UNIVERSITÉ PARIS 6

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : Mathématiques

Pierre-Vincent Koseleff

Titre :

Contributions au calcul dans les séries formelles de Lie et à la déformation de groupes triangulaires en géométrie hyperbolique complexe.

soutenue le 19 décembre 2003

devant le jury

Daniel BENNEQUIN,
Gérard DUCHAMP,
Elisha FALBEL,
Marc GIUSTI,
John PARKER,
Jean-Jacques RISLER,

Rapporteurs :

Marc GIUSTI,
Pierre PANSU,
John PARKER

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce mémoire aborde plusieurs domaines auxquels je me suis intéressés depuis quelques années : le calcul de Lie et en particulier les séries de Lie et leurs applications en théorie du contrôle (avec F. JEAN), en mécanique hamiltonienne et dans l'étude de relations dans des groupes ; l'étude des déformations de groupes triangulaires discrets dans l'espace $\mathbf{PU}(2,1)$ des automorphismes de la boule unité complexe de dimension 2 (avec E. FALBEL).
J'ai choisi dans ce mémoire, de présenter les résultats de quelques articles significatifs ainsi qu'un travail en collaboration avec Serge GALAM sur l'étude d'un modèle particulier du problème d'Ising triangulaire antiferromagnétique.

⋆⋆⋆

La caractéristique commune de ces travaux est le fait que les résultats sont donnés de façon explicite et constructive, utilisant les outils de calcul formel. À mon sens, c'est le point de vue algébrique, est plus particulièrement effectif, qui a permis d'obtenir les différents résultats que j'évoque succinctement ici et plus en détails dans la partie suivante.
Ainsi, dans la quasi totalité des références que je propose dans ce mémoire, toutes les solutions sont explicites et effectives, dans le sens que nous définissons un algorithme pour les calculer.

Séries de Lie

À l'origine, dans ma thèse ([13]), je m'étais intéressé aux méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne. Elles jouent un rôle très important dans des domaines aussi variés que la mécanique céleste, l'optique géométrique, la physique des plasmas, la théorie des accélérateurs de particules, le transport de neutrons ou l'électricité. Leur essor remonte à la parution de deux articles, un article du mécanicien céleste André Deprit [110] en 1969 et celui de deux physiciens Alex Dragt et John Finn [111] en 1976.
Les mécaniciens célestes ont l'habitude de considérer les transformations canoniques comme des transformations de Lie, c'est-à-dire comme l'application, au temps 1, du flot d'un Hamiltonien non-autonome. Pour d'autres, on représente les transformations canoniques comme des composées d'applications, au temps 1, de flots hamiltoniens autonomes.
En fait, ces deux formalismes ne sont que deux représentations d'éléments du même groupe. L'étude (dans ma thèse) des liens entre ces transformations et l'exponentielle m'a conduit à développer la possibilité d'exprimer des identités entre les automorphismes des séries de Lie, dans une algèbre de Lie libre, tant d'un point de vue théorique que d'un point de vue effectif.
Les principaux résultats obtenus dans ma thèse étaient :

- Équivalence des transformations de Deprit, de Dragt-Finn et des exponentielles de dérivations intérieures
- Méthodes effectives de calcul des relations entre ces transformations et de leur composition (en particulier, obtention des formules de Campbell-Haussdorf à des ordres élevés).

– Obtention d'intégrateurs symplectiques : ce sont des schémas d'intégration numérique de systèmes hamiltoniens qui ont la particularité d'être sans dérive, c'est-à-dire, de conserver des intégrales premières proches de celles du système. Ces méthodes sont utilisées pour intégrer à très long terme des systèmes de mécanique céleste.

Développements postérieurs

J'ai poursuivi après ma thèse dans ce sujet et présenté plusieurs résultats :

– J'ai proposé dans *Exhaustive Search of Symplectic Integrators Using Computer Algebra* ([5]), une liste exhaustive d'intégrateurs symplectiques optimaux pour les petits ordres ainsi que des méthodes pour l'obtention à des ordres élevés. Outre l'intérêt de l'obtention de méthodes explicites d'intégration à très long terme de systèmes de mécanique céleste, l'obtention de ses résultats a mis en lumière des isomorphismes particuliers entre diverses composantes de l'algèbre de Lie libre.
– Utilisant des automorphismes des séries de Lie, j'ai mis en évidence (*Relations among Lie Series Transformations and Isomorphisms between free Lie Algebras*, [7]) certaines graduations de l'algèbre de Lie libre et certains isomorphismes qui m'ont conduit à démontrer que les composantes homogènes de la série de Hausdorff engendraient librement une algèbre de Lie libre (extension d'un résultat de Sirsov et Witt ([141])).
– Avec Frédéric JEAN (Ensta), considérant à présent les transformations de Lie, du point de vue de la théorie du contrôle, nous avons donné *Elementary Approximation of Exponential of Lie Polynomials* ([6]) une méthode explicite d'approximation à tout ordre de l'exponentielle d'un polynôme de Lie par un produit de facteurs élémentaires (généralisation de la formule de Zassenhauss).

Parallélogrammes

Comme je vais l'expliquer dans la partie suivante, les résultats évoqués ci-dessus ont comme caractéristique commune d'être des problèmes d'approximation dans un groupe de Lie, d'un élément par des éléments d'un sous-groupe particulier.

Ces méthodes explicites de calcul d'identités dans le groupe des transformations de Lie m'ont conduit à considérer, avec Elisha FALBEL (Paris 6), la question de la recherche d'identités de longueur minimale. Nos résultats concernent plus particulièrement les identités de longueur minimale (parallélogrammes) dans le groupe nilpotent libre. L'idée était de construire des trajectoires fermées comme successions d'orbites de champs de vecteurs. Dans (*The Number of Sides of a Parallelogram* [8]), nous bornons les longueurs des parallélogrammes et de nombreux exemples de groupes sont évoqués, soulignant ainsi la grande variété des cas possibles.

Déformation de groupes triangulaires dans $\mathbf{PU}(2,1)$

Une famille de groupes particulièrement intéressante est celle des groupes triangulaires. Je me suis intéressé (avec Elisha FALBEL) au problème de l'existence de la déformation de groupes

triangulaires discrets (engendré par 3 réflexions) dans le groupe des automorphismes de la boule complexe de dimension 2 : $\mathbf{PU}(2,1)$.
Nous nous sommes particulièrement intéressés au groupe $(2,3,\infty)$ dont $\mathbf{SL}(2,\mathbb{Z})$ peut être vu comme un sous-groupe d'indice 2.
Notre travail, outre qu'il donne des résultats de flexibilité (existence de familles de déformation) là où existaient des résultats de rigidité, est fondé sur l'utilisation des **C**-sphères (mis en évidence par Falbel et Zocca [115]). Ce sont des surfaces qui délimitent des domaines fondamentaux, lesquels permettent de conclure sur le caractère discret du groupe étudié. Une part importante du travail a été l'étude d'invariants algébriques intervenant dans la construction de tels objets. Ce sont ces constructions ([9, 10, 12]), qui ont nécessité l'utilisation du calcul formel, qui ont permis de mettre à jour des familles de déformations.

Problème d'Ising

Avec Serge GALAM (CNRS, Paris 6), nous avons mené ([11]) une étude algébrique et donc basée sur des méthodes de calcul formel pour le modèle d'Ising antiferromagnétique.
Le modèle d'Ising permet d'étudier les transitions de phase des systèmes de la physique de la matière condensée. Ici nous étudions une nouvelle théorie de champ moyen, proposée par S. Galam ([118, 119]) qui préserve la symétrie hamiltonienne initiale. Ce modèle particulièrement simple est appliqué ici pour résoudre le modèle antiferromagnétique triangulaire d'Ising. Ce modèle a ceci d'intéressant que les résultats que nous obtenons ne sont pas numériques. L'existence des états d'équilibre et leur détermination a pu se démontrer de façon exacte (algébrique). Là où tous les modèles de champ moyen indiquaient une transition de phase à température non nulle, nous avons montré qu'il n'en était rien avec ce modèle particulier, conformément à la théorie générale ([151]).
Ce modèle simple de champ moyen ouvre une nouvelle manière d'aborder les systèmes aléatoires.

⋆⋆⋆

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS OBTENUS

Outre le travail en commun avec S. Galam (*Solving the triangular Ising ferromagnet by simple mean field*), qui concerne l'utilisation de méthodes algébriques simples et classiques dans l'étude d'un modèle mathématique particulier du problème d'Ising antiferromagnétique, on peut séparer les thèmes de recherche dans les travaux que je présente en deux grandes parties : les **séries de Lie** et la **géométrie hyperbolique complexe**. Ces deux thèmes sont liés par le premier travail que j'ai effectué avec E. Falbel : *The Number of Sides of a Parallelogram*. Il s'agissait au départ de construire des trajectoires fermées comme successions d'orbites de champs de vecteurs particuliers. Il s'est vite avéré qu'un problème plus général était celui de la recherche d'identités de longueur minimale dans un groupe (de Lie) donné ou même plus généralement le problème de l'approximation d'un élément d'un groupe par des éléments d'un sous-groupe. Le cadre dans lequel nous nous sommes placés dans notre étude est celui du groupe nilpotent libre, ce qui, en utilisant diverses graduations, peut conduire à des résultats plus généraux d'approximation dans le cadre des séries formelles de Lie.

Problème général de l'approximation

Soit x,y des éléments d'une algèbre de Lie L. Dans le groupe de Lie $\exp(L)$, nous savons que

$$\exp(x+y) \simeq \exp(x)\exp(y),\ 1 \simeq \exp(x)\exp(y)\exp(-x)\exp(-y)$$

dans un sens qu'il convient de préciser. Ce sont là les premiers exemples d'approximations. Dans le premier cas nous approximons un élément (l'exponentielle d'une somme) par un produit d'éléments d'un sous groupe et dans le second cas nous recherchons une approximation de 1. Encore ne s'agit-il ici que d'approximation du premier ordre.

Intégrateurs symplectiques

Les intégrateurs symplectiques sont des schémas d'intégration numérique à long terme, de systèmes hamiltoniens. Le problème est le suivant : étant donné un hamiltonien $H = H_1 + H_2$, calculer une solution approchée de l'équation

$$z(0) = z_0, \dot{z}(t) = [H,z].$$

Formellement, la solution est donnée par $z(t) = \exp(t[H,\cdot])z_0$, lorsque H ne dépend pas du temps. Il est fréquent que $\exp(t[H,\cdot])$ ne se calcule pas facilement alors que $\exp(t[H_1,\cdot])$ et $\exp(t[H_2,\cdot])$ le peuvent. L'idée est d'essayer d'approximer le flot $\exp(\tau[H,\cdot])$ par une composition des flots hamiltoniens $\exp(\tau_1[H_1,\cdot])$ de H_1 et $\exp(\tau_2[H_2,\cdot])$ de H_2. De tels intégrateurs peuvent se construire en considérant des identités universelles dans les algèbres de Lie libres :

$$\exp(\tau[H,\cdot]) \simeq \exp(\tau_1[H_{i_1},\cdot])\cdots\exp(\tau_k[H_{i_k},\cdot])$$

de telle façon que l'erreur ne soit pas importante.
L'avantage est double : tout d'abord, les méthodes classiques d'intégrations numériques ne sont pas sans dérive, c'est-à-dire, l'intégrale première $H(z)$, non seulement ne sera pas constante mais de plus va tendre vers l'infini ; ici, l'approximation ainsi obtenue du flot hamiltonien apparaît comme une combinaison de flots hamiltoniens et est enoce un flot hamiltonien.
Cette approche a été introduite en 1988. L'utilisation du formalisme des séries de Lie pour résoudre cette question est apparue au début des années 1990 [117, 153, 154, 146, 147, 148, 134]. Dans ces travaux, des méthodes de construction pour des petits ordres ou pour des ordres élevés ne prouvaient pas leur exhaustivité ni même leur minimalité. Dans ma thèse ([13]) et dans deux articles ([2, 5]) je donne une liste exhaustive de tels intégrateurs pour des petits ordres et propose des constructions pour des ordres élevés.
Dans le cas général, il s'agit de se placer dans un certain groupe de transformations. Le cadre le plus général est celui des automorphismes des séries de Lie dans lequel j'avais déjà étudié la représentation des compositions.
Dans le cas particulier de l'intégration de systèmes de mécanique céleste, mes résultats, qui utilisaient le fait que le Hamiltonien du système pouvait se ré-écrire, dans les variables héliocentriques canoniques, comme la somme de problèmes à deux corps et une perturbation d'interaction, nous avions de plus une relation de la forme

$$[[[T,V],V],V] = 0,$$

due au fait que l'énergie cinétique du système est une forme quadratique. Je propose alors dans *Exhaustive Search of Symplectic Integrators Using Computer Algebra*, une construction en me plaçant dans le cadre d'un quotient d'algèbre de Lie libre.
Ces méthodes sont utilisées actuellement en mécanique céleste (Laskar et Robutel [130]), ou plus généralement en intégration de systèmes “symplectiques” (McLachlan [135]).

Planifications de trajectoires

En théorie du contrôle, pour un système $\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)X_i(x)$, le problème classique de la planification de trajectoires est ([126, 129]) : *étant donnés deux états p et q, déterminer une trajectoire réalisable (i.e. des contrôles $u_1(t),\ldots,u_m(t)$) tels que $x(0) = p$ et $x(1)$ soit arbitrairement proche de q.*
Nous obtenons une trajectoire comme une concaténation de trajectoires, chacune étant l'orbite pendant le temps λ_{i_k} sous l'action du champ X_{i_k}.
Soit q un état donné comme $\exp(X)p$, dans lequel X appartient à l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$, engendrée par les champs de vecteurs X_i. Nous recherchons des trajectoires, plus simples, comme composition des flots des X_i.
Le point final de la trajectoire est donné alors par $\exp(\lambda_1 X_{i_1})\cdots\exp(\lambda_s X_{i_s})p$, c'est-à-dire, un produit de facteurs élémentaires appliqué à l'état p. Ici encore, il s'agit d'écrire

$$\exp(tX) \simeq \exp(\lambda_1 X_{i_1})\cdots\exp(\lambda_s X_{i_s}) = \exp(tX + o(t^k)).$$

Dans (*Elementary Approximation of Exponentials of Lie Polynomials*, [6]), nous donnons une méthode effective qui détermine de telles trajectoires à tout ordre. Ce ne sont pas des identités minimales. Elles utilisent tout d'abord la décomposition en forme factorisée (prop. 1) puis pour chaque terme homogène une méthode sans calculs dans l'algèbre de Lie.

Parallélogrammes

Le cas particulier où les $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ (resp. $\{-1,1\}$) et $X = 0$ a été étudié dans [8]. Nous l'avons appelé parallélogramme et il est lié au problème suivant : *soit* a,b *des éléments d'un groupe G. Un parallélogramme est une relation minimale de la forme*

$$1 = a^{n_1} b^{m_1} \cdots a^{n_k} b^{m_k}$$

Ici nous cherchons à minimiser la longueur $\sum_{i=1}^{k} |n_i| + |m_i|$.

Dans le cas du groupe nilpotent libre d'ordre m, nous montrons que le problème est identique à celui de la recherche d'un élément

$$\exp(n_1 x) \exp(m_1 y) \cdots \exp(n_k x) \exp(m_k y) - 1$$

d'ordre m dans l'algèbre associative libre $L(x,y)$, ou de la série rationnelle

$$(1+x)^{n_1}(1+y)^{m_1} \cdots (1+x)^{n_k}(1+y)^{m_k} - 1$$

d'ordre m.

⋆⋆⋆

Pour ces trois problèmes d'approximation, nous nous sommes placés dans la cadre des algèbres de Lie libres ou du groupe nilpotent libre. Les résultats obtenus ont utilisés le formalise des automorphismes des séries de Lie et des relations explicites que nous pouvions obtenir entre diverses transformations. Les résultats explicites ont été obtenus grâce à des outils de calculs formel que j'ai continué de développer peu après ma thèse et par des techniques de résolution de systèmes polynomiaux.

Séries de Lie

X étant un alphabet (éventuellement pondéré), $L(X), F(X)$ et $\mathcal{A}(X)$ désignent l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre sur X. Ils sont classiquement gradués par la longueur, le poids (longueur pondérée) et le multi-degré.
On définit les séries formelles de Lie $\widehat{L}(X)$ et les séries non commutatives $\widehat{\mathcal{A}}(X)$ par complétion.

Nous utilisons aussi $\widehat{L}_{\geq p}(X) = \prod_{n \geq p} L_n(X)$, et $\widehat{\mathcal{A}}_{\geq p}(X) = \prod_{n \geq p} \mathcal{A}_n(X)$ où $L_n(X)$ (resp $\mathcal{A}_n(X)$) est le sous-module des éléments de longueur n.

L'ensemble $\Gamma(X) = 1 + \widehat{\mathcal{A}}_{\geq 1}(X)$ est appelé le *groupe de Magnus*.

Exponentielle.— Ayant définit l'exponentielle $\exp : \widehat{\mathcal{A}}_{\geq 1}(X) \to \Gamma(X)$ nous utilisons de théorème de Campbell-Hausdorff [105, Ch. II, §5]) :

Théorème 1 (Campbell-Hausdorff).— *Pour $x, y \in \widehat{L}_{\geq 1}(X)$, la série de Hausdorff $H(x,y) = \log[\exp(x)\exp(y)]$ appartient à $\widehat{L}_{\geq 1}(X)$.*

Une conséquence directe est une variante de la formule de Zassenhauss [141] :

Proposition 1 (Développement en produit).— *Pour $k \in \widehat{L}_{\geq 1}(X)$, il existe un unique $g \in \widehat{L}_{\geq 1}(X)$ tel que*

$$\exp(\sum_{n\geq 1} k_n) = \cdots \exp(g_n) \cdots \exp(g_1).$$

De plus, on peut calculer explicitement g en fonction de k (voir par exemple ma thèse [13]).

Problème général de l'approximation

Le problème général de l'approximation est le suivant :

Problème 1 (Approximation).— *Soit $X = \{X_1, \ldots, X_k\}$, un alphabet. Soit $P \in L(X)$. Déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ dans un ensemble à préciser $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \{-1, 1\})$, tels que*

$$\exp(P) = \exp(\lambda_1 X_{i_1}) \cdots \exp(\lambda_s X_{i_s}) \exp(R_{>n})$$

où les $X_{i_k} \in X$ et $R_{>n} \in \widehat{L}_{\geq n+1}(X)$.

Parallélogrammes [8]

Notons $F_{\geq 1}(X) = F(X)$ et posons $F_{\geq n}(X) = (F_{\geq 1}(X), F_{\geq n-1}(X))$ (ensemble des commutateurs), on obtient la *suite centrale descendante*.

Considérant les filtrations centrales de $F(X) \to \Gamma(X)$, $\mu : x \in X \mapsto (1+x)$ et $\mu' : x \in X \mapsto \exp(x)$, Magnus a prouvé le résultat ([105]) : $\mu^{-1}(1 + \widehat{\mathcal{A}}_{\geq n}(X)) = \mu'^{-1}(1 + \widehat{\mathcal{A}}_{\geq n}(X)) = F_{\geq n}(X)$
Cette propriété nous permet de considérer les polygones comme des approximants

$$\begin{array}{rcl} \exp(a_1 x)\exp(b_1 y) \cdots \exp(a_n x)\exp(b_n y) & \in & 1 + \widehat{\mathcal{A}}_{\geq m}(X), \\ (1+x)^{a_1}(1+y)^{b_1} \cdots (1+x)^{a_n}(1+y)^{b_n} & \in & 1 + \widehat{\mathcal{A}}_{\geq m}(X). \end{array}$$

ce que l'on peut à la fois rapprocher des séries de Lie et des séries rationnelles (voir [102]). Ici, les a_i et les b_i sont des entiers non nuls. Un parallélogramme d'ordre m sera un polygone d'ordre m de longueur minimum l_m et nous démontrons, utilisant un minorant du rang d'une série rationnelle : [8]

Théorème 2.— *On a $m \leq l_m \leq m^2$.*

Nous donnons une méthode explicite pour construire des parallélogrammes à tout ordre et étudions divers cas particuliers lorsque le groupe G n'est pas le groupe nilpotent libre.

Intégrateurs symplectiques [4, 5].
Le cas particulier où $P = X_1 + \cdots + X_k$ (en particulier $k = 2$) concerne la théorie des intégrateurs symplectiques

$$\exp(P) = \exp(\lambda_1 X_{i_1}) \cdots \exp(\lambda_s X_{i_s}) \exp(R_{>n})$$

Ici les λ_i sont des nombres algébriques (réels ou complexes) et il est important de pouvoir estimer l'erreur $\exp(R_{>n})$. Les X_i sont des champs de vecteurs hamiltoniens $[H_i, \cdot]$. Nous écrivons

$$H = H_1 + \cdots + H_k,$$

de telle façon que l'intégration numérique ou exacte des flots des hamiltoniens H_i soit connue.

Théorie du contrôle [6].
Nous avons montré : pour tout $P \in L(X_1, \ldots, X_m)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ réels, tels que

$$\exp(P) = \exp(\lambda_1 X_{i_1}) \cdots \exp(\lambda_s X_{i_s}) \exp(R_{>n}).$$

Les λ_i, sont donnés de façon explicite, sans aucun calcul, si P est un monôme de Lie. Sinon, nous utilisons la décomposition de la proposition 1 qui est effective.

$\star^\star\star$

Le problème général de l'approximation a toujours une solution. Une question intéressante est également : *quel est l'ensemble des solutions* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *de*

$$\exp(P) = \exp(\lambda_1 X_{i_1}) \cdots \exp(\lambda_s X_{i_s}) \exp(R_{>n}).$$

J'ai montré, dans ma thèse, que les s-uplets $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ sont les zéros d'un certain idéal polynomial qu'il est possible de déterminer. Celui-ci dépend de la base qui a été fixée dans l'algèbre de Lie et de la façon de représenter les transformations.
En particulier, cherchant des relations entre diverses transformations qui sont des automorphismes de $\widehat{L}(X)$, et divers isomorphismes entre sous-modules de cette algèbre, j'ai pu montrer que les composantes homogènes de la série de Hausdorff engendraient librement $L(X)$.

$\star^\star\star$

Perspectives

Je me suis écarté depuis 1997 des applications telle que la planification de trajectoires ou la recherche d'intégrateurs symplectiques. Néanmoins, bien que les numériciens ou les utilisateurs de tels intégrateurs aient découvert que ceux obtenus avec des valeurs négatives aient de moins bonnes propriétés de stabilité, une piste n'a pas été explorée avec les intégrateurs utilisant des valeurs complexes. Il me semble que cette piste pourrait être étudiée, à condition de donner un sens à de tels méthodes.
Concernant l'étude des parallélogrammes, les quelques exemples que nous avons illustrés montrent à l'évidence que certaines propriétés restent à être découvertes. Peut-être la longueur des parallélogrammes nous renseignerait-elle sur la structure des groupes. C'est en tout cas une piste que je compte bien reprendre.

Groupes triangulaires de $\mathbf{PU}(2,1)$

Un problème de base en géométrie est celui de la déformation. Partant d'un groupe Γ abstrait finiment engendré, et d'un groupe de Lie G_1, on peut rechercher un plongement $\rho_0 : \Gamma \to G_1$ et se demander si celui-ci ne fait partie d'une famille ρ_t de plongements discrets.
Un cas particulièrement intéressant est le groupe triangulaire de type (p,q,∞), présenté par

$$\Gamma =< \iota_0, \iota_1, \iota_2 : {\iota_0}^2 = 1, \iota_1^2 = 1, \iota_2^2 = 1, (\iota_0 \circ \iota_1)^p = 1, (\iota_0 \circ \iota_2)^q = 1 > .$$

Prolongeant le travail initié par Falbel et Zocca [115], nous avons étudié des déformations du plongement de ce groupe triangulaire dans le groupe des isométries de la boule unité complexe de dimension 2. Ce sont les applications conformes du compactifié du groupe de Heisenberg **H**, lequel peut s'identifier à S^3, le bord du plan hyperbolique complexe.
Il était déjà connu, qu'un plongement dans d'autres groupes d'isométries d'espaces symétriques, tels le disque unité de dimension 1, ou l'espace hyperbolique réel de dimension 3, est rigide.
Dans le cas auquel nous nous intéressons, nous obtenons des déformations non triviales, pour des groupes de réflexions Γ triangulaires (p,q,∞). Celles-ci sont construites en exhibant des domaines fondamentaux comme "polyèdres" dont la frontière est une **C**-sphère, c'est-à-dire, est feuilleté par des **C**-cercles, utilisant un théorème de Poincaré modifié (Falbel, Zocca [115]). Les techniques utilisées par Goldman [121] ou Parker et Goldman [123] ou Parker et Gusevskii [124] utilisaient des bisecteurs (hypersurfaces feuilletées par des **C**-cercles), qui offrent moins de liberté.
Citons quelques résultats significatfs

Théorème 3 (Goldman [122]).**—** *Si* $\rho_0(\Gamma)$ *laisse invariante une variété totalement géodésique complexe et si son domaine fondamental, restreint à cette variété, est compact, alors toute déformation proche de ce plongement est conjuguée à celui-ci.*

Dans *Rigidity and Flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry*, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 4 (Falbel & Koseleff [10]).— *Il existe un plongement discret et fidèle du groupe* $\Gamma(p,q,\infty)$*, qui fixe une variété totalement géodésique complexe, et admettant un voisinage (de dimension 4) de plongements discrets et fidèles.*

Dans *A circle of modular groups in* $\mathbf{PU}(2,1)$, nous montrons :

Théorème 5 (Falbel & Koseleff [12]).— *Il existe une famille à un paramètre* $\rho_t(\Gamma(2,3,\infty))$ *de plongements discrets, telle que* $\rho_0(\Gamma)$ *laisse invariante une variété totalement géodésique complxe et* $\rho_1(\Gamma)$ *fixe une variété totalement géodésique réelle. Les groupes* $\rho_t(\Gamma)$ *sont engendrés par des réflexions réelles.*

Construction géométriques dans le modèle de Heisenberg

Nous nous plaçons dans la formalisme du groupe de Heisenberg **H** (voir [122, 115, 9, 10]). C'est l'ensemble $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ que nous identifions au bord de la boule complexe, muni de l'addition $(z,t)+(z',t')=(z+z',t+t'+2\mathrm{Im}\, z\overline{z}')$. **H** s'identifie à la frontière du plan hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2{}_C$. Dans $\mathbf{H}^2{}_C$, il y a deux familles de surfaces totalement géodésiques : ce sont les sous-variétés totalement réelles (isométriques de $\mathbf{H}^2{}_C\cap\mathbb{R}^2$) et les sous-variétés totalement complexes (isométriques de $H^2{}_C\cap\mathbb{C}$).
Dans le modèle de Heisenberg, nous considérons les intersections de ces plans géodésiques avec S^3 pour obtenir les **R**-cercles et les **C**-cercles.
Le groupe $\mathbf{PU}(2,1)$ dans lequel nous plongeons Γ contient des transformations holomorphes et antiholomorphes. Il y a deux types de réflexions dans ce modèle : les réflexions réelles qui sont toutes conjuguées à l'inversion (anti-involution) standard

$$I_0:(z,t)\mapsto\left(\frac{-z}{|z|^2-it},-\frac{t}{|z|^4+t^2}\right),$$

qui fixe point par point la courbe $\mathbf{R}_0 : r^2+it=-e^{-2i\theta}$, laquelle se projette sur le plan $\mathbb{C}$ en la lemniscate de Bernoulli. $\mathbf{R}_0$ est le **R**-*cercle standard*.
L'autre anti-involution particulière est $I_1:(z,t)\mapsto(\overline{z},-t)$, laquelle fixe la droite $\mathbf{R}_1$ (l'axe réel). Dans le modèle de Heisenberg, les **R**-cercles (intersection entre S^3 et une sous-variété totalement réelle) sont soit des droites (**R**-cercles infinis), transformés de $\mathbf{R}_1$ par des similitudes, soit des transformés de $\mathbf{R}_0$ par des similitudes du groupe de Heisenberg (**R**-cercles finis).
À chaque **R**-cercle, nous pouvons associer une unique inversion. Les objets laissés globalement invariants par ces inversions sont des **C**-cercles. Dans le modèle de Heisenberg, les **C**-cercles sont soit des droites verticales, soit des ellipses, intersection d'un cylindre vertical à base circulaire et d'un plan.

Pour démontrer que la configuration est un groupe discret, nous construisons explicitement un domaine fondamental dont la frontière sera une réunion de **C**-cercles (ellipses), utilisant le théorème de Poincaré [142, 137, 115]. Nous ramenons donc le problème à celui de la construction de familles à un paramètre de **C**-cercles, lesquelles doivent s'intersecter suivant des **C**-cercles invariants par deux des générateurs.
Nous avons étudié les configurations possibles et proposé plusieurs constructions qui s'appuyaient essentiellement sur les propriétés algébriques de ces ellipses.

⋆⋆⋆

Mon apport principal à ce travail a été de mettre en évidence des propriétés algébriques des **C**-sphères, permettant ainsi la construction explicite de domaines fondamentaux.
Bien que celà n'apparaissent pas explicitement dans nos travaux, les résultats ont été obtenus grâce à l'utilisation du calcul formel : soit pour montrer qu'une construction était impossible (en utilisant des techniques de géométrie algébrique réelle de dénombrements de zéros), soit pour donner des formules explicites. En particulier, j'ai développé un *paquetage* dans le logiciel MAPLE de factorisation des séries de Poisson (combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques).

Perspectives

Sur la déformation des plongements des groupes triangulaires (p,q,∞), de nombreuses questions restent en suspens. Nous savons déja, que pour tous p et q, il existe des voisinages d'une configuration que nous pouvons déformer non trivialement. Par contre nous ne savons pas montrer (parce que nous ne savons pas construire de domaine fondamental) qu'au delà, certaines déformations ne sont plus discrètes. Il reste néanmoins de nombreuses possibilités d'étude, en étudiant des invariants algébriques des générateurs, qui s'appuierait sur des techniques de la théorie des invariants.

LISTE DES TRAVAUX

Articles

[1] KOSELEFF, P.-V., *Jeux de mots dans les algèbres de Lie libres : quelques bases et formules*, Theoret. Comput. Sci. **79, no. 1, (Part A)** (1991), 241–256

[2] KOSELEFF, P.-V., *Relations among Formal Lie Series and Construction of Symplectic Integrators*, AAECC'10 proceedings, Lect. Not. Comp. Sci. **673** (1993), 213–230

[3] KOSELEFF, P.-V., *Comparison between Deprit and Dragt-Finn perturbation methods*, Celestial Mechanics **58-1**, Kluwer (1994)

[4] KOSELEFF, P.-V., *About approximations of exponentials*, Lecture Notes in Computer Science **948**, Springer (1995), 323–333

[5] KOSELEFF, P.-V., *Exhaustive Search of Symplectic Integrators Using Computer Algebra*, Fields Institute Communications **10** (1996)

[6] JEAN, F., KOSELEFF, P.-V., *Elementary Approximation of Exponentials of Lie Polynomials*, Lect. Not. Comp. Sci. **1255**, Springer (1997), 210–230

[7] KOSELEFF, P.-V., *Relations among Formal Lie Series Transformations and isomorphisms between free Lie algebras*, Discrete Mathematics **180** (1998), 243–254

[8] FALBEL, E., KOSELEFF, P.-V., *The Number of Sides of a Parallelogram*, Discrete Mathematics and Theoretical Science, **3-2** (1999), 33–42

[9] FALBEL, E., KOSELEFF, P.-V., *Flexibility of the ideal triangle group in complex hyperbolic geometry*, Topology **39(6)**, Pergamon (2000), 1209–1223

[10] FALBEL, E., KOSELEFF, P.-V., *Rigidity and Flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry*, Topology **41(4)**, Pergamon (2002), 767–786

[11] GALAM, S., KOSELEFF, P.-V., *Solving the triangular Ising ferromagnet by simple mean field*, The European Physical Journal B **28** (2002), 149–155

[12] FALBEL, E., KOSELEFF, P.-V., *A circle of modular groups in* $\mathbf{PU}(2,1)$, Mathematical Research Letters **9** (2002), 379–394

Thèse, livres

[13] KOSELEFF, P.-V., *Calcul Formel pour les méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne*, Thèse de troisième cycle, École Polytechnique, 1993

[14] KOSELEFF, P.-V., *Formal Calculus for Lie Methods in Hamiltonian Mechanics* **LBID-2030 Rev UC 405**, Lawrence Berkeley Laboratory, 1994

[15] JACOB, G., KOSELEFF, P.-V. (ÉDS), *Special issue : 'Lie Computations'*, Discrete Mathematics and Theoretical Science, **1-1**, Springer, 1997

[16] KOSELEFF, P.-V., *Configurations Centrales de quatre corps dans le plan*, in *Modélisation mathématique, un autre regard*, Scopos **16**, Springer (2002), 115–124

BIBLIOGRAPHIE

[101] BELLAÏCHE A., RISLER, J.-J. (EDS), *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics **144**, Birkhäuser, 1996

[102] BERSTEL, J., REUTENAUER, C., *Rational series and their languages*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer, 1988

[103] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete groups*, Springer-Verlag, 1983

[104] BURNS, D., SHNIDER, S., *Spherical Hypersurfaces in Complex Manifolds*, Invent. Math. **33** (1976), 223–246

[105] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Éléments de Mathématiques, Hermann, Paris, 1972

[106] CARTAN, E., *Sur le groupe de la géométrie hypersphérique*, Comm. Math. Helv. **4** (1932), 158–171

[107] CARTIER, P., *Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff*, Bull. S.M.F. **84** (1956), 241–249

[108] CARY, J.R., *Lie Transform Perturbation Theory for Hamiltonian Systems*, Physics Reports **79-2**, North-Holland Publishing Company (1981), 129–159

[109] S. CHEN, L. GREENBERG, *Contributions to Analysis*, a, Academic Press, New York, 1974

[110] DEPRIT, A., *Canonical transformations depending on a small parameter*, Cel. Mech. **1** (1969), 12–30

[111] DRAGT, A. J., FINN, J. M., *Lie Series and invariant functions for analytic symplectic maps*, J. Math. Physic **17** (1976), 2215–2227

[112] DRAGT, A. J., HEALY, L. M., *Lie Methods in Optics II*, Lec. Notes in Physics **352**, Springer Verlag, 1988

[113] FALBEL, E., GORODSKI, C., RUMIN, M., *Holonomy of sub-Riemannian manifolds*, International Journal of Mathematics **8, No. 3** (1997), 317–344

[114] FALBEL, E., PARKER, J., R., *The moduli space of the modular group in complex hyperbolic geometry*, Invent. Math. **152(1)** (2003), 57—88

[115] FALBEL, E., ZOCCA, V., *A Poincaré's polyhedron theorem for complex hyperbolic geometry*, J. Reine Angew. Math. **5126**, Walter de Gruyter (1999), 133–158

[116] FINN, J. M., *Lie Series : a Perspective, Local and Global Methods of nonlinear Dynamics*, Lec Notes in Physics **252**, Springer Verlag (1984), 63–86

[117] FOREST, E., RUTH, D., *Fourth-Order Symplectic Integration*, Physica D **43**, Elsevier Sc. Publ. B.V. (North-Holland) (1990), 105–117

[118] GALAM, S., *Self-consistency and symmetry in d dimensions*, Phys. Rev. B **54** (1996), 15991–15996

[119] GALAM, S., *From Galam-Mauger law to a powerful mean field scheme*, Journal of Applied Physics **87 (9 :3)** (2000), 7040–7042

[120] GOLDMAN, W., *Geometry and Topology Proceedings, University of Maryland 1983-1984*, Lecture Notes in Mathematics **1167**, Springer

[121] GOLDMAN, W., MILLSON, J.-J., *Local rigidity of discrete groupes acting on complex hyperbolic space*, Inventiones Mathematicæ **88** (1987), 495–520.

[122] GOLDMAN, W., *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 1999

[123] GOLDMAN, W., PARKER, J., *Complex hyperbolic ideal triangle groups*, J. Reine Angew. Math. **425** (1992), 71–86

[124] GUSEVSKII, N., PARKER, J. R., *Representations of free Fuchsian groups in complex hyperbolic space*, Topology **39** (2000), 33–60

[125] HITCHIN, N. J., *Lie Groups and Teichmüller Space*, Topology **31(3)** (1992), 449–473

[126] JACOB, G., *Motion Planning by piecewise constant or polynomial inputs*, Proceedings of the IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, Bordeaux, France (1992)

[127] A. KORÁNYI, H. M. REIMANN, *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Invent. Math. **80** (1985), 309–338

[128] LABUTE, J.-P., *Groups and Lie algebras : the Magnus theory*, in *mathematical legacy of Wilhelm Magnus : groups, geometry and special functions*, Contemp. Math. **169**, A.M.S. (1992)

[129] LAFFERRIERE, G., SUSSMANN H., *Motion Planning for controllable systems without drift*, Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California (1991)

[130] LASKAR, J., ROBUTEL, PH., *High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems*, Celestial Mech. Dynam. Astronom **80(1)** (2001), 39–62

[131] LAUMOND, J.P., *Nonholonomic Motion Planning via Optimal Control*, Algorithmic Foundations of Robotics, A.K. Peters Pub. (1995)

[132] LYNDON, R. C. SHUPP P. E., *Combinatorial group theory*, Springer, 1977

[133] MCLACHLAN, R. I., *On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods*, SIAM J. Sci. Comp. **16(1)** (1995), 151–168

[134] MCLACHLAN, R. I., SCOVEL, C, *Open problems in symplectic integration*, in *Integration Algorithms and Classical Mechanics*, Fields Institute Communications **10**, AMS, J.E. Marsden, G.W. Patrick, and W.F. Shadwick, eds. (1996), 151–180

[135] MACLACHLAN, R. I., *Families of high-order composition methods*, Numerical Algorithms **31** (2002), 233–246

[136] MAGNUS *et al*, *Combinatorial Group Theory : Presentation of Groups in Terms of Generators and Relations*, J. Wiley & Sons, 1966

[137] MASKIT, B., *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, 1988

[138] MICHEL, J., *Bases des Algèbres de Lie Libres, Étude des coefficients de la formule de Campbell-Hausdorff*, Thèse, Orsay, 1974

[139] PERRIN, D., *Factorization of free monoids*, in *Lothaire M., Combinatorics On Words, Chap. 5*, Addison-Wesley (1983)

[140] PETITOT, M., *Algèbre non commutative en Scratchpad : application au problème de la réalisation minimale analytique*, Thèse, Université de Lille I, 1991

[141] REUTENAUER, C., *Free Lie algebras*, Oxford Science Publications, 1993

[142] DE RHAM, G., *Sur les polygones générateurs de groupes fuchsiens*, Enseign. Math. **17** (1971), 49–61.

[143] SANOV, I. N., *A property of a representation of a free group*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **57** (1947), 657–659

[144] SCHWARTZ, R., E., *Complex Hyperbolic Triangle Groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians **1** (2002), 339–350

[145] STEINBERG, S., *Lie Series, Lie Transformations, and their Applications*, in *Lie Methods in Optics*, Lec. Notes in Physics **250**, Springer V., Leon, Mexico (1985)

[146] SUZUKI M., *Fractal Decomposition of Exponential Operators with Applications to Many-Body Theories and Monte Carlo Simulations*, Ph. Letters A **146** (1990), 319–323

[147] SUZUKI, M., *General Theory of higher-order decomposition of exponential operators and symplectic integrators*, Physics Letters A **165**, North-Holland (1992), 387–395

[148] SUZUKI, M., *General nonsymetric higher-order decompositions of exponential operators and symplectic integrators*, Physic Letters A **165** (1993), 387–395

[149] TOLEDO, D., *Representations of surface groups in complex hyperbolic space*, J. Diff. Geometry **29** (1989), 125–133

[150] VIENNOT, G., *Algèbres de Lie libres et Monoïdes Libres*, Lect. Notes in Math. **691**, Springer Verlag, 1978

[151] WANNIER, G. H., *Antiferromagnetism. The Triangular Ising Net*, Phys. Rev. **79** (1950), 357–364

[152] WISDOM J., HOLMAN, M., *Symplectic Maps for the N-Body Problem*, The Astr. J. **102(4)** (1991), 1528–1538

[153] YOSHIDA, H., *Conserved Quantities of Symplectic Integrators for Hamiltonian Systems*, Physica D, Springer V. (1990)

[154] H. YOSHIDA, *Construction Of Higher Order Symplectic Integrators*, Physics Letters A **150**, Elsevier Science Publishers B.V. (1990), 262–268

ANNEXES

- — KOSELEFF, P.-V., *Exhaustive Search of Symplectic Integrators Using Computer Algebra*, Fields Institute Communications, 10 (1996). lien
- — KOSELEFF, P.-V., *Relations among Lie Series Transformations and Isomorphisms between free Lie Algebras*, Discrete Maths, 180 (1998), 243-254. lien
- — F. JEAN, P.-V KOSELEFF, *Elementary Approximation of Exponential of Lie Polynomials*, AAECC'12 Proceedings, Lecture Notes in Computer Science **1255**, 1997, pp. 174-188, Springer. lien
- — FALBEL, E., KOSELEFF, P.-V., *The Number of Sides of a Parallelogram*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (DMTCS) 3 :2 (1999), pp 33-42. lien
- — E. FALBEL, P.-V KOSELEFF, *Flexibility of the ideal triangle group in complex hyperbolic geometry*, Topology **39(6)** (2000), pp. 1209-1223. lien
- — E. FALBEL, P.-V KOSELEFF, *Rigidity and Flexibility of triangle groups in complex hyperbolic geometry*, Topology 41(4) (2002), pp. 767-786. lien
- — E. FALBEL, P.-V KOSELEFF, *A circle of Modular Groups in* $\mathbf{PU}(2,1)$, Mathematical Research Letters 9 (2002), pp. 379-394. lien
- — GALAM, S., KOSELEFF, P.-V., *Solving the triangular Ising ferromagnet by simple mean field*, The European Physical Journal B **28** (2002), pp. 149-155. lien