Examen

Mardi 25 juin 2024 - Durée 2h
Documents interdits - Calculettes interdites

Les 2 exercices sont indépendants.

Dans toute la suite $\mathbf{Z}$ désigne l'anneau des entiers relatifs et $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. Si A est un anneau, $A^\times$ désigne le groupe des éléments inversibles de A. On rappelle que lorsque A et B sont deux anneaux alors $(A\times B)^\times = A^\times \times B^\times$.

Exercice 1. — Soit $n = 561$.

1. (a) Rappeler pourquoi les anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$ sont isomorphes.
   (b) Quel est le cardinal de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$?
2. (a) Montrer que $2 \pmod{11}$ est un élément d'ordre 10 de $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^\times$.
   (b) Montrer que $3 \pmod{17}$ est un élément d'ordre 16 de $(\mathbf{Z}/17\mathbf{Z})^\times$.
   (c) Quel est l'ordre de $(1 \pmod 3, 2 \pmod{11}, 3 \pmod{17})$, élément de $\left(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}\right)^\times$?
   (d) En déduire que $343 \pmod n$ est un élément d'ordre 80 de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.
3. (a) Montrer que que pour tout x entier naturel premier avec n, on $x^{80} \equiv 1 \pmod n$.
   (b) En déduire que si 80 divise $m-1$ alors pour tout x entier relatif on a $x^m \equiv x \pmod n$.
   (c) En déduire que pour tout x entier relatif, on a $x^n \equiv x \pmod n$.

Exercice 2. —

1. (a) Montrer que le polynôme X^2-10 est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$.
   (b) En déduire que le nombre réel $\sqrt{10}$ est irrationnel.
2. Soit A l'ensemble des nombres réels de la forme $a+b\sqrt{10}$, où $a,b\in\mathbf{Z}$.
   (a) Montrer que tout $x\in A$ s'écrit de manière unique $x = a+b\sqrt{10}$, où $(a,b)\in\mathbf{Z}^2$.
   (b) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{R}$.
3. Si $x = a+b\sqrt{10}\in A$, on pose $N(x) = a^2-10b^2$.
   (a) Montrer que N vérifie $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tous $x,y,\in A$.
   (b) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est $A^\times = \{x\in A \mid N(x) = \pm 1\}$.
4. (a) Vérifier que $3+\sqrt{10}$ et $19+6\sqrt{10}$ sont éléments de $A^\times$.
   (b) Montrer que que $A^\times$ est infini.
   (c) Montrer que $\inf\{x\in A^\times \mid x>0\} = 0$.
5. Soit $a,b\in\mathbf{Z}$.
   (a) Montrer que $a^2-10b^2\neq\pm 2$ (considérer le chiffre des unités de a).
   (b) En déduire que 2 est un élément irréductible de A.
6. À partir de l'égalité $(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10}) = 2\times 3$, montrer que l'anneau A n'est pas factoriel.