H_P(\xi g)), \tag{6.2.11}$$

prise sur *tous* les sous-groupes paraboliques P de G contenant M_1 et tels que $P(X) = R$, soit non nulle. Soit S le sous-groupe parabolique standard de G tel que $S(X) = R$ et minimal pour cette propriété. Soit $m \in M_1(X,\mathbb{A})$ tel que $\xi g \in M_R(F)mN_1(X,\mathbb{A})G(\mathcal{O})$. On a
$$M_1(X,\mathbb{A}) \simeq (\mathbb{A}_{F_1}^\times)^{d_1} \times \ldots \times (\mathbb{A}_{F_r}^\times)^{d_r}$$
où $F_i = F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{n_i}}$. Il s'ensuit qu'on a
$$H_{M_1}(m) = (x_{1,1},\ldots,x_{d_1,1},x_{1,2},\ldots,x_{1,r},\ldots,x_{d_r,r}) \in (n_1\mathbb{Z})^{d_1} \times \ldots \times (n_r\mathbb{Z})^{d_r}.$$
Comme $g \in G(\mathbb{A})^e$, on a aussi
$$x_{1,1} + \ldots + x_{d_1,1} + x_{1,2} + \ldots + x_{1,r} + \ldots + x_{d_r,r} = e.$$
Pour tout sous-groupe parabolique P de G contenant M_1 et tel que $P(X) = R$, on a des projections $a_{M_1} \to a_S \to a_P$ et l'expression
$$\hat{\tau}_P(H_P(\xi g)) = \hat{\tau}_P(H_{M_1}(m))$$

et ne dépend en fait que du projeté de $H_{M_1}(m)$ sur a_S. D'après le lemme 5.2 de [4], la non-nullité de (6.2.11) entraîne que le projeté de $H_{M_1}(m)$ sur a_S appartient à $a_G + a_S^{M_2}$. On en déduit que le projeté de $H_{M_1}(m)$ sur $a_{M_1}^G$ appartient au sous-espace $a_{M_1}^{M_2}$. Ce dernier projeté s'écrit explicitement

$$(x_{1,1} - \frac{n_1 e}{n}, \ldots, x_{d_1,1} - \frac{n_1 e}{n}, x_{1,2} - \frac{n_2 e}{n}, \ldots, x_{1,r} - \frac{n_r e}{n}, \ldots, x_{d_r,r} - \frac{n_r e}{n}).$$

Celui-ci appartient à $a_{M_1}^{M_2}$ si et seulement si on a pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$

$$\sum_{j=1}^{d_i} x_{j,i} - \frac{n_i e}{n} = 0.$$

Comme on a $x_{j,i} \in n_i\mathbb{Z}$ cette dernière condition implique qu'on a

$$n_i e \in n\mathbb{Z},$$

et donc $n_i \in n\mathbb{Z}$ puisque e est premier à n. Donc $r = 1$ et $n_1 = n$ c'est-à-dire on est dans le cas 1. Mais alors $X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}_q)$ est central et l'égalité $\tilde{k}_a(g) = \tilde{k}_{nilp}(g)$ est évidente. □

7 Développement suivant les orbites nilpotentes

7.1. Dans cette section, on énonce des résultats obtenus dans [8] qu'on illustre par quelques exemples.

7.2. Induite de Lusztig-Spaltenstein. — Soit $Nilp^G$ le cône nilpotent de $\mathfrak{g}$. Celui-ci se décompose sous l'action par conjugaison de G en une réunion finie d'orbites $\mathfrak{o}$. On note $(Nilp^G)$ l'ensemble des orbites nilpotentes de G dans $Nilp^G$. Pour tout $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$, on note $\overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence de l'orbite $\mathfrak{o}$ dans $\mathfrak{g}$. L'orbite $\mathfrak{o}$ est ouverte dans son adhérence et la différence entre les deux est une réunion d'orbites de dimension inférieure.

Ces notations valent pour tout sous-groupe de Levi M de G. Pour toute orbite nilpotente $\mathfrak{o} \in (Nilp^M)$, on définit $I_M^G(\mathfrak{o}) \in (Nilp^G)$, *l'induite de Lusztig-Spaltenstein* de $\mathfrak{o}$ (cf. [18]). C'est l'unique orbite $\mathcal{O}' \in (Nilp^G)$ qui vérifie la propriété suivante : pour tout sous-groupe parabolique P de Levi M, l'intersection

$$\mathfrak{o}' \cap (\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{n}_P)$$

est un ouvert dense de $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{n}_P$. Le normalisateur de M dans G agit sur l'ensemble $(Nilp^M)$. L'induite $I_M^G(\mathfrak{o})$ ne dépend que de l'orbite de $\mathfrak{o}$ sous cette action.

7.3. Le cône nilpotent global $\mathcal{N}_D$. — Soit

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_D = \mathcal{M}_{D,a=0}$$

le cône nilpotent global, c'est-à-dire la fibre de Hitchin en $a = 0$. Celui-ci est une réunion disjointe de parties localement fermées $\mathcal{N}_\mathfrak{o}$ indexées par $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\mathfrak{o} \in (Nilp^G)} \mathcal{N}_\mathfrak{o}$$

de sorte que, pour toute orbite $\mathfrak{o}' \in (Nilp^G)$, la réunion

$$\bigcup_{\{\mathfrak{o} \in (Nilp^G) | \mathfrak{o} \subset \overline{\mathfrak{o}}'\}} \mathcal{N}_\mathfrak{o}$$

soit formée des fibrés de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$ tels qu'en tout point $c \in |C|$, on ait $\theta_c \in \overline{\mathfrak{o}}'$. Pour l'orbite nulle (0), $\mathcal{N}_{(0)}$ est le champ Fib_n^e des fibrés vectoriels de degré e et de rang n (l'endomorphisme θ sous-jacent à la donnée du fibré de Hitchin est nul).

On pose pour tout $T \in \overline{a_B^+}$ et tout $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$

$$\mathcal{N}^{\leqslant T} = \mathcal{N} \cap \mathcal{M}^{\leqslant T} \text{ et } \mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T} = \mathcal{N}_{\mathfrak{o}} \cap \mathcal{M}^{\leqslant T}.$$

En particulier pour $T = 0$, on obtient l'ouvert semi-stable $\mathcal{N}^{ss}$ du cône nilpotent. Dans cette section, on se focalise sur le comptage $|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$. Contrairement aux autres comptages auxquels nous nous sommes intéressé précédemment, le comptage $|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ n'est pas quasi-polynomial en T. Cependant, on va montrer qu'il existe toujours une fonction quasi-polynomiale en T asymptotique à $|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$.

7.4. Fonctions $k_{\mathfrak{o}}^T$ et intégrale $J_{\mathcal{O}}^{T,e}$. — Comme dans les section précédentes, on va donner la fonction quasi-polynomiale asymptotique à $|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ sous forme d'une intégrale adélique. Soit $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$. On pose alors pour tout sous-groupe parabolique standard P de G de décomposition de Levi standard $P = MN$ et tout $g \in G(\mathbb{A})$

$$k_{P,D,\mathfrak{o}}(g) = \sum_{\mathfrak{o}' \in (Nilp^M), I_M^G(\mathfrak{o}') = \mathfrak{o}} \sum_{X \in \mathfrak{o}'(F)} \int_{\mathfrak{n}(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(g^{-1}(X+U)g)\, dU. \tag{7.4.1}$$

Remarques 7.4.1. —

1. Suivant l'orbite $\mathfrak{o}$, il arrive que l'expression $k_{P,D,\mathfrak{o}}(g)$ soit toujours nulle. Par exemple, si $\mathfrak{o}$ est l'orbite nulle alors $k_{P,D,\mathfrak{o}}(g) = 0$ sauf si $P = G$. Pour le sous-groupe de Borel standard B, on a $k_{B,D,\mathfrak{o}}(g) = 0$ sauf si $\mathfrak{o}$ est l'orbite régulière.
2. En sommant sur $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$, on retrouve la fonction $k_{P,D,nilp}$ définie en (6.1.2) pour $a = 0$.

On introduit aussi pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $T \in a_B$

$$k_{D,\mathfrak{o}}^T(g) = \sum_{B \subset P \subset G} (-1)^{\dim(a_P^G)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta g) - T_P) k_{P,D,\mathfrak{o}}(\delta g). \tag{7.4.2}$$

En utilisant la remarque 7.4.1, on voit qu'on a

$$k_{D,nilp}^T = \sum_{\mathfrak{o} \in (Nilp^G)} k_{D,\mathfrak{o}}^T(g). \tag{7.4.3}$$

Voici un des principaux résultats de [8].

Théorème 7.4.2. — *Soit $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$.*

1. *Pour tout $T \in a_B$, l'intégrale*

$$J_{D,\mathfrak{o}}^{T,e} = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} k_{D,\mathfrak{o}}^T(g)\, dg$$

converge absolument.

2. *La fonction*

$$T \mapsto J_{D,\mathfrak{o}}^{T,e}$$

est quasi-polynomiale sur $\mathfrak{a}_B$.

3. *La différence*

$$|\mathcal{N}_{\mathfrak{o}}^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)| - J_{D,\mathfrak{o}}^{T,e}$$

tend vers 0 lorsque les différences $T_i - T_{i+1}$ tendent vers l'infini.

On pose en $T = 0$

$$J_{D,\mathfrak{o}}^{e} = J_{D,\mathfrak{o}}^{0,e}. \tag{7.4.4}$$

Les expressions $J^e_{D,\mathfrak{o}}$ n'expriment pas directement un comptage. Néanmoins, leur somme sur $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$ s'interprète dans certains cas comme un comptage. C'est l'objet des deux corollaires qui suivent. Le premier corollaire porte sur le comptage des fibrés de Hitchin nilpotents.

Corollaire 7.4.3. — *Supposons que le diviseur D vérifie l'inégalité*

$$\deg(D) \geqslant 2g_C - 2.$$

Alors, on a

$$|\mathcal{N}(\mathbb{F}_q)^{ss}| = \sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^G)} J^e_{D,\mathfrak{o}}.$$

Démonstration. — Supposons $\deg(D) \geqslant 2g_C - 2$. *Mutatis Mutandis* la proposition 3.9.2 vaut lorsqu'on remplace le champ de Hitchin $\mathcal{M}$ par le cône nilpotent $\mathcal{N}$. En particulier, un analogue du corollaire 4.5.6 vaut le cône nilpotent $\mathcal{N}_D$. Il s'ensuit que la fonction

$$T \mapsto |\mathcal{N}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$$

est quasi-polynomiale sur $\overline{a_B^+} \cap X^*(T)$. Or $T \mapsto \sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^G)} J^{T,e}_{D,\mathcal{O}}$ est une fonction quasi-polynomiale dont la différence avec $|\mathcal{N}_D^{\leqslant T}(\mathbb{F}_q)|$ tend vers 0 quand T tend vers l'infini (cf. théorème 7.4.2). Ces deux fonctions sont donc égales sur $\overline{a_B^+} \cap X^*(T)$. L'égalité en 0 est le résultat qu'on cherchait.

□

Le second corollaire, qui est une synthèse des résultats obtenus jusqu'ici, montre que le problème du comptage des fibrés de Hitchin semi-stables se ramène au calcul des intégrales $J^e_{D,\mathfrak{o}}$. Dans les paragraphes qui suivent, on donnera le calcul de $J^e_{D,\mathfrak{o}}$ pour certaines orbites. Dans la section finale, on formule une conjecture sur la valeur des expressions $J^e_{D,\mathfrak{o}}$.

Corollaire 7.4.4. —

1. *On a*

$$J^e_{D,nilp} = \sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^G)} J^e_{D,\mathfrak{o}}$$

2. *On suppose qu'on a* $\deg(D) \geqslant \deg(K)$ *où K est un diviseur canonique. On a alors*
   (a) *si* $\deg(D) > \deg(K)$

$$|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))} \sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^G)} J^e_{K-D,\mathfrak{o}} \ ;$$

   (b) *si $D = K$ et e est* premier *au rang n*

$$|\mathcal{M}_K^{ss}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2(1-g_C+\deg(D))+1} \sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^G)} J^e_{K-D,\mathfrak{o}}.$$

Démonstration. — L'assertion 1 résulte de l'égalité (7.4.3). L'assertion 2 est une conséquence immédiate de l'assertion 1 et du corollaire 6.1.2.

□

7.5. Calcul de $J^e_{D,\mathfrak{o}}$; cas de l'orbite nulle. — Lorsque l'orbite $\mathfrak{o}$ est l'orbite nulle, on a $k_{P,D,\mathfrak{o}} = 0$ sauf si $P = G$ et $k_{G,D,\mathfrak{o}}$ est la fonction constante égale à 1. Il en est donc de même pour $k_{D,\mathfrak{o}}$. Il vient donc (cf. théorème 2.3.1 et (2.7.1))

$$\begin{aligned} J^e_{D,\mathfrak{o}} &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e} k_{D,\mathfrak{o}}(g)\,dg \\ &= \mathrm{vol}(G(F)\backslash G(\mathbb{A})^e) \\ &= q^{n^2(g_C-1)}\zeta^*(1)\zeta(2)\ldots\zeta(n), \end{aligned}$$

où ζ et ζ^* sont définis en (2.3.2) et (2.3.4).

7.6. Calcul de $J^e_{D,\mathfrak{o}}$; cas de l'orbite régulière. — Dans ce paragraphe $\mathfrak{o} \in (Nilp^G)$ est l'orbite nilpotente régulière. On pose

$$J^e_{D,\mathrm{reg}} = J^e_{D,\mathfrak{o}}.$$

On rappelle que $T_0 \subset G$ est le sous-tore maximal diagonal. Pour tout sous-groupe de Borel B' contenant T_0 et tout $\lambda \in a_B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, on pose

$$\varphi_{B'}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{B'}} q^{\deg(D)\langle \lambda, \varpi^\vee_\alpha \rangle} \zeta(1 + \langle \lambda, \varpi^\vee_\alpha \rangle).$$

On introduit la moyenne des fonctions $\varphi_{B'}$ sur l'ensemble des sous-groupes de Borel contenant T_0

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{n!} \sum_{T_0 \subset B'} \varphi_B(\lambda).$$

Pour $e \in \mathbb{Z}$, on introduit la variante suivante de la fonction φ

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-2\pi i k e/n) \varphi(\lambda + k\tilde{\rho})$$

où $\tilde{\rho} = \frac{2\pi i}{n \log(q)} \rho$ et ρ est la somme des racines de T_0 dans le groupe $U_{(n-1,1)}$ défini ainsi

$$U_{(n-1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * \\ & \ddots & \vdots & * \\ & & 1 & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Le théorème suivant est l'un des principaux résultats de [8].

Théorème 7.6.1. —

1. *Les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\tilde{\varphi}(\lambda)$ sont holomorphes dans un voisinage de $ia_B \subset a_B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*
2. *Lorsque le degré e est premier au rang n, on a l'égalité suivante*

$$J^e_{D,\mathrm{reg}} = q^{n(g_C-1)} q^{\deg(D)n(n-1)/2} \zeta^*(1) \tilde{\varphi}(0). \tag{7.6.1}$$

Remarques 7.6.2. —

1. Les fonctions $\varphi_{B'}$ ont un pôle en $\lambda = 0$. Le sens de l'assertion 1 est que leur moyenne sur B' n'a plus cette singularité.
2. On peut montrer que le membre de droite de (7.6.1) ne dépend pas de e (premier à n). Par conséquent, $J^e_{D,\mathrm{reg}}$ ne dépend pas de e.

7.7. Quelques mots sur le cas général. — Les orbites nilpotentes sont déterminées par leur type de Jordan. Les deux orbites (l'orbite nulle et l'orbite régulière) que nous venons de voir ont ceci en commun : elles ne possèdent dans leur décomposition de Jordan qu'un seul bloc (avec multiplicité n pour l'orbite nulle et multiplicité 1 pour l'orbite régulière). Dans l'article [8], on donne une formule pour $J^e_{D,\mathfrak{o}}$ dans l'esprit du théorème 7.6.1 pour toutes les orbites nilpotentes qui ne possèdent qu'un seul bloc de Jordan (de taille d et de multiplicité n/d).

Il est également possible de donner une réponse pour les orbites qui possèdent exactement deux blocs de Jordan de multiplicité (les orbites des éléments de carré nul entrent dans ce cadre ou le cadre précédent). À titre d'illustration, on trouvera ci-dessous le cas de l'orbite sous-régulière de $GL(3)$ dont la démonstration n'est pour l'instant pas publiée. Hormis ces cas, la question du calcul de $J^e_{D,\mathfrak{o}}$ reste en général à traiter. Cependant, dans la section finale, on propose une conjecture à la Hausel-Rodriguez-Villegas.

Proposition 7.7.1. — *Soit $\mathfrak{o}$ l'orbite sous-régulière de $GL(3)$. Soit $\Delta_B = \{\alpha, \beta\}$. Pour $e \in \mathbb{Z}$ premier à 3, l'expression*

$$J^e_{D,\mathfrak{o}}$$

ne dépend pas de e. La fonction de la variable $\lambda \in a_B \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ définie au voisinage de 0 par

$$q^{2\deg(D)} q^{5(g_C-1)} \zeta^*(1)^2 \frac{1}{q^{\langle \beta-\alpha,\lambda\rangle}-1}\big[q^{\deg(D)\langle\beta,\lambda\rangle}\zeta(2+\langle\beta,\lambda\rangle) - q^{\deg(D)\langle\alpha,\lambda\rangle}\zeta(2+\langle\alpha,\lambda\rangle)\big].$$

est holomorphe en 0 et sa valeur en 0 n'est autre que $J^e_{D,\mathfrak{o}}$.

7.8. Retour sur les exemples en rang 2 sur la droite projective. — Dans ce paragraphe, on donne explicitement les valeurs de $J^1_{D,\mathrm{reg}}$ et $J^1_{D,0}$ dans la situation des §§ 3.6 et 4.3. On montre qu'on peut ainsi retrouver les calculs du §4.3.

Rappelons qu'il s'agit du cas des fibrés de Hitchin de degré 1 et rang 2 sur la droite projective pour un diviseur D de degré $2d$ (pour l'instant on ne fait pas d'hypothèse sur l'entier $d \in \mathbb{Z}$). Calculons tout d'abord la valeur de $J^1_{D,\mathrm{reg}}$ à l'aide du théorème 7.6.1. La fonction ζ est celle de la droite projective définie en (2.3.3). Il nous faut calculer la limite en $s=0$ de la fonction suivante

$$\begin{aligned} & q^{2ds}\zeta(1+s) + q^{2d-s}\zeta(1-s) \\ &= \frac{q^{2ds}}{(1-q^{-s})(1-q^{-1}q^{-s})} + \frac{q^{-2ds}}{(1-q^{s})(1-q^{-1}q^{s})} \\ &= \frac{1}{(1-q^{-s})(1-q^{-1}q^{-s})(1-q^{-1}q^{s})}(q^{2ds}(1-q^{-1}q^{s}) - q^{-(2d+1)s}(1-q^{-1}q^{-s})) \\ &= \frac{1}{(1-q^{-s})(1-q^{-1}q^{-s})(1-q^{-1}q^{s})}(q^{2ds} - q^{-(2d+1)s} - q^{-1}(q^{(2d+1)s} - q^{-(2d+2)ds})). \end{aligned}$$

Cette limite est donc

$$q\frac{(4d+1)q-(4d+3)}{(q-1)^2}.$$

On a alors avec les notations du théorème 7.6.1

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(0) &= \frac{q}{4}\Big(\frac{(4d+1)q-(4d+3)}{(q-1)^2} - \frac{1}{(q+1)}\Big) \\ &= q \cdot \frac{dq^2-(d+1)}{(q-1)^2(q+1)}. \end{aligned}$$

Il vient alors, suivant le théorème 7.6.1,

$$J^1_{D,\mathrm{reg}} = \frac{q^{2d}}{(q-1)^2(q^2-1)}(dq^2-(d+1)).$$

Pour l'orbite nulle, en utilisant le § 7.5, on obtient

$$J^1_{D,0} = \frac{1}{(q-1)^2(q^2-1)}.$$

En combinant ces deux résultats, on a

$$J^1_{D,\mathrm{reg}} + J^1_{D,0} = \frac{1}{(q-1)^2(q^2-1)}(q^{2d}(dq^2-(d+1))+1) \tag{7.8.1}$$

Cette expression vaut respectivement $0, 0, \frac{q+1}{q-1}$ pour $d=-1,0,1$. D'après le corollaire 7.4.3, ces valeurs correspondent à $|\mathcal{N}(\mathbb{F}_q)^{ss}|$. Vérifions-le en reprenant la discussion du § 4.3. Dans notre situation, pour $d=-1,0$, comme le montrent les formules (4.3.1) et (4.3.2), il n'y a pas de fibré de Hitchin semi-stable donc *a fortiori* pas de fibré de Hitchin semi-stable nilpotent. Pour $d=1$, les fibrés de Hitchin semi-stables nilpotents sont de la forme $(\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O},\theta)$ pour

$$\theta=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}$$

où $a\in H^0(C,\mathcal{O}(2))$, $b\in H^0(C,\mathcal{O}(3))$ et $0\neq c\in H^0(C,\mathcal{O}(1))$ tels que $a^2+bc=0$. Un calcul simple montre qu'il y a $(q^2-1)q^2$ tels θ. Comme il faut diviser par l'ordre $(q-1)q^2$ du groupe des automorphismes de $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}$, on trouve bien $\frac{q+1}{q-1}$ pour le comptage du cône nilpotent global semi-stable.

D'après le corollaire 7.4.4 2(b), en degré $2d=-2$ (cas d'un diviseur canonique), le comptage $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ est proportionnel à l'expression (7.8.1) pour $d=0$ qui est nulle. Donc on doit avoir $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|=0$ ce qui est bien le cas, cf. (4.3.1).

Supposons ensuite $d\geqslant 0$. Si l'on multiplie par q^{8d+4} l'expression (7.8.1) où l'on remplace d par $-1-d$ on trouve, selon le corollaire 7.4.4 2(a), le comptage $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|$. Vérifions-le : on obtient

$$\frac{q^{8d+4}}{(q-1)^2(q^2-1)}(q^{-2-2d}((-1-d)q^2+d)+1)=\frac{1}{(q-1)^2(q^2-1)}(-q^{6d+2}((d+1)q^2-d)+q^{8d+4})$$

qui est bien la réponse (4.3.2).

8 Un raffinement d'une conjecture de Hausel-Rodriguez-Villegas

8.1. Soit les réunions disjointes

$$\mathfrak{N}^*=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(Nilp^{GL(n)})\subset\mathfrak{N}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Nilp^{GL(n)}).$$

On met sur l'ensemble $\mathfrak{N}$ une loi de composition $\boxplus$ commutative, associative, pour laquelle $(0)\in Nilp^{GL(0)}$ est neutre. Elle est définie pour $\mathfrak{o}_1\in Nilp^{GL(n_1)}$ et $\mathfrak{o}_2\in Nilp^{GL(n_2)}$ par

$$\mathfrak{o}_1\boxplus\mathfrak{o}_2=I_{GL(n_1)\times GL(n_2)}^{GL(n_1+n_2)}(\mathfrak{o}_1\oplus\mathfrak{o}_2)$$

où le membre de droite est l'induite au sens de Lusztig-Spaltenstein de l'orbite $\mathfrak{o}_1\oplus\mathfrak{o}_2\subset\mathfrak{gl}(n_1)\oplus\mathfrak{gl}(n_2)$. Ici on voit $GL(n_1)\times GL(n_2)$ comme un sous-groupe de Levi de $GL(n_1+n_2)$; comme ce plongement est unique à conjugaison près, l'induite est bien définie.

Soit K un corps et A une K-algèbre commutative unitaire. On définit une K-algèbre commutative $A[[\mathfrak{N}]]$ ainsi : en tant qu'ensemble, $A[[\mathfrak{N}]]$ est formé des combinaisons formelles

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}}a_{\mathfrak{o}}T^{\mathfrak{o}}$$

à coefficients $a_{\mathfrak{o}}$ dans K. L'addition est définie coefficient par coefficient et la multiplication est donnée par

$$(\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}}a_{\mathfrak{o}}T^{\mathfrak{o}})\cdot(\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}}b_{\mathfrak{o}}T^{\mathfrak{o}})=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}}c_{\mathfrak{o}}T^{\mathfrak{o}})$$

où l'on pose

$$c_{\mathfrak{o}}=\sum_{\{(\mathfrak{o}_1,\mathfrak{o}_2)\in\mathfrak{N}^2|\mathfrak{o}_1\boxplus\mathfrak{o}_2=\mathfrak{o}\}}a_{\mathfrak{o}_1}b_{\mathfrak{o}_2}.$$

La somme ci-dessus est finie. On note 1 l'élément unité $T^{(0)}$.

Supposons de plus que l'algèbre A est munie pour tout $r \geqslant 1$ d'un endomorphisme ψ_r tel que $\psi_n(1) = 1$ et $\psi_n \circ \psi_m = \psi_{nm}$. On prolonge alors ψ_r en un endomorphisme de $A[[\mathfrak{N}]]$ par

$$\psi_r(\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}} a_{\mathfrak{o}} T^{\mathfrak{o}}) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{N}} \psi_r(a_{\mathfrak{o}})(T^{\mathfrak{o}})^r$$

On a encore $\psi_n(1) = 1$ et $\psi_n \circ \psi_m = \psi_{nm}$. Soit I l'idéal de $A[[\mathfrak{N}]]$ formé des éléments dont le coefficient $a_{(0)}$ est nul. On dispose d'une application $I \to I$

$$\Psi = \sum_{r\geqslant 1} \frac{\psi_r}{r}$$

qui est bijective d'inverse

$$\Psi^{-1} = \sum_{r\geqslant 1} \frac{\mu(r)}{r}\psi_r$$

où μ est la fonction de Möbius.

On définit alors une bijection

$$\mathrm{Exp} : I \to 1 + I$$

par $\mathrm{Exp} = \exp \circ \sum_{r\geqslant 1} \psi_r$ d'inverse

$$\mathrm{Log} : 1 + I \to I$$

défini par $\mathrm{Log} = \Psi^{-1} \circ \log$.

8.2. Par abus, on note q^s la fonction $s \mapsto q^s$ holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathbb{Q}(q^s)$ l'algèbre des fractions rationnelles en q^s à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On applique le formalisme précédent à la $\mathbb{Q}$-algèbre $A = \mathbb{Q}(q^s)^{\mathbb{N}^*}$. Pour $r \geqslant 1$, l'endomorphisme ψ_r de A est défini par

$$\psi_r((f_d)_{d\in\mathbb{N}^*}) = (f_{rd})_{d\in\mathbb{N}^*}.$$

On utilisera en particulier l'élément $Z_D \in A$ défini ainsi : pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$Z_{D,d}(s) = (-1)^{(d-1)\deg(D)} q^{d\deg(D)s} \zeta_{C\times_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^d}}(1 + s)$$

la fonction zêta qui intervient ci-dessus est la fonction zêta de la courbe $C \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$, cf. (2.3.2).

Remarque 8.2.1. — Le signe $(-1)^{(d-1)\deg(D)}$ est là pour que la formule suivante ait lieu

$$Z_{D,d}(s) = \prod_{k=0}^{d-1} Z_{D,1}(s + k\frac{2\pi i}{d\log(q)}).$$

8.3. Diagramme de Young et orbites nilpotentes. — Pour tout $\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*$, on associe un diagramme de Young $Y_{\mathfrak{o}}$ comme suit. Tout d'abord, il existe une unique suite d'entiers $0 < n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ tel que $\mathfrak{o} = 0_{n_1} \boxplus \ldots \boxplus 0_{n_r}$ où 0_{n_i} désigne l'orbite nilpotente nulle de $\mathfrak{gl}(n_i)$. On pose alors

$$Y_{\mathfrak{o}} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid 1 \leqslant j \leqslant r \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant n_j\}.$$

Pour tout $x = (i, j) \in Y_{\mathfrak{o}}$ on définit les fonctions
- bras $a_x = n_j - i$;
- jambre $l_x = |\{1 \leqslant k < j \mid n_k \geqslant i\}|$;
- crochet $h_x = a_x + l_x + 1$.

Pour $\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*$, on associe les entiers suivants :
- la dimension $\dim(\mathfrak{o})$ de l'orbite $\mathfrak{o}$;
- le cardinal $|\mathfrak{o}|$ du diagramme de Young (on a donc $\mathfrak{o} \in Nilp^{GL(|\mathfrak{o}|)}$) ;

– la codimension de $\mathfrak{o}$ définie par $\mathrm{codim}(\mathfrak{o}) = |\mathfrak{o}|^2 - \dim(\mathfrak{o})$ (c'est encore la dimension commune aux centralisateurs dans $GL(|\mathfrak{o}|)$ des éléments de $\mathfrak{o}$).

Notons le lemme suivant.

Lemme 8.3.1. — *Pour $\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*$, on a*

$$\mathrm{codim}(\mathfrak{o}) = \sum_{x \in Y_{\mathfrak{o}}} (2a_x + 1). \tag{8.3.1}$$

Démonstration. — Le résultat est évident si $\mathfrak{o}$ est l'orbite nulle de $Nilp^{GL(|\mathfrak{o}|)}$: la codimension est alors $|\mathfrak{o}|^2$ et le membre de droite de (8.3.1) vaut

$$1 + 3 + \ldots + (2|\mathfrak{o}| - 1) = |\mathfrak{o}|^2.$$

Dans le cas général, on écrit $\mathfrak{o} = 0_{n_1} \boxplus \ldots \boxplus 0_{n_r}$ comme ci-dessus. La codimension est additive pour $\boxplus$ (cf. [18]) autrement dit on a

$$\mathrm{codim}(0_{n_1} \boxplus \ldots \boxplus 0_{n_r}) = \mathrm{codim}(0_{n_1}) + \ldots + \mathrm{codim}(0_{n_r}).$$

Comme le membre de droite de 8.3.1 est aussi additive pour $\boxplus$, le résultat s'ensuit. ☐

8.4. Une conjecture à la Hausel-Rodriguez-Villegas. — Pour tout $\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}$, soit $Z_{\mathfrak{o}} \in A$ défini de la manière suivante.

$$Z_{\mathfrak{o}}(s) = \prod_{x \in Y_{\mathfrak{o}}} Z_D(a_x + h_x s)$$

On introduit alors les éléments $H_{\mathfrak{o}} \in A$ par l'égalité

$$\mathrm{Log}(1 + \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*} Z_{\mathfrak{o}} T^{\mathfrak{o}}) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*} H_{\mathfrak{o}} T^{\mathfrak{o}}. \tag{8.4.1}$$

De manière moins condensée, on a pour tout $\mathfrak{o}' \in \mathfrak{N}^*$

$$H_{\mathfrak{o}'} = \sum_{(m,r)} \frac{\mu(r)}{r} (-1)^{\sigma(m)} \sigma(m)! \prod_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*} \frac{\psi_r(Z_{\mathfrak{o}})^{m_{\mathfrak{o}}}}{m_{\mathfrak{o}}} \tag{8.4.2}$$

où la somme est prise sur l'ensemble (fini) des couples (m, r) tels que $m \in \mathbb{N}^{\mathfrak{N}^*}$ et $r \in \mathbb{N}^*$ vérifient

$$r(\boxplus_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*} m_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}) = \mathfrak{o}'$$

et où l'on pose

$$\sigma(m) = -1 + \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*} m_{\mathfrak{o}}.$$

Soit $Q_{\mathfrak{o}} \in A$ donné pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ par

$$Q_{\mathfrak{o},d} = (-1)^{(d-1)\deg(D)} (1 - q^{-ds}) q^{d\mathrm{codim}(\mathfrak{o})(g_C - 1)} q^{d\deg(D)(\dim(\mathfrak{o}) - \mathrm{codim}(\mathfrak{o}) + |\mathfrak{o}|)/2}.$$

Conjecture 8.4.1. — *Soit $\mathfrak{o} \in \mathfrak{N}^*$ et D un diviseur sur C.*

1. *La fonction $Q_{\mathfrak{o}} H_{\mathfrak{o}}$ est holomorphe en $s = 0$.*
2. *Soit e premier à $|\mathfrak{o}|$. On a pour tout entier $d \in \mathbb{N}^*$*

$$(Q_{\mathfrak{o},d} H_{\mathfrak{o},d})(s = 0) = J^e_{D,\mathfrak{o},q^d}$$

où dans le membre de droite $J^e_{D,\mathfrak{o},q^d}$ est la quantité (7.4.4) relative à la courbe $C \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^d}$, au diviseur D, au rang $|\mathfrak{o}|$, au degré e et à l'orbite $|\mathfrak{o}|$.

Remarques 8.4.2. —

1. La conjonction de la conjecture 8.4.1 et du corollaire 7.4.4 donne immédiatement une formule conjecturale pour $|\mathcal{M}_D^{ss}(\mathbb{F}_q)|$ lorsque le diviseur D est un diviseur canonique ou lorsqu'il satisfait l'hypothèse $\deg(D) > 2g_C - 2$.
2. La conjecture 8.4.1 n'est qu'un raffinement de la conjecture de Hausel et Rodriguez-Villegas sur le polynôme de Hodge mixte des variétés caractères (cf. [13]) et d'une variante de cette conjecture pour le motif de l'espace de Hitchin formulée par Mozgovoy (cf. [19]). Pour un rang n fixé, on devrait donc s'attendre à ce que la somme

$$\sum_{\mathfrak{o}\in(Nilp^{GL(n)})} Q_{\mathfrak{o},1}(s)H_{\mathfrak{o},1}(s)$$

soit, au dénominateur $1-qq^s$ et à une puissance de q^s près, un polynôme en q^s. On n'a pas du tout regardé cet aspect.

Proposition 8.4.3. — *La conjecture 8.4.1 vaut pour l'orbite nulle (0_n) de $\mathfrak{gl}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. — Les orbites nulles ont ceci de particulier : elles ne sont jamais induites à partir d'un sous-groupe de Levi propre. Par conséquent, la formule (8.4.2) donne pour ces orbites l'égalité

$$H_{(0_n)} = Z_{(0_n)}.$$

On ne traite que la composante $d=1$, les autres se traitant de la même façon. On a explicitement

$$Z_{(0_n),1}(s) = q^{\deg(D)(n(n-1)+n(n+1)s)/2}\zeta(1+s)\zeta(2+2s)\dots\zeta(n+ns)$$

et

$$Q_{(0_n),1}(s) = (1-q^{-s})q^{n^2(g_C-1)}q^{\deg(D)(-n^2+n)/2}.$$

D'où

$$Q_{(0_n),1}(s)Z_{(0_n),1}(s) = q^{n^2(g_C-1)}(1-q^{-s})\zeta(1+s)\zeta(2+2s)\dots\zeta(n+ns).$$

Cette fonction est holomorphe en $s=0$ et sa valeur en ce point est (avec les notations de (2.3.4))

$$q^{n^2(g_C-1)}\zeta^*(1)\zeta(2)\dots\zeta(n).$$

C'est bien la valeur de $J^e_{D,(0_n)}$ (cf. §7.5). □

Proposition 8.4.4. — *La conjecture 8.4.1 vaut pour toutes les orbite $\mathfrak{o}$ telles que $|\mathfrak{o}| \leqslant 3$.*

Démonstration. — La proposition 8.4.3 donne la conjecture pour toutes les orbites nulles. Il reste trois orbites à traiter : les orbites régulières en rang 2 et 3, l'orbite sous-régulière en rang 3. C'est l'objet des paragraphes suivants. □

8.5. Explicitation de quelques fonctions Z et H. — On note $(n_1,\dots,n_r)$ l'orbite $(0_{n_1}) \boxplus \dots \boxplus (0_{n_r})$. Par abus, on n'écrit que la composante pour $d=1$ des éléments de A considéré mais on ne le précise pas dans les notations.

Rang 1

$$H_{(1)} = Z_{(1)} = Z_D(s)$$

Rang 2

$$H_{(2)} = Z_{(2)} = Z_D(s)Z_D(1+2s)$$

$$Z_{(1,1)} = Z_D(s)Z_D(2s)$$

$$\psi_2(Z_{(1)}) = Z_D(s)Z_D(s+\frac{\pi i}{\log(q)})$$

$$\begin{aligned} H_{(1,1)} &= Z_{(1,1)} - \frac{1}{2}Z_{(1)}^2 - \frac{1}{2}\psi_2(Z_{(1)}) \\ &= Z_D(s)Z_D(2s) - \frac{1}{2}Z_D(s)^2 - \frac{1}{2}Z_D(s)Z_D(s+\frac{\pi i}{\log(q)}) \end{aligned}$$

Rang 3

$$H_{(3)} = Z_{(3)} = Z_D(s)Z_D(1+2s)Z_D(2+3s)$$

$$Z_{(2,1)} = Z_D(s)^2 Z_D(1+3s)$$

$$Z_{(1,1,1)} = Z_D(s)Z_D(2s)Z_D(3s)$$

$$\psi_3(Z_{(1)}) = Z_D(s)Z_D(s+\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(s+\frac{4\pi i}{3\log(q)})$$

$$\begin{aligned} H_{(2,1)} &= Z_{(2,1)} - Z_{(2)}Z_{(1)} \\ &= Z_D(s)^2 Z_D(1+3s) - Z_D(s)^2 Z_D(1+2s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{(1,1,1)} &= Z_{(1,1,1)} - Z_{(1,1)}Z_{(1)} + \frac{1}{3}Z_{(1)}^3 - \frac{1}{3}\psi_3(Z_{(1)}) \\ &= Z_D(s)Z_D(2s)Z_D(3s) - Z_D(s)^2 Z_D(2s) + \frac{1}{3}Z_D(s)^3 \\ &\quad -\frac{1}{3}Z_D(s)Z_D(s+\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(s+\frac{4\pi i}{3\log(q)}) \end{aligned}$$

8.6. Vérification de la conjecture 8.4.1 pour l'orbite $(1,1)$. — On va utiliser le développement de $Z_D(s)$ en $s=0$ sous la forme suivante

(8.6.1)
$$Z_D(s) = \frac{c_{-1}}{s} + c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + o(s^2).$$

Il faut multiplier $H_{(1,1)}$ par le facteur

$$Q_{(1,1)}(s) = (1-q^{-s})q^{2(g_C-1)}q^{\deg(D)}.$$

On a donc

$$Q_{(1,1)}(s)H_{(1,1)}(s) = q^{2(g_C-1)}q^{\deg(D)}(1-q^{-s})Z_D(s)\big[Z_D(2s) - \frac{1}{2}Z_D(s) - \frac{1}{2}Z_D(s+\frac{\pi i}{\log(q)})\big]$$

La fonction $(1-q^{-s})Z_D(s)$ est holomorphe en $s=0$ de valeur $\zeta^*(1)$ en ce point. La fonction $Z_D(s+\frac{\pi i}{\log(q)})$ est holomorphe en $s=0$. Par ailleurs, on a, au voisinage de $s=0$,

$$Z_D(2s) - \frac{1}{2}Z_D(s) = \frac{c_0}{2} + o(1).$$

On a donc l'holomorphie de $Q_{(1,1)}(s)H_{(1,1)}(s)$ en $s=0$ et la valeur en $s=0$ de cette expression est

(8.6.2)
$$\frac{1}{2}q^{2(g_C-1)}q^{\deg(D)}\zeta^*(1)(c_0 - Z_D(\frac{\pi i}{\log(q)})).$$

Il faut comparer cette expression à celle donnée par le théorème 7.6.1 pour $e=1$. Ce théorème donne la valeur suivante pour $J^1_{D,(1,1)}$

$$q^{2(g_C-1)}q^{\deg(D)}\zeta^*(1)\tilde{\varphi}(0)$$

où $\tilde{\varphi}(0)$ est la valeur en $\lambda = 0$ de l'expression suivante, où α est la racine de T_0 dans le sous-groupe de Borel standard de $GL(2)$,

$$\frac{1}{4}(Z_D(\langle\lambda, \varpi_\alpha^\vee\rangle) + Z_D(-\langle\lambda, \varpi_\alpha^\vee\rangle) - Z_D(\langle\lambda, \varpi_\alpha^\vee\rangle + \frac{\pi i}{\log(q)}) - Z_D(-\langle\lambda, \varpi_\alpha^\vee\rangle - \frac{\pi i}{\log(q)})).$$

On a

$$Z_D(s - \frac{\pi i}{\log(q)}) = Z_D(s + \frac{\pi i}{\log(q)})$$

puisque $Z_D(s)$ est invariante par translation par le groupe $\frac{2\pi i}{\log(q)}\mathbb{Z}$. En utilisant (8.6.1), on voit qu'on a

$$\tilde{\varphi}(0) = \frac{c_0}{2} - \frac{1}{2}Z_D(\frac{\pi i}{\log(q)}).$$

On retrouve donc bien (8.6.2).

8.7. Vérification de la conjecture 8.4.1 pour l'orbite $(1,1,1)$**.** — On a

$$Q_{(1,1,1)}(s) = (1 - q^{-s})q^{3(g_C-1)}q^{3\deg(D)}.$$

Donc le produit $Q_{(1,1,1)}(s)$ par $H_{(1,1,1)}(s)$ vaut

$$\begin{aligned} q^{3(g_C-1)}q^{3\deg(D)}(1 - q^{-s})Z_D(s)\big[Z_D(2s)Z_D(3s) - Z_D(s)Z_D(2s) + \frac{1}{3}Z_D(s)^2 \\ -\frac{1}{3}Z_D(s + \frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(s + \frac{4\pi i}{3\log(q)})\big] \end{aligned}$$

La seule expression qui n'est pas évidemment holomorphe en $s = 0$ est l'expression suivante qu'on développe à l'aide de (8.6.1)

$$\begin{aligned} Z_D(2s)Z_D(3s) - Z_D(s)Z_D(2s) + \frac{1}{3}Z_D(s)^2 &= \frac{c_{-1}^2}{s^2}(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{c_{-1}c_0}{s}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) \\ +c_0^2(1 - 1 + \frac{1}{3}) &+ c_{-1}c_1(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + o(1) \\ &= \frac{1}{3}(c_0^2 + c_{-1}c_1) + o(1). \end{aligned}$$

Le produit de $Q_{(1,1,1)}(s)$ par $H_{(1,1,1)}(s)$ est donc holomorphe en $s = 0$ et sa valeur en $s = 0$ est

$$\frac{1}{3}q^{3(g_C-1)}q^{3\deg(D)}\zeta^*(1)(c_0^2 + c_{-1}c_1 - Z_D(\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(\frac{4\pi i}{3\log(q)})). \tag{8.7.1}$$

Cette valeur doit comparée à celle donnée par le théorème 7.6.1, disons pour $e = 1$, qui est de la forme, avec les notations du 7.6,

$$q^{3(g_C-1)}q^{3\deg(D)}\zeta^*(1)\tilde{\varphi}(0).$$

Il s'agit de voir qu'on a

$$\tilde{\varphi}(0) = \frac{1}{3}(c_0^2 + c_{-1}c_1 - Z_D(\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(\frac{4\pi i}{3\log(q)})). \tag{8.7.2}$$

On suit les notations du 7.6 : le vecteur ρ s'écrit explicitement $(1,1,-2)$. Soit $\varpi_1^\vee = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$ et $\varpi_2^\vee = \frac{1}{3}(1,1,-2)$ les copoids standard de $GL(3)$. Plutôt que de faire « tourner » la base Δ_B, on va regarder l'orbite de λ et ρ sous le groupe de Weyl W. On a le tableau suivant

Orbites de ρ	$\langle\cdot, \varpi_1^\vee\rangle$	$\langle\cdot, \varpi_2^\vee\rangle$
$(1,1,-2)$	1	2
$(1,-2,1)$	1	-1
$(-2,1,1)$	-2	-1

Il s'ensuit que pour tout $w \in W$ et $k \in \{1,2\}$, on a

$$Z_D(\langle wk\tilde{\rho}, \varpi_1^\vee\rangle)Z_D(\langle wk\tilde{\rho}, \varpi_2^\vee\rangle) = Z_D(k\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(k\frac{4\pi i}{3\log(q)}).$$

On en déduit que $\tilde{\varphi}(0)$ est la somme de deux contributions (on regroupe les termes suivant s'ils sont holomorphes en 0 ou non)

1. la valeur en $\lambda = 0$ de (λ appartient à $a_{T_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^3$)

$$\frac{1}{18}\sum_{w\in W} Z_D(\langle w\lambda, \varpi_1\rangle)Z_D(\langle w\lambda, \varpi_2\rangle)\ ;$$

2. $$-\frac{1}{3}Z_D(\frac{2\pi i}{3\log(q)})Z_D(\frac{4\pi i}{3\log(q)}).$$

Pour montrer l'égalité (8.7.2), il faut voir que la valeur en $\lambda = 0$ de l'expression en 1 est égale à $\frac{1}{3}(c_0^2 + c_{-1}c_1)$. Puisqu'on sait par le théorème 7.6.1 que cette expression est holomorphe, il suffit de calculer le terme homogène de degré 0 dans son développement en $\lambda = 0$. Ce dernier s'écrit

$$\frac{1}{3}c_0^3 + \frac{1}{18}c_{-1}c_1(\sum_{w\in W}\frac{\langle w\lambda, \varpi_1\rangle}{\langle w\lambda, \varpi_2\rangle} + \frac{\langle w\lambda, \varpi_2\rangle}{\langle w\lambda, \varpi_1\rangle})$$

Pour calculer le facteur entre parenthèses, on évalue en un point particulier, par exemple, $\lambda = \rho$. En se reportant au tableau ci-dessus, on obtient

$$2(\frac{1}{2} + 2 - 1 - 1 + 2 + \frac{1}{2}) = 6$$

comme voulu.

8.8. Vérification de la conjecture 8.4.1 pour l'orbite $(2,1)$**.** — On a

$$Q_{(2,1)}(s) = (1-q^{-s})q^{5(g_C-1)}q^{\deg(D)}.$$

D'autre part, on a

$$H_{(2,1)}(s) = Z_D(s)^2(Z_D(1+3s) - Z_D(1+2s)).$$

Soit $Z'_D(1)$ la dérivée de Z_D en 1. On a

$$Z_D(1+3s) - Z_D(1+2s) = Z'_D(1)s + o(s)$$

$$\lim_{s\to 0}(1-q^{-s})Z_D(s) = \zeta^*(1)$$

$$Z_D(s) = (1-q^{-s})\zeta(1+s)\frac{q^{s\deg(D)}}{1-q^{-s}} = \zeta^*(1)\frac{1}{\log(q)s} + o(\frac{1}{s}).$$

Donc la conjecture donne l'expression suivante

$$\frac{1}{\log(q)}q^{5(g_C-1)}q^{\deg(D)}\zeta^*(1)^2 Z'_D(1). \tag{8.8.1}$$

Par ailleurs la proposition 7.7.1 donne comme réponse la limite quand $\lambda \to 0$ de

$$q^{\deg(D)}q^{5(g_C-1)}\zeta^*(1)^2\frac{1}{q^{\langle\beta-\alpha,\lambda\rangle}-1}\big[Z_D(1+\langle\beta,\lambda\rangle) - Z_D(1+\langle\alpha,\lambda\rangle)\big]$$

qui est bien (8.8.1).

Références

[1] J. Arthur. A trace formula for reductive groups I. Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$. *Duke Math. J.*, 45 :911–952, 1978.

[2] J. Arthur. The trace formula in invariant form. *Ann. of Math.*, 114 :1–74, 1981.

[3] J. Arthur. A measure on the unipotent variety. *Canad. J. Math.*, 37 :1237–1274, 1985.

[4] J. Arthur. On a family of distributions obtained from orbits. *Canad. J. Math.*, 38(1) :179–214, 1986.

[5] J. Arthur. An introduction to the trace formula. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 of *Clay Math. Proc.*, pages 1–263. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[6] A. Beauville and Y. Laszlo. Un lemme de descente. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(3) :335–340, 1995.

[7] P.-H. Chaudouard. La formule des traces pour les algèbres de Lie. *Math. Ann.*, 322(2) :347–382, 2002.

[8] P.-H. Chaudouard and G. Laumon. Sur le comptage des fibrés de Hitchin nilpotents. Prépublication.

[9] O. García-Prada, J. Heinloth, and A. Schmitt. On the motives of moduli of chains and Higgs bundles. *ArXiv e-prints*, April 2011.

[10] P. Gothen. The Betti numbers of the moduli space of stable rank 3 Higgs bundles on a Riemann surface. *Internat. J. Math.*, 5(6) :861–875, 1994.

[11] A. Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.*, 79 :121–138, 1957.

[12] G. Harder and M. S. Narasimhan. On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 212 :215–248, 1974/75.

[13] T. Hausel and F. Rodriguez-Villegas. Mixed Hodge polynomials of character varieties. *Invent. Math.*, 174(3) :555–624, 2008. With an appendix by Nicholas M. Katz.

[14] N. Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(1) :59–126, 1987.

[15] R. Kottwitz. Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275 :365–399, 1986.

[16] L. Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson. *Astérisque*, (243) :ii+329, 1997.

[17] G. Laumon and M. Rapoport. The Langlands lemma and the Betti numbers of stacks of G-bundles on a curve. *Internat. J. Math.*, 7(1) :29–45, 1996.

[18] G. Lusztig and N. Spaltenstein. Induced unipotent classes. *J. London Math. Soc.*, 19 :41–52, 1979.

[19] S. Mozgovoy. Solutions of the motivic ADHM recursion formula. *ArXiv e-prints*, April 2011.

[20] N. Nitsure. Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 62(2) :275–300, 1991.

[21] C. Simpson. Nonabelian Hodge theory. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 747–756, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan.

[22] A. Weil. *Adeles and algebraic groups*, volume 23 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1982. With appendices by M. Demazure and Takashi Ono.

Pierre-Henri Chaudouard
Université Paris Diderot (Paris 7)
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
UMR 7586

Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 PARIS Cedex 13
France

Mail : Chaudouard@math.jussieu.fr